

*На правах рукописи*



**ЯЗЫЕВ СЕРДАР БАТЫРОВИЧ**

**РАЗВИТИЕ МЕТОДОВ РАСЧЕТА НА УСТОЙЧИВОСТЬ  
ВЯЗКОУПРУГИХ СТЕРЖНЕЙ И ПЛАСТИН  
В УСЛОВИЯХ НЕЛИНЕЙНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ**

2.1.9. Строительная механика

**АВТОРЕФЕРАТ**

диссертации на соискание ученой степени  
доктора технических наук

Диссертация выполнена в Федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего образования «Донской государственной технической академии»

Научный консультант: **Андреев Владимир Игоревич** — доктор технических наук, профессор, академик РААСН, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования "Национальный исследовательский Московский государственный строительный университет", кафедра "Сопротивление материалов", профессор кафедры, (05.23.17)

Официальные оппоненты: **Крысько Вадим Анатольевич** — доктор технических наук, профессор, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования «Саратовский государственный технический университет имени Гагарина Ю.А.», кафедра «Математики и моделирования», заведующий кафедрой, (01.02.04)

**Тер-Эммануильян Татьяна Николаевна** — доктор технических наук, доцент, Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Российский университет транспорта», кафедра «Теоретическая механика», профессор кафедры, (05.23.17)

**Бережной Дмитрий Валерьевич** — доктор физико-математических наук, доцент, Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования "Казанский (Приволжский) федеральный университет", кафедра «Теоретическая механика», профессор кафедры (01.02.04)

Ведущая организация: Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «**Балтийский федеральный университет имени Иммануила Канта**»

Защита состоится «18» марта 2023 года в 12:00 часов на заседании диссертационного совета 24.2.295.01 при ФГБОУ ВО «Дагестанский государственный технический университет» по адресу: 367026, г. Махачкала, пр. И. Шамиля, 70, ауд. 202 (диссертационный зал).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ФГБОУ ВО «Дагестанский государственный технический университет» <http://www.dstu.ru>.

Сведения о защите и автореферат диссертации размещены на официальном сайте ВАК Министерства науки и высшего образования РФ <http://vak3.ed.gov.ru>.

Дата рассылки автореферата «\_\_» \_\_\_\_\_ 20\_\_ г.

Учёный секретарь  
диссертационного совета  
к.т.н., доцент

Ханзада Рауповна  
ЗАЙНУЛАБИДОВА

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

### Актуальность исследования

Использование материалов, обладающими свойствами реологии в качестве конструкционных, предъявляет к изделиям из них определенные требования надежной работы при заданных режимах эксплуатации. Практическое обеспечение этого требования связано прежде всего с разработкой инженерных методов расчета, которые с достаточной полнотой учитывали бы многообразие силовых, температурных и других воздействий на несущие элементы конструкций.

Исследование вопросов устойчивости элементов конструкций из материалов, обладающими свойством реологии, в зависимости от постановки и методов решения, особенно в случаях сочетания нагрузок с начальными несовершенствами крайне сложно. Если добавить учет переменной жесткости и косвенной непрерывной неоднородности, то такая постановка задачи приближает конструктивную схему к реальному объектам.

Сложность аналитического или численного расчета резко возрастает при учете физической или геометрической нелинейности материала. Многие исследователи, используя цифровые вычислительные комплексы, стараются решать нелинейные задачи теории вязкоупругости в строгой корректной постановке, максимально точно описывая топологию конструкции и приближая расчетную схему к реальной работе.

Разработанные в последнее время расчетные комплексы, основанные на МКЭ, в частности, ABAQUS, ANSYS, LS-DYNA, Nastran, Plaxis, ПК ЛИРА предлагают использовать готовые модули для проведения вычислительных экспериментов (моделирования). Но есть некоторые проблемы, в частности, в вышеперечисленных комплексах используются модели, которые разработаны изначально для конкретных материалов, что вынуждает исследователей дописывать, или корректировать подпрограммы для других материалов, в частности, для полимеров и композитов на их основе.

Современное развитие промышленности полимерных материалов строительного назначения и как следствие реология полимеров нашло свое место как самостоятельная, в теоретическом отношении область знаний, что повлекло за собой формирование основных взаимосвязанных между собой направлений исследований, имеющих свои методы и приложения, свой ареал адептов, в частности:

- прикладная реология, вектор исследований которой направлен на решение инженерных задач с последующей оценкой поведения реологически сложных материалов в условиях различных геометрических схем деформирования, а с другой стороны, с аффилиацией полимерных материалов, основываясь на характеристиках их реологических свойств;
- теоретическая реология как раздел строительной механики с широким диапазоном исследования принципов деформации материалов («ползучесть сложных сред» при наложении больших обратимых деформаций на необратимые.

Исходя из вышеизложенного, вопрос развития методов расчета и прогнозирования прочности и устойчивости конструкционных элементов из

полимеров и композитов на их основе (полимербетонных, дощатоклееных балок и других) с учетом физической и геометрической нелинейности, реологических свойств материала, можно отнести к одному из приоритетных направлений в строительной механике и механике полимеров.

### **Степень разработанности проблемы**

Исследования в направлении прочности и устойчивости стержней и пластин в нелинейной постановке проводятся еще с начала прошлого века А.Г. Greenhill, М.Хейм, Ф.С. Ясинским, Н. Engelhardt, М. Levy, G.H. Halphen, G. H. Bryan, С.П. Тимошенко и др. Несмотря на это до сих пор многие аспекты этого вопроса остаются малоизученными. К примеру, расчет на устойчивость с учетом ползучести пластин и стержней переменной геометрии, учет непрерывной неоднородности упругих и реологических свойств рассматриваемого конструкционного материала.

Вопросам расчета пластин и стержней на выпучивание с учетом реологии материала посвятили свои работы такие ученые, как С.П. Тимошенко, В.В. Петров, Н.А. Алфутов, А.С. Вольмир, В.З. Власов, А.Р. Ржаницын, Ю.Н. Работнов, В.И. Травуш, Л.С. Ляхович, Л.М. Качанов, А.Л. Рабинович, В.Л. Бажанов, И.И. Гольденблат, О. Зенкевич, О.К. Морачковский, Н.И. Карпенко, А.А. Трещев, Ю.В. Немировский, А.П. Янковский, В.И. Андреев, Р.А. Турусов, А.Г. Тамразян, Г.Г. Кашеварова и др. Общую теорию ползучести, применительно к стержневым элементам и пластинкам развивали Ю.Н. Работнов, В.Н. Сидоров, П.А. Акимов, Л.М. Качанов, А.Р. Ржаницын, Н.Х. Арутюнян, Н. И. Безухов, Н. Н. Малинин, В.Д. Харлаб и др.

Задачам расчета напряжено-деформированного состояния (далее — НДС) и устойчивости полимерных стержней, пластин и оболочек с учетом ползучести, посвящены работы А.А. Аскадского, В.И. Андреева, И.И. Гольденבלата, Р.А. Турусова, А.Я. Гольдмана, А.Л. Рабиновича, А.Я. Малкина, С.А. Тимашева, В. И. Климанова, Б.М. Языева, А.С. Чепурненко, и др.

Многие авторы практически не рассматривали нелинейную ползучесть, помимо этого, большая часть нелинейных реологических моделей относится к одноосному напряженному состоянию, что автоматически создает непреодолимое препятствие в применении их моделей для расчета тонкостенных конструкций, конкретно пластин или оболочек.

С одной стороны, оптимальный выбор наиболее приемлемого уравнения состояния для рассматриваемого материала элемента конструкции — решение всех конкретных проблем и в конечном счете — дело вычислительной техники, но это не совсем обоснованно и ложное предположение. Возникают другие принципиальные проблемы, непосредственно относящиеся к реологии: проблема граничных условий и проблема устойчивости вычислительного процесса.

Например, представленные проф. А.А. Аскадским и проф. А.Я. Малкиным решения самых разнообразных уравнений состояния с различными ядрами и резольвентами, различного строения материала, показали, что использование численных методов решения далеко не всегда дает надежные результаты. Этот принципиально важный аспект выбора и формулировки уравнений связи требует наложения строгих ограничений на возможность применения тех или иных подходов для решения прикладных инженерных задач.

Необходимо отметить немаловажный фактор, заключающийся в том, что в современных пакетах, использующих МКЭ, заложен ограниченный набор реологических моделей, которые позволяют учитывать ползучесть при расчетах. Эти модели либо ориентированы на какой-то конкретный материал, либо отсутствует вовсе возможность учета ползучести, что ограничивает исследователей в полноценном использовании расчетного комплекса.

### **Научно-техническая гипотеза**

Гипотеза заключается в разработке методологии научного подхода в расчетах на устойчивость, описывающего механическое поведение полимерных стержней и пластин строительного назначения, отличительной характеристикой которых является наличие у них большой доли обратимых высокоэластических деформаций, не совпадающих по фазе с напряжениями, что обуславливает большую, чем у металлов и бетона зависимость физико-механических характеристик от скорости деформации, температуры и длительности воздействия нагрузок, как следствие, относительно большую возможность «холодной» ползучести и несоизмеримо большую роль релаксационных процессов.

Характерной особенностью для деформаций ползучести (высокоэластических деформаций) является наличие спектра времен релаксации, который необходимо учитывать в расчетах на устойчивость и прочность.

### **Цель исследования**

Заключается в разработке научных основ моделирования процессов выпучивания полимерных стержней, арок и пластин строительного назначения и совершенствование методов расчета на устойчивость при термосиловых воздействиях с учетом нелинейной ползучести, переменной жесткости и неоднородности материала.

### **Задачи исследования**

Согласно намеченной цели были сформулированы и поставлены следующие задачи:

1. Обобщить существующие теоретические и экспериментальные исследования и провести анализ состояния проблемы, сформулировать базовые положения теории эволюционного моделирования применительно к решению задач устойчивости стержней, арок и пластин, включая общую постановку задач.
2. Выполнить экспериментальную оценку определив реологические параметры полимеров строительного назначения из испытаний на сдвиг в условиях ползучести, на изгиб с использованием методов нелинейной оптимизации и разработать соответствующую методiku их определения, с последующей эмпирической верификацией.
3. Разработать численно-аналитический аппарат оценки устойчивого равновесия стержней с учетом выявленных особенностей в их действительной работе, в частности, переменной жесткости, собственного веса и деформаций ползучести с учетом спектра времен релаксации.
4. Предложить инженерные методы расчета на изгибно-крутильную потерю устойчивости вязкоупругих призматических балок переменной жесткости и выполнить сравнительную оценку; создать компьютерные программы, реализующие расчётный аппарат предложенных методов.

5. Разработать методику расчета арочных конструкций и моделирования деформаций с учетом реологических особенностей дерева и бетона для оценки их работоспособности при длительных воздействиях.

6. Получить универсальные разрешающие уравнения изгиба и устойчивости круглых гибких пластинок, а также устойчивости нелинейно вязкоупругих прямоугольных пластин, находящихся под действием усилий в срединной плоскости, с учетом геометрической нелинейности, провести численные исследования при решении задач устойчивости пластин в условиях нелинейной ползучести и дать оценку влияния ослаблений в виде отверстий на величину критического времени и критической силы.

7. Провести численную и эмпирическую верификацию предложенных моделей путем сопоставления результатов расчетов на устойчивость с данными, полученными при анализе деформаций объектов в сертифицированных программных комплексах и с данными проведенных экспериментов на устойчивость термопластичных стержней при ползучести.

### **Объект исследования**

Объектом исследования являются призматические стержни, балки, арки и тонкие пластины переменной жесткости и неоднородной структуры из бетона, дерева и полимеров конструкционного назначения.

### **Предмет исследования**

Адаптированные методы, математическое моделирование для конструкций и их элементов, эксплуатируемых в нормальных условиях, и конструктивных систем, имеющих риск потери устойчивости, а также влияния вязкоупругих характеристик и спектра времен релаксации на критическую силу и критическое время.

### **Область исследований**

В соответствии с паспортом специальности ВАК 2.1.9. Строительная механика включает следующие области исследований:

- п. 2: «Линейная и нелинейная механика конструкций, зданий и сооружений, разработка физико-математических моделей их расчета»;
- п. 3: «Аналитические методы расчета зданий, сооружений и их элементов на прочность, жесткость, устойчивость, при статических, динамических, температурных нагрузках и других воздействиях»;
- п. 11: «Экспериментальные методы исследования зданий, сооружений и их элементов».

### **Методы исследования**

В работе применен системный подход, позволяющий раскрыть многообразие проявлений изучаемого объекта в целостности и единстве; для анализа вопросов устойчивости стержней и пластин выполнено моделирование с применением математического аппарата теории упругости и вязкоупругости. Использовалось моделирование на основе известных численных методов, в частности, конечных элементов, метода сеток, энергетического метода с применением форм Ритца-Тимошенко, Бубнова-Галеркина, Ньютона-Рафсона.

Все вычисления проведены на базе современных ПЭВМ с применением математического пакета MatLab. Выполнялось сравнение результатов в упругой

постановке с решением в программных вычислительных комплексах (ПК Лира САПР, ANSYS).

### **Научная новизна**

1. Предложен алгоритм определения реологических параметров термопластичного материала с использованием методов нелинейной оптимизации.
2. Предложен численно-аналитический метод для реализации решения и анализа задач устойчивости стержней и полос переменной жесткости по длине при поперечном и продольном нагружении с учетом собственного веса.
3. Разработан и реализован на ЭВМ алгоритм определения критической нагрузки при боковом выпучивании с учетом ползучести энергетическим методом с использованием форм Бубнова-Галеркина, Ритца-Гимошенко и методом конечных элементов (далее — МКЭ) для балок постоянного и переменного сечения.
4. Получены разрешающие уравнения и разработан итерационный алгоритм определения напряжённо-деформированного состояния, а также анализа устойчивости деревянных и железобетонных арок с учетом одновременно геометрической и физической нелинейности, что позволило расширить границы применимости полученных результатов.
5. При квазистатическом процессе расчета проведена модернизация и усовершенствован алгоритм определения деформаций ползучести с введением новой величины длительной критической силы для полимерных стержней и пластин. Разработан универсальный, подходящий для произвольных уравнений состояния, численный алгоритм расчета устойчивости полимерных стержней и пластин на основе МКЭ с учетом физической и геометрической нелинейности.
6. Создана математическая модель для эффективного расчета полимерных стержней и пластин конструкционного назначения на термосиловое воздействие с учетом функциональной зависимости физико-механических характеристик материала, геометрической и физической нелинейности, а также учет двух и более составляющих спектра времен релаксации материала.
7. Предложен новый критерий для определения критического времени, основанный на полученных графических зависимостях, в частности, локального минимума при изменении во времени нормальных напряжений.
8. Представлены предложения по дальнейшему совершенствованию используемых методов расчета на устойчивость элементов конструкций из полимера путем введения интегральных величин, определяющих часть деформаций ползучести, и их учета в разрешающих уравнениях для анализа полученных результатов.

### **Теоретическая значимость**

Теоретическая значимость работы состоит в развитии методов расчета на НДС и устойчивость термопластичных призматических стержней и пластин с учетом нелинейной ползучести при термосиловом воздействии, а также с учетом косвенной неоднородности. Доказано, что полученные системы разрешающих уравнений для полимерных стержней и пластин, позволяют решать широкий круг задач данного раздела строительной механики и механики полимеров.

Разработанные алгоритмы при незначительной модификации могут быть применены к другим, не рассмотренным в диссертации объектам, например, оболочкам.

Предложенные модели имеют следующие достоинства:

1. Позволяют для термопластичных стержней, испытывающих действие продольной силы в условиях ползучести, определить величину длительной критической нагрузки, превышение которой приводит к потере устойчивости с течением времени.
2. Способствует выявлению и исследованию явления перераспределения напряжений и внутренних усилий в ортотропных пластинках при ползучести.
3. Позволяют провести оценку погрешности теории стержней и пластин из полимера применительно к задачам ползучести на основе конечно-элементного моделирования.

### **Практическая значимость**

1. Разработан и представлен алгоритм и программное обеспечение для обработки кривых ползучести и релаксации на основе уравнения состояния полимера. На примере вторичного поливинилхлорида, пенополиуретана, эпоксидного связующего, полипропилена доказано высокое качество аппроксимации экспериментальных кривых.
2. Разработан и внедрен пакет прикладных программ в среде MATLAB для расчета на ползучесть пластин и стержней различной формы при использовании произвольного закона уравнения состояния (интегральной или дифференциальной формы).
3. Рекомендован новый подход к использованию энергетического метода, заключающимся в том, что, уравнение упругой линии и форма стержня задается в виде полинома, содержащего неопределенные коэффициенты и неопределенные показатели степени. Предложенный подход позволил определить точные значения критической нагрузки при особом изменении поперечного сечения стержня и с учетом его собственного веса. Предложены расчетные формулы для определения критической силы и напряжения.
4. На основе анализа полученных решений в процессе ползучести, обоснована и введена новая величина длительной цилиндрической жесткости, и длительный коэффициент Пуассона. Данное утверждение дает возможность с использованием известных методов решения упругих задач определять перемещения и напряжения в конце процесса ползучести.

### **Достоверность результатов**

Степень достоверности результатов работы подтверждается использованием фундаментальных теоретических положений строительной механики, апробированных методов теории расчета деревянных, железобетонных и полимерных конструкций или их элементов, изложенных в нормативной литературе.

Обоснованность полученных результатов подтверждается достаточным объемом теоретических и экспериментальных исследований, проведенных на сертифицированном и поверенном оборудовании, использованием фундаментальных законов механики сплошной среды в упругой и вязкоупругой постановках, сравнением результатов с решениями в существующих программных комплексах.

### **Положения, выносимые на защиту**

На защиту выносятся:

1) Базовые теоретические положения для адаптации разработанных алгоритмов к решению задач устойчивости полимерных стержней и пластин конструкционного назначения, деревянных и железобетонных арок.

2) Методика обработки кривых ползучести и релаксации и получение на их основе значений реологических параметров для уравнения связи.

3) Численно-аналитическое представление и методы решения задач устойчивости для стержней и пластин с учетом реологии материала в физически и геометрически нелинейной постановках.

4) Методика определения длительных критических нагрузок для сжатых стержней из материалов, реологическое поведение которых можно описать обобщенным уравнением состояния Максвелла-Гуревича и Максвелла-Томсона с учетом дискретного спектра времен релаксации.

5) Разрешающие уравнения, алгоритмы расчета и результаты теоретического исследования изгибно-крутильной формы потери устойчивости вязкоупругих стержней переменной жесткости.

6) Алгоритм конечно-элементного моделирования прочности и устойчивости полимерных пластин и железобетонных арок при ползучести с учетом геометрической нелинейности.

7) Сравнительные результаты решений, полученных на основе классических методов и алгоритмов расчета на устойчивость, а также сравнение их с результатами экспериментальных исследований на устойчивость полимерных стержней.

**Личный вклад автора** состоит в:

1. Формулировке научной проблемы и основных теоретических положений для адаптации эвристических алгоритмов к решению задач устойчивости стержней и пластин;

2. Разработке методологии нахождения реологических параметров методом нелинейной оптимизации с использованием адаптированных генетических алгоритмов, включающих стратегии ускорения выхода в область допустимых решений и повышения сходимости итерационного процесса;

3. В развитии и расширении области использования модели для решения задач НДС и устойчивости полимеров конструкционного назначения, деревянных балок и железобетонных и деревянных арок в условиях ползучести;

4. Получении всех разрешающих уравнений для решения новых классов задач устойчивости стержней, балок и пластин с учетом реологии материала, разработке методов численного и аналитического решения и анализа поставленных задач.

**Апробация работы**

Основные результаты исследований, выполненные автором в рамках настоящей диссертационной работы, доложены на различных международных научно-практических конференциях:

1. Международная научно-техническая конференция «Строительство и Архитектура: Теория и практика инновационного развития» CATPID-2017,2018, 2021, 2022 (г. Нальчик); CATPID-2019 (г. Кисловодск).

2. International scientific conference "INTEGRATION, PARTNERSHIP AND INNOVATIONS IN CONSTRUCTION SCIENCE AND EDUCATION", MGSU, 12-14 November 2014.

3. XXVII Российско-Польско-Словацкий семинар «Теоретические основы строительства» (XXVII R-S-P Seminar «Theoretical Foundation of Civil Engineering»), организуемый ежегодно при участии НИУ МГСУ. (Ростов-на-Дону), 2018 г.

4. XXVIII Российско-Польско-Словацкий семинар «Теоретические основы строительства» (XXVIII R-S-P Seminar «Theoretical Foundation of Civil Engineering»), организуемый ежегодно при участии НИУ МГСУ (Жилина, Словакия), 2019 г.

5. Международная научно-техническая конференция ICMTMTE 2017,2018,2019 (г. Севастополь).

6. Международная научно-техническая конференция «Пром-Инжиниринг — 2016» (г. Челябинск).

7. Международная научно-техническая конференция SPbWOSCE - 2016 «Smart City» (г. Санкт-Петербург).

8. 15-й международной научной конференции «Underground Urbanisation as a Prerequisite for Sustainable Development» (г. Санкт-Петербург, 2016).

9. Международной научно-практической конференции, посвященной 95-летию ФГБОУ ВПО «ГГНТУ им. акад. М. Д. Миллионщикова (г. Грозный, 2015).

10. I Всероссийской многопрофильной научно-практической конференции молодых ученых опорных университетов России (г. Ростов-на-Дону, 2017).

11. Научно-практической конференции «Строительство и архитектура — 2017-18» (г. Ростов-на-Дону).

12. Семинарах кафедры «Сопrotивление материалов» и «Техническая механика» Ростовского государственного строительного университета (г. Ростов-на-Дону, 2015, 2016).

13. Семинарах кафедры «Сопrotивление материалов» и «Техническая механика» Донского государственного технического университета (г. Ростов-на-Дону, 2020-2022).

14. XIV Международной научно-практической конференции «Новые полимерные композиционные материалы. Микитаевские чтения» (г. Нальчик, 2018); XV Международной научно-практической конференции «Новые полимерные композиционные материалы. Микитаевские чтения» (г. Нальчик, 2019), XVI Международной научно-практической конференции «Новые полимерные композиционные материалы. Микитаевские чтения» Online (г. Нальчик, 2020).

Под руководством С. Б. Языева успешно защищены 2 кандидатские диссертации (Муханов А.В., Козельский Ю.Ф.) и две работы представлены к защите.

По результатам диссертационной работы автору в составе авторского коллектива присуждена серебряная медаль РААСН в 2020 году (выписка из протокола президиума РААСН №5 от 20.03.2020).

Работа выполнена в целевой докторантуре ДГТУ под научным консультированием академика РААСН, д.т.н., профессора, профессора кафедры «Сопrotивление материалов» НИУ МГСУ В.И. Андреева.

### **Внедрение результатов исследования**

В виде пакета прикладных программ основные результаты научного исследования внедрены в ООО «Научно-исследовательский центр «НИКА» (г. Казань), ООО «СевкавНИПИагропром» (г. Ростов-на-Дону), практику проектирования группы компаний АКССстрой (г. Аксай), а также в образовательный процесс в

Донском государственном техническом университете при подготовке аспирантов по направлению 2.1.9. Строительная механика.

### Публикации

Основные положения диссертационной работы опубликованы в 54 печатных работах, из них 23 работы в ведущих рецензируемых научных изданиях, определенных ВАК РФ, 31 статья — в изданиях, входящих в наукометрические базы данных Web of Science и Scopus, 4 монографии. Получены 4 авторских свидетельства на программы для ЭВМ, 1 патент.

### Структура и объем работы

Диссертационная работа состоит из введения, шести глав, заключения, приложения, списка литературы. Работа изложена на 321 страницах машинописного текста, включающего 199 рисунка, 33 таблицы и 2 приложения.

## ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обоснована актуальность проблемы и выбранного направления исследования, сформулированы цели и задачи, а также основные положения диссертационной работы.

В **главе 1** приводятся основные теории ползучести конструкционных реономных материалов, уравнения механики сплошной среды, необходимые для решения задач определения НДС и устойчивости.

Подробно описаны параметры обобщенного нелинейного уравнения состояния, понятия о дискретном времени времен релаксации при одноосном и плоском напряженном состоянии.

Во **второй главе** рассматривается устойчивость стержней в упругой и вязкоупругой постановках. В разделе 2.1 приводится численно-аналитический расчет продольного изгиба призматических упругих стержней с учетом собственного веса при действии осевой нагрузки.

Приведенное однородное разрешающее дифференциальное уравнение четвертого порядка с переменными коэффициентами относительно прогиба в безразмерном виде рассматривается в общем вид:

$$\frac{d^4 v(\xi)}{d\xi^4} + \alpha^2 \frac{d^2 v(\xi)}{d\xi^2} + \beta^3 \left[ \frac{dv(\xi)}{d\xi} + \xi \frac{d^2 v(\xi)}{d\xi^2} \right] = 0. \quad (2.1)$$

Здесь

$$\alpha^2 = Fl^2/(EI_z); \quad \beta^3 = ql^3/(EI_z). \quad (2.2)$$

Решение предлагается искать в виде степенного ряда

$$v(\xi) = \sum_{k=0}^n A_k \xi^k. \quad (2.3)$$

Приводится доказательство сходимости ряда и последовательность численно-аналитической реализации метода для модельных задач с различными схемами закрепления (рис.2.1). В результате решения модельных задач определена область устойчивости стержней и полос при одновременном действии двух силовых факторов (рис.2.2–рис.2.3). Получены расчетные формулы. Определены пределы применимости этих формул.

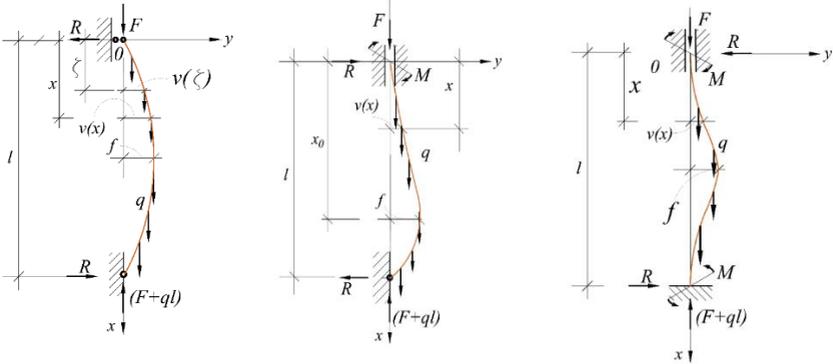


Рис.2.1. Некоторые расчетные схемы для модельных задач устойчивости стержней

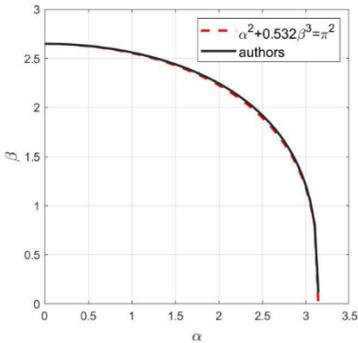


Рис. 2.2. Область устойчивости стержня, шарнирно закрепленного на концах

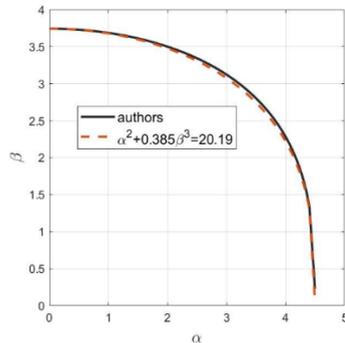


Рис. 2.3. Область устойчивости для стержня, верхний конец которого шарнирно подвижен, а нижний — жесткая заделка

Для сравнения результатов приведены также численные решения для приведенных схем. При исследовании устойчивости консольных стержней переменного поперечного сечения найден новый подход к использованию энергетического метода.

Момент инерции и интенсивность распределенной нагрузки (собственный вес) представлены в виде изменения по степенному закону:

$$I_z(x) = a_1 x^m; \quad q(t) = a_2 t^n. \quad (2.4)$$

Здесь  $a_1, a_2, m > 0, n > 0$  — некоторые константы.

Критическая длина и критическое значение внешней нагрузки определяется из условия равенства потенциальной энергии и работы собственного веса стержня:

$$\int_0^l \frac{1}{2a_1 E x^m} \left( \int_0^t \frac{a_2}{(n+1)} t^{n+1} \frac{dv(t)}{dt} dt \right)^2 dx = \int_0^l \frac{a_2}{2(n+1)} x^{n+1} \left( \frac{dv}{dx} \right)^2 dx. \quad (2.5)$$

В качестве уравнения изогнутой оси стержня принимается соотношение, включающее не только неопределенные коэффициенты, но и неопределенные показатели степеней.

$$v(x) = \frac{k \cdot f}{(k-1)l^k} \left( l^{k-1}x - \frac{x^k}{k} \right), \text{ где } f \text{ — макс. знач. прогиба.} \quad (2.6)$$

Энергетический метод позволил определить точные значения критической нагрузки при переменной изгибной жесткости стержня и с учетом его собственного веса. В диссертации приведены решения модельных задач вышеуказанным методом. Получены расчетные формулы. Определены пределы применимости этих формул.

В разделе 2.3 приводится вывод разрешающих уравнений для стержня с учетом реологических свойств материала и переменной жесткости при термосиловом нагружении.

При выводе разрешающих уравнений использовался подход, основанный на учете начальных несовершенств. Рассматривается шарнирно опертый по концам стержень, сжимаемый силой  $F$ , и имеющий начальную погибь в плоскости наименьшей жесткости  $v_0 = f(x)$  (рис.2.4)

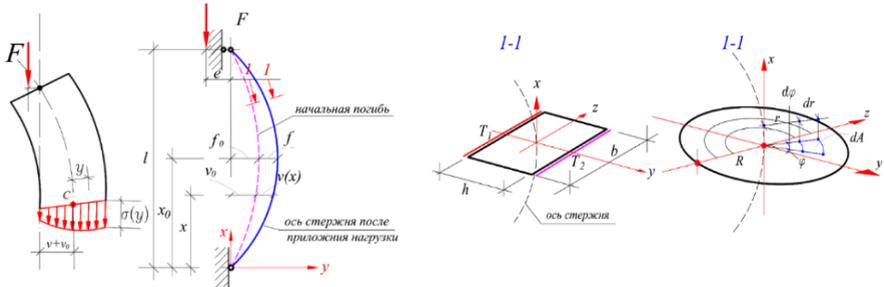


Рис.2.4 — Расчетная схема задачи при варианте закрепления «шарнир-шарнир»

В общем виде физико-механические параметры материала являются функциями температуры, а, следовательно, координат и времени. В основу расчета положено нелинейное обобщенное уравнение связи Максвелла-Гуревича. Предполагая, что в стержне осуществляется одноосное напряженное состояние (без учета влияния перерезывающих сил), и, взяв упомянутое уравнение для одного члена спектра времен релаксации, имеем:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{1}{E} \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{\sigma - E_{\infty} \varepsilon^*}{\eta_0^*} \exp\left(\frac{|\sigma - E_{\infty} \varepsilon^*|}{m^*}\right). \quad (2.7)$$

Здесь  $\sigma$  и  $\varepsilon$  напряжение и полная деформация вдоль оси стержня;  $\varepsilon^*$  — высокоэластическая составляющая деформации;  $E$  — модуль Гука;  $E_{\infty}$  — модуль высокоэластичности;  $m^*$  — модуль скорости;  $\eta_0^*$  — так называемый коэффициент начальной релаксационной вязкости. Для любого сечения стержня могут быть записаны интегральные условия

$$F = - \int_A \sigma dA; \quad M_0 + Fv(x, t) = - \int_A \sigma y dA. \quad (2.8)$$

Так как рассматриваемые деформации малы, с геометрической стороны задачи, можно записать полную деформацию в виде:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} y; \quad \varepsilon_0 = \varepsilon_0(t) \text{ — осевая деформация.} \quad (2.9)$$

Для определения для пяти неизвестных  $f^*$ ,  $\sigma$ ,  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon_0$  и  $v$ , академик В.И. Андреев свел к двум разрешающим уравнениям относительно двух функций  $f^*$  и  $v$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_x^*}{\partial t} = & -\frac{E + E_{\infty}}{\eta_0^*} f_x^* e^{\frac{|f_x^*|}{m^*}} + \frac{E}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{f_x^*}{\eta_0^*} e^{\frac{|f_x^*|}{m^*}} dy + \\ & + \frac{Eb}{I} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{f_x^*}{\eta_0^*} e^{\frac{|f_x^*|}{m^*}} y dy + y \frac{F}{I} \frac{\partial v}{\partial t}; \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial^3 v}{\partial v^2 \partial t} + \frac{F}{EI} \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{b}{I} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{f_x^*}{\eta_0^*} e^{\frac{|f_x^*|}{m^*}} y dy. \quad (2.11)$$

Нами получено разрешающее уравнение, подходящее для любого уравнения связи (состояния) при произвольных граничных условиях в дифференциальной форме:

$$\frac{d^4 v}{dx^4} + F \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{v}{E(x)I(x)} \right) = -\frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{M_0 + M^*}{E(x)I(x)} \right), \quad (2.12)$$

где  $M_0 = Fv_0$ , если стержень имеет начальную погибь;  $M_0 = Fe$ , если сила приложена с эксцентриситетом  $e$ ;  $M^* = E \int_A \varepsilon^* y dA$ .

Для определения скорости деформации ползучести в каждый момент времени можно использовать правую линейную конечно-разностную аппроксимацию по времени (по Эйлеру):

$$\frac{\partial \varepsilon^*}{\partial t} \approx \frac{\varepsilon_{t+\Delta t}^* - \varepsilon_t^*}{\Delta t} \Rightarrow \varepsilon_{t+\Delta t}^* = \varepsilon_t^* + \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial t} \Delta t. \quad (2.13)$$

Такой прием является малоэффективным. Для получения приемлемых результатов требуется достаточно густая сетка по времени. Его использовали в своих работах академик РААСН В.И. Андреев, проф. Турусов Р.А. Поэтому вместо линейной аппроксимации производной предлагается использовать метод Рунге-Кутты четвертого порядка. Так как потеря устойчивости сопровождается резким ростом не только прогиба, но и напряжений, метод Рунге-Кутта при том же шаге по времени позволяет более точно поймать этот момент.

Без учета ползучести задачи при любых граничных условиях, сводятся к системе линейных алгебраических уравнений формы:

$$([A] + F[B])\{X\} = \{C\} \quad \text{или} \quad ([B]^{-1}[A] + F[E])\{X\} = [B]^{-1}\{C\}. \quad (2.14)$$

Приравняв к нулю определитель системы, определяется мгновенная критическая сила:

$$\det([B]^{-1}[A] + F[E]) = 0. \quad (2.15)$$

Минимальное по абсолютной величине собственное значение матрицы  $[B]^{-1}[A]$  будет соответствовать первой критической силе.

Многие авторы при анализе устойчивости в условиях линейной ползучести вводят понятия длительной критической силы  $F_d$ . Для определения  $F_d$  из уравнения состояния Максвелла-Гуревича был выполнен анализ данного уравнения при

$t \rightarrow \infty$ . В результате была получена связь между деформациями и напряжениями в конце процесса ползучести при условии, что рост прогиба затухает:

$$\varepsilon = \sigma \left( \frac{1}{E} + \frac{1}{E_{\infty 1}} + \frac{1}{E_{\infty 2}} + \dots \right) = \sigma \left( \frac{1}{E} + \sum_{s=1}^n \frac{1}{E_{\infty s}} \right). \quad (2.16)$$

Была введена величина длительного модуля  $H$ , определяемую по формуле:

$$\frac{1}{H} = \frac{1}{E} + \sum_{s=1}^n \frac{1}{E_{\infty s}}. \quad (2.17)$$

Уравнение (2.12) при  $t \rightarrow \infty$  (шарнирное опирание) переписывается в виде:

$$H(x)I(x) \frac{d^2 v}{dx^2} + Fv = -M_0. \quad (2.18)$$

Полученное уравнение отличается от уравнения продольного изгиба упругого стержня, имеющего начальную погибь, только тем, что в нем вместо мгновенного модуля упругости  $E(x)$  стоит величина  $H(x)$ .

Таким образом, задача определения длительной критической нагрузки сводится к упругой путем замены мгновенного модуля на длительный. Для стержня постоянной жесткости:  $F_{\text{дл}} = \pi^2 HI / l_0^2$ .

Приведем решение модельной задачи для полимерного стержня с постоянным призматическим сечением (рис.2.5).

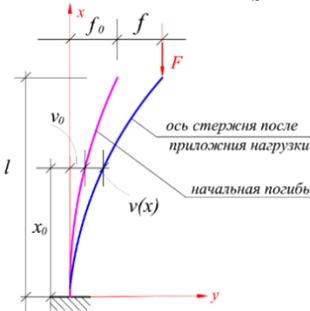


Рис. 2.5. Расчётная схема задачи при закреплении «заделка-свободный край»

Размеры сечения  $b = 15$  мм,  $h = 8$  мм. Сила приложена с эксцентриситетом  $e = 0.16$  мм. Действующая нагрузка  $F = 0.165$  кН. Эйлера сила и длительная сила для рассматриваемой задачи:

$$F_3 = \frac{4\pi^2 EI}{l^2} = 0.189 \text{ кН};$$

$$F_d = (HF_3)/E = 0.0976 \text{ кН}.$$

График роста стрелы прогиба в зависимости от  $x$  и  $t$  представлен на рис.2.6.

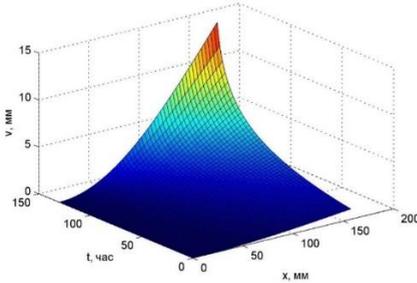


Рис. 2.6. Рост прогиба при  $F = 0.165$  кН

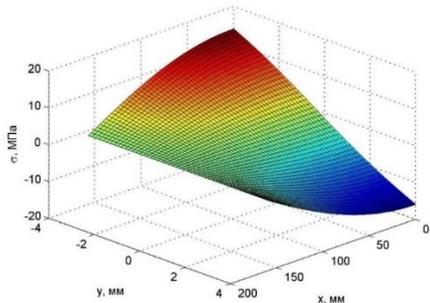


Рис. 2.7. Изменение напряжений в зависимости от  $x$  и  $y$  при  $t = 130$  ч

Стержень теряет устойчивость через 130 ч. На рис.2.7 представлен график изменения напряжений в зависимости от  $x$  и  $y$  при  $t = 130$  ч.

В разделе 2.3.2 приводится вывод основных уравнений МКЭ расчета стержней на устойчивость с учетом деформаций ползучести и методика расчета. Рассматривается стержень, имеющий начальную погиб в плоскости наименьшей жёсткости  $v_0 = f(x)$ , который сжимается силой  $F$  (рис.2.5).

С учетом соотношения (2.19) для упругой деформации  $\varepsilon^{el}$ :

$$\varepsilon^{el} = \varepsilon_0 - \overbrace{\frac{d^2v}{dx^2}}^{\varepsilon} y - \varepsilon_T - \varepsilon^* \quad (2.19)$$

выражение для потенциальной энергии деформация и работы внешних сил будет:

$$\begin{aligned} \Pi = \frac{1}{2} \int_0^l E(x) \left\{ I(x) \left( \frac{d^2v}{dx^2} \right)^2 + \varepsilon_0^2 A + \varepsilon_T^2 A + \int_A (\varepsilon^*)^2 dA + 2(\varepsilon_T - \varepsilon_0) \cdot \right. \\ \left. \int_A \varepsilon^* dA + 2 \frac{d^2v}{dx^2} \left[ \int_A \varepsilon^* y dA + (\varepsilon_T - \varepsilon_0) \int_A y dA \right] - 2\varepsilon_T \varepsilon_0 A \right\} dx; \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$A = \frac{1}{2} F \int_0^l \left\{ \left( \frac{dv}{dx} \right)^2 + 2 \frac{dv}{dx} \frac{dv_0}{dx} \right\} dx. \quad (2.21)$$

Минимизируя полную энергию  $\mathcal{E} = \Pi - A$  по узловым перемещениям, имеем:

$$[K] \cdot \{U\} = \{F\}, \quad \text{где } [K] = \sum_{e=1}^m [K]^{(e)};$$

$[K]$  — глобальная матрица жёсткости, представляющая собой сумму локальных матриц жёсткости.

В разделе 2.4 представлены численно-аналитические методы решения задач устойчивости вязкоупругих стержней. Метод Ритца-Тимошенко и Бубнова-Галеркина. При решении задачи методом Ритца-Тимошенко предполагаемая форма потери устойчивости принималась в виде суммы функций с неопределенными коэффициентами  $a_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ):

$$v(x) = \sum_{i=1}^n a_i f_i. \quad (2.22)$$

Функции формы  $f_i$  для рассматриваемых в диссертации вариантов закрепления приведены в табл. 2.1.

Сравнение величины стрелы прогиба в различные моменты времени представлено в табл. 2.2. При решении методом Ритца—Тимошенко число членов ряда  $n$  принималось равным 4. Количество интервалов по  $x$  и  $y$  — 50.

Табл. 2.1. Функции формы для различных вариантов закрепления

Функция формы	Вариант закрепления			
	Шарнир-шарнир	Защемление-защемление	Защемление-шарнир	Защемление-свободный край
$f_i$	$\sin(\pi x_i/l)$	$\sin^2(\pi x_i/l)$	$x^{i+1}(l-x)$	$1 - \cos(\pi x_i/2l)$

Табл. 2.2. Сравнение прогибов стержня, полученных по методу Ритца и МКР

t, час		20	40	60	80	100	120	130
f, мм	метод Ритца	1.5425	2.1131	2.8719	3.9430	5.6411	9.2379	14.930
	МКР	1.5439	2.1151	2.8747	3.9472	5.6480	9.2533	14.989

Из представленной таблицы видно, что результаты совпадают, что свидетельствует о их достоверности, а также о достоверности разработанной автором методики расчета.

Континуальный метод Бубнова-Галеркина часто используется в сочетании с методом конечных элементов, при этом функции формы применяются в качестве базисных функций.

$$v(x) = N_i \cdot V_i + N_j \cdot V_j = [N_i \quad N_j] \cdot \{V_i \quad V_j\}^T = [N]\{V\}. \quad (2.23)$$

Применение метода Бубнова-Галеркина к уравнению (2.12) приводит к условию:

$$\begin{aligned} & \int_0^l [N]^T \left( \frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{F}{E(x)I(x)} v = -\frac{M_0}{E(x)I(x)} + \frac{b}{I(x)} \int_{-h/2}^{h/2} \varepsilon^* y dy \right) dx = \\ & = \sum_{e=1}^m \int_{L^{(e)}} [N^{(e)}]^T \left( \frac{d^2 v^{(e)}}{dx^2} + \frac{F}{E(x)I(x)} v^{(e)} + \frac{M_0^{(e)}}{E(x)I(x)} - \frac{1}{I(x)} \int_{A^{(e)}} \varepsilon^* y dA \right) dx. \end{aligned} \quad (2.24)$$

*Примечание:* уравнения (2.12) для шарнирного опирание будет иметь 2-й порядок.

Для понижения порядка производной в первом слагаемом выражения (2.24), используем интегрирование по частям:

$$\int_{L^{(e)}} [N^{(e)}]^T \frac{d^2 v^{(e)}}{dx^2} dx = [N^{(e)}]^T \frac{dv^{(e)}}{dx} \Big|_0^{L^{(e)}} - \int_{L^{(e)}} \frac{d[N^{(e)}]^T}{dx} \frac{dv}{dx} dx \quad (2.25)$$

Так как в выражении (2.25) отношение  $dv/dx$  представляет собой угол поворота сечения балки, и рассматривается закрепление балки «шарнир» — «шарнир», то сумма всех элементов первого члена по длине балки будет равна нулю, т. е.:

$$\sum_{e=1}^m \left( [N^{(e)}]^T \frac{dv^{(e)}}{dx} \Big|_0^{L^{(e)}} \right) = 0.$$

Рассмотрим случай, когда стержень имеет начальное искривление

$$v_0(x) = f_0 \sin(\pi x/l), \text{ то } M_0 = F \cdot v_0:$$

$$\begin{aligned} \int_{L^{(e)}} [N^{(e)}]^T \left( \frac{M_0^{(e)}}{EI} \right) dx &= \frac{F \cdot f_0}{EI} \int_0^{L^{(e)}} \left[ 1 - \frac{x}{L^{(e)}} \right] \sin \frac{\pi(x + X_i)}{l} dx = \\ &= \frac{F f_0}{EI} \cdot \frac{l}{\pi} \left[ \frac{l}{\pi L^{(e)}} \left( \sin \frac{\pi X_i}{l} - \sin \frac{\pi X_j}{l} \right) + \cos \frac{\pi X_j}{l} \right]; \\ &= \frac{F f_0}{EI} \cdot \frac{l}{\pi} \left[ \frac{l}{\pi L^{(e)}} \left( \sin \frac{\pi X_j}{l} - \sin \frac{\pi X_i}{l} \right) - \cos \frac{\pi X_j}{l} \right]; \end{aligned}$$

Окончательно можно записать в виде:

$$[K]\{V\} = \{F\}, \quad (2.26)$$

где  $[K] = \sum_{e=1}^m [K]^{(e)}$  — матрица жесткости всего стержня, получаемая суммированием локальных матриц жесткости элементов.

$$[K]^{(e)} = \frac{1}{L^{(e)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \frac{FL^{(e)}}{6EI} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Если сила действует с эксцентриситетом, то вектор нагрузки записывается:

$$\{F\}^{(e)} = \frac{F \cdot e \cdot L^{(e)}}{2EI} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} - \frac{L^{(e)}}{2I} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \int_{A^{(e)}} \varepsilon^* y dA.$$

В качестве уравнения связи использовалось обобщенное уравнение состояния Максвелла-Гуревича, рассмотренное ранее.

Вычисления выполнялись для полимерного стержня из полимера сетчатой и линейной структуры (ЭДТ-10 и ППМА). В результате решения задач установлено, что в случае постоянного сечения стержня достаточно использовать один член ряда при применении численно-аналитических методов, в случае переменного сечения количество необходимых членов ряда увеличивается до 40.

Необходимо отметить преимущество метода Бубнова-Галёркина перед методом конечных элементов в случае расчёта шарнирно опёртого стержня, т. к. матрица жесткости в случае применения метода Бубнова-Галёркина имеет размерность  $2 \times 2$ , а при применении МКЭ составляет  $4 \times 4$ .

Сравнение результатов расчёта с работами доц. И.И. Кулинича и академика В.И. Андреева при начальном эксцентриситете  $e$  и, соответственно,  $M_0 = Fe$ , представлено в табл. 2.3.

Табл. 2.3. Сравнение решения автора (метод Б-Г) с результатами других авторов

у, мм	t = 50 мин			t = 100 мин			t = 150 мин		
	Метод МКЭ	Метод МКР	Метод Б-Г	Метод МКЭ	Метод МКР	Метод Б-Г	Метод МКЭ	Метод МКР	Метод Б-Г
	$\sigma_{Кул.}$ МПа	$\sigma_{Анд.}$ МПа	$\sigma_{Авт.}$ МПа	$\sigma_{Кул.}$ МПа	$\sigma_{Анд.}$ МПа	$\sigma_{Авт.}$ МПа	$\sigma_{Кул.}$ МПа	$\sigma_{Анд.}$ МПа	$\sigma_{Авт.}$ МПа
-4	16,000	16,002	15,980	19,310	19,800	19,290	34,893	31,632	34,610
-2	11,150	11,150	11,148	13,311	13,586	13,295	22,895	21,134	22,732
0	5,780	5,780	5,780	5,982	6,010	5,982	6,692	6,680	6,672
2	-0,270	-0,274	-0,278	-1,946	-2,001	-1,733	-9,396	-9,189	-9,906
4	-5,325	-5,247	-5,237	-9,860	-10,00	-9,436	-23,88	-23,80	-23,97

В разделе 2.5 рассматриваются задачи о влиянии температуры на устойчивость стержней переменной жесткости в условиях ползучести методом конечных элементов. Задавая линейный закон изменения температуры (рис.2.4) от одной грани до другой по высоте поперечного сечения и считая, что упругие характеристики, в частности модуль Юнга, меняется тоже по линейному закону, имеем:

$$T(y) = ky + T_{cp}; \quad T_{cp} = T_1 + T_2; \quad k = (T_2 - T_1)/h. \quad (2.27)$$

$$E(T) = E_0 + A \cdot T. \quad (2.28)$$

Осевые деформации определяются соотношением:

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{E_{cp}bh} \left[ F + AI \frac{T_2 - T_1}{h} \frac{d^2v}{dx^2} + b \int_{-h/2}^{h/2} E(y) \varepsilon^* dy + A\alpha l \left( \frac{T_2 - T_1}{h} \right)^2 \right]. \quad (2.29)$$

Соотношение (2.26) для потенциальной энергии не измениться, а к выражению для работы внешних сил добавиться слагаемое  $F \cdot u_1$ :

$$A = F\Delta = \frac{1}{2}F \int_0^l \left[ \left( \frac{dv}{dx} \right)^2 + 2 \frac{dv}{dx} \frac{dv_0}{dx} \right] dx + F \cdot u_1. \quad (2.30)$$

Здесь  $u_1$  — осевое перемещение.

Были решены модельные задачи, для стержня, закрепленного «шарнир» - «шарнир». из эпоксидного связующего ЭДТ-10. Геометрические параметры стержня:  $b = 15\text{ мм}$ ,  $h = 8\text{ мм}$ ,  $F = 65\text{ кг}$ .

Табл. 2.4. Начальные несовершенства и температура на границах

№	Начальные несовершенства и температура на границах			
1	$v_0(x) = f_0 \sin(\pi x/l)$	$f_0 = 0.16\text{ мм}$	$T_1 = 20^\circ\text{C}$	$T_2 = 40^\circ\text{C}$
2	$v_0(x) = f_0 \sin(\pi x/l)$	$f_0 = 0.16\text{ мм}$	$T_1 = 40^\circ\text{C}$	$T_2 = 20^\circ\text{C}$
3	$v_0(x) = 0$	$f_0 = 0\text{ мм}$	$T_1 = 20^\circ\text{C}$	$T_2 = 40^\circ\text{C}$

Результаты расчета приведены на рис.2.8 — рис.2.10.

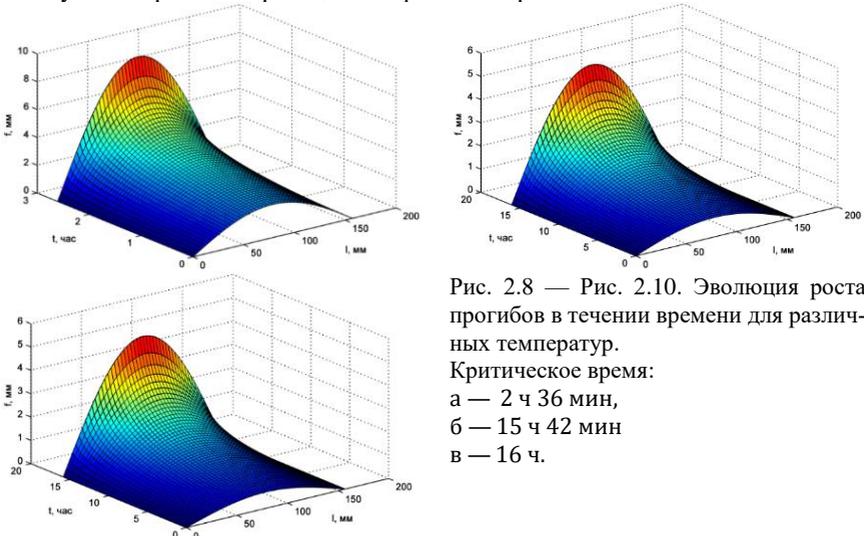


Рис. 2.8 — Рис. 2.10. Эволюция роста прогибов в течении времени для различных температур.  
Критическое время:  
а — 2 ч 36 мин,  
б — 15 ч 42 мин  
в — 16 ч.

По результатам графиков можно сделать вывод, температура оказывает существенное влияние на процесс потери устойчивости.

В завершении главы, нами проведено исследование влияния дискретности спектра времен релаксации на примере стержня из полиэтилена высокой плотности (ПВП). Данные для расчета с учетом одного и двух спектров представлены в табл. 2.5. Рассматривается стержень квадратного сечения  $1 \times 1$  см.

Длина стержня  $l = 157\text{ мм}$ , начальная погиль  $f_0 = 0.16\text{ мм}$ . На рис.2.11 представлен график роста стрелы прогиба при  $F = 50\text{ Н}$ . Штриховой линии соответствует решение с учетом одного спектра времен релаксации, сплошной линии — с учетом двух спектров времен релаксации.

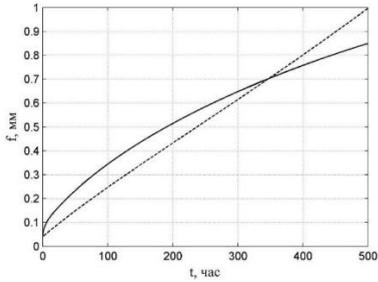


Рис. 2.11. Графики роста стрелы прогиба

Из приведенного графика видно, что характер кривых роста прогиба существенно отличается: при учете только одного спектра времен релаксации прогиб растет с постоянной скоростью, а с учетом двух спектров времен релаксации скорость роста стрелы прогиба затухает. Отличается также и величина длительной критической силы.

При расчете с учетом одного спектра времен релаксации —  $F_{дл,1} = 46,7$  Н, а с учетом двух спектров —  $F_{дл,2} = 56,1$  Н.

Табл. 2.5. Упругие и релаксионные параметры ПЭВП

$v_{\epsilon_x} = 5 \cdot 10^{-3} c^{-1}$	Расчет с одним членом спектра времен релаксации					Расчет с двумя членами спектра времен релаксации				
	$E_{эфф}$ (МПа)	$m^*$ (МПа)	$E_{\infty}$ (МПа)	$\eta_0^*$ (МПа) $\cdot 10^7$	$\zeta_{s,max}^*$ (МПа $\cdot c$ )	$E_{\infty,1}$ (МПа)	$E_{\infty,2}$ (МПа)	$\eta_{0,1}^*$ (МПа) $\cdot 10^7$	$\eta_{0,2}^*$ (МПа) $\cdot 10^7$	$\zeta_{s,max}^*$ (МПа $\cdot c$ )
55,0	750	1,89	171,6	9,7	1,0	9000	285,0	1,3	10	1,015
6,0	5700	30,5	1856	5,0	7,3	9000	535,0	1,1	5,35	0,725

Таким образом, расчет на устойчивость полимерных стержней необходимо вести с учетом как минимум двух спектров времен релаксации полимера.

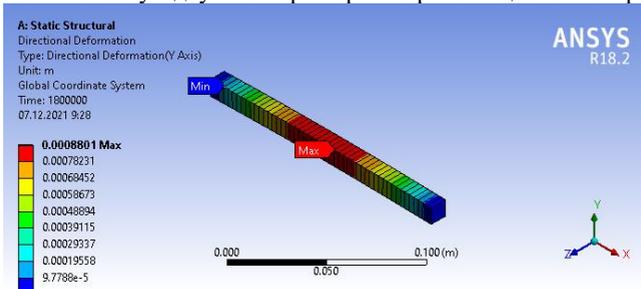


Рис.2.12. Модель стержня в ПК ANSYS

Также для контроля достоверности результатов выполнялся расчет с использованием одночленного варианта уравнения Максвелла-Гуревича в программном комплексе ANSYS (рис.2.12). Результаты расчета и сравнение с решением в MatLab приведены на рис. 2.13 — рис. 2.14.

Для задания пользовательского закона использовалось расширение User Programmable Features. Процедура User Creep.F, определяющая уравнение ползучести была написана на языке Fortran.

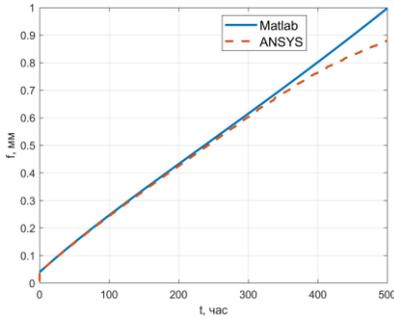


Рис. 2.13. Сравнение максимальных перемещений в MatLab и ANSYS

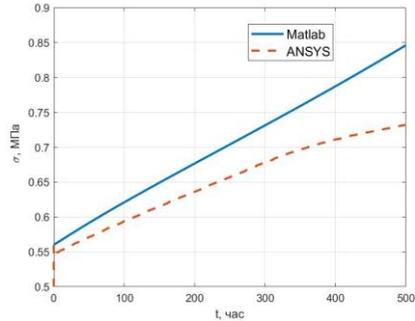


Рис. 2.14. Изменение во времени максимальных напряжений в MatLab и ANSYS

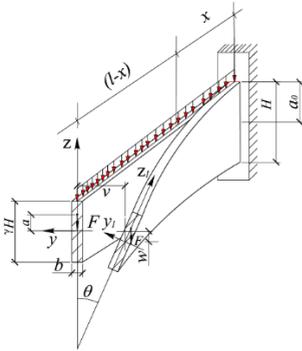


Рис. 3.1 — Расчетная схема

$$1. F = 0; q \neq 0$$

$$M_y(\xi) = \frac{ql^2}{2} (-1 + 2 - \xi^2) = ql^2 \bar{M}(\xi)$$

$$\bar{M}(\xi) = \frac{(-1 + 2\xi - \xi^2)}{2}, \quad \xi = x/l \quad \bar{M}(\xi) = (1 - \xi); \quad \xi = x/l$$

В безразмерных величинах функционал Лагранжа имеет вид:

$$U = \int_0^1 \left( \frac{d\theta}{d\xi} \right)^2 d\xi - \lambda \int_0^1 \bar{M}^2 \theta^2 d\xi, \quad \text{где } \lambda = \frac{q^2 l^6}{GI_k EI_z}. \quad (3.1)$$

Функцию угла закручивания представим в виде ряда:

$$\theta(\xi) = \sum_{i=1}^n a_i f_i, \quad i = 1, 3, 5, \dots, n. \quad (3.2)$$

где  $a_i$  — неопределенные коэффициенты,  $f_i$  — базисные функции, которые должны удовлетворять граничным условиям.

Минимизация функционала  $U$  осуществляется коэффициентами ряда (3.2):

$$\frac{\partial U}{\partial a_j} = 0, \quad j = 1 \dots n; \quad (3.3)$$

В главе 3 рассматриваются вопросы изгибно-крутильной формы потери устойчивости вязкоупругих стержней переменной жесткости.

В разделе 3.1. приводится вывод дифференциального уравнения устойчивости плоской формы изгиба балки переменного сечения, учитывающее приложение нагрузки не в центре тяжести поперечного сечения (над или под центром тяжести) в упругой постановке (рис. 3.1). Приводится решение модельных задач энергетическим методом. Рассматриваются два случая:

$$\sum_{i=1}^n a_i \int_0^1 \frac{\partial f_i}{\partial \xi} \frac{\partial f_j}{\partial \xi} d\xi - \lambda \sum_{i=1}^n a_i \int_0^1 f_i f_j (\overline{M}(\xi))^2 d\xi = 0.$$

и будет эквивалентно следующему матричному выражению:

$$([A] - \lambda[B])\{X\} = 0; \quad (3.4)$$

где вектор неизвестных коэффициентов, элементы матриц [A] и [B] приведены в диссертации.

В табл. 3.1 представлены значения коэффициента  $K = \sqrt{\lambda_{min}}$  при различном числе членов ряда. Сходимость ряда приведена на рис. 3.2. Критическая нагрузка определяется по формуле:

$$(ql)_{кр} = (K\sqrt{EI_z GI_k})/l^2.$$

Табл. 3.1. Величины коэффициента  $K$  при различном числе членов ряда для консольной балки при  $F = 0$ ;  $q \neq 0$   $f_i = \sin(\pi i \xi / 2)$

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$K$	15,496	13,234	12,908	12,863	12,859	12,854	12,854	12,854	12,854

2).  $q = 0$ ;  $F \neq 0$ .

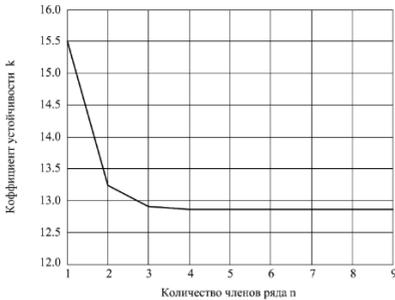


Рис. 3.2. Сходимость метода в зависимости от числа членов ряда

$$f_i = \sin\left(\frac{\pi i \xi}{2}\right)$$

В табл.3.2 представлены значения коэффициента  $K$ , при различном числе членов ряда в случае аппроксимации угла закручивания  $\theta$  степенным и тригонометрическими рядами.

Табл. 3.2. Величины коэффициента  $K$  при различном числе членов ряда

$n$ (число ряда)	1	3	5	7	9
$K$ (автор) $f_i = \sin\left(\frac{\pi i \xi}{2}\right)$	4,345	4,0132	4,0126	4,0126	4,0126
$K$ (Тимош.) $f_i = 1 - \cos\left(\frac{\pi i \xi}{2}\right)$	10,04	4,67	4,37	4,26	4,20
$K$ (степенной ряд) $f_i = \xi^{i+1}$	11,83	4,65	4,24	4,14	4,09

Отметим, что в данной задаче использована также функция угла закручивания в виде степенного ряда:

$$\theta(\xi) = \sum_{i=1,3,5..n} a_i \xi^{i+1} \quad (3.5)$$

Критическая сила так же может быть вычислена по известной формуле:

$$F_{кр} = K\sqrt{EI_z GI_k}/l^2.$$

Сходимость метода в зависимости от числа членов ряда приведено на рис. 3.3.

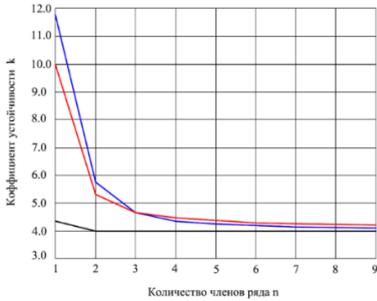


Рис.3.3. Сходимость метода в зависимости от числа членов ряда при  $q = 0$

Синяя — степен. ряд  $f_i = \xi^{i+1}$ ;

Красная —  $f_i = 1 - \cos\left(\frac{\pi i \xi}{2}\right)$ ;

Черная (автор) —  $f_i = \sin\left(\frac{\pi i \xi}{2}\right)$ .

В разделе 3.3 рассматривается устойчивость плоской формы изгиба для вязкоупругих балок в условиях ползучести.

Получено дифференциальное уравнение, позволяющее рассчитывать балки переменной жесткости с начальными несовершенствами с учетом ползучести и нелинейной зависимости между напряжениями и мгновенными деформациями:

$$\begin{aligned}
 & GI_{\kappa} \frac{d^2 \theta}{dx^2} + \frac{d(GI_{\kappa})}{dx} \frac{d\theta}{dx} + \left( \frac{M_y^2}{GI_{\kappa} EI_z} + qa \right) \theta = \\
 & = -q(e + a\theta_0) - \frac{M_y^2 \theta_0}{EI_z} + M_y \frac{d^2 v_0}{dx^2} + \frac{dM_k^*}{dx} - \frac{M_y M_z^*}{EI_z}.
 \end{aligned} \quad (3.6)$$

В случае изменения механических характеристик как функций от координат, величины  $EI_z$  и  $M_z^*$  определяются по формулам:

$$EI_z(x) = \int_A E(x, y, z) y^2 dA; \quad M_z^* = - \int_A E(x, y, z) \varepsilon_x^* \cdot y dA, \quad (3.7)$$

где  $\varepsilon_x^*$  — деформация ползучести.

Алгоритм расчета вязкоупругой балки при ползучести подробно рассмотрен в диссертации. Если материал стержня подчиняется уравнению Максвелла-Гуревича, то имеется возможность получить решение в конце процесса ползучести, заменив мгновенный модуль сдвига  $G$  на длительный  $G_{дл}$ , вычисленный по формуле:

$$G_{дл} = G \cdot G_{\infty} / (G + G_{\infty}); \quad E_{\infty} = 3G_{\infty}. \quad (3.8)$$

Исследуем поведение балки при  $F < F_{дл}$ ,  $F = F_{дл}$  и  $F > F_{дл}$ . Исходные данные принимаются следующие:  $b = 1$  см,  $h = 10$  см,  $E = 1480$  МПа,  $E_{\infty} = 5990$  МПа,  $\eta_0^* = 9.04 \cdot 10^5$  МПа · мин,  $m^* = 12.6$  МПа,  $\nu = 0.3$ ,  $e = 0.01$  см.

На рис. 3.4 представлены графики изменения во времени максимальной величины угла закручивания при трех значениях нагрузки:

$$F = 0,044 \text{ кН} < F_{дл}, \quad F = 0,0465 = F_{дл}, \quad F = 0,048 > F_{дл}.$$

Из рис. 3.4 видно, что, как и для сжатых стержней, при нагрузке меньше длительной критической скорость роста перемещений во времени затухает.

При  $F = 0,0465 = F_{дл}$  перемещения растут с постоянной скоростью, и при  $F = 0,048 > F_{дл}$  скорость роста перемещений возрастает во времени.

На рис.3.5 показаны графики роста максимальной величины угла закручивания при различных значениях эксцентриситета  $e$ .

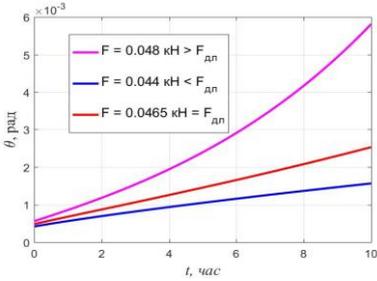


Рис. 3.4. Изменение во времени максимального угла закручивания при различных величинах силы  $F$

Из представленных графиков видно, что, если за критерий потери устойчивости принимать величину перемещений, либо скорость их роста, начальные несовершенства оказывают существенное влияние на величину критического времени.

Таким образом, нагрузки, действующие на балку, не должны превышать длительную критическую.

Довольно интересная картина наблюдается на графиках изменения во времени максимальных величин нормальных напряжений. До определенного момента времени, несмотря на рост угла закручивания, нормальные напряжения убывают, но затем начинают возрастать. Из рис.3.6 видно, что чем выше величина эксцентриситета  $e$ , тем раньше наступает момент, с которого нормальные напряжения начинают расти. Время, соответствующее точке экстремума на графиках  $\sigma_{max}(t)$ , можно принять за критическое.

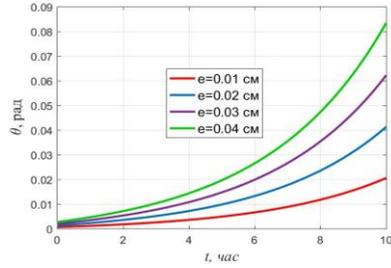


Рис. 3.5. Рост максимальной величины угла закручивания при различных значениях  $e$  ( $F = 0,048 > F_{кр}$ )

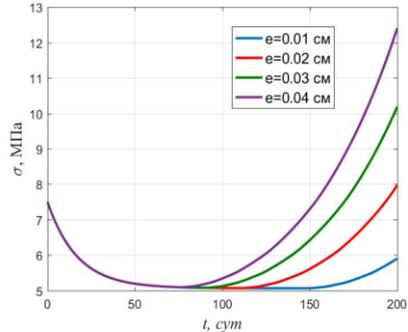


Рис. 3.6. Изменение во времени максимальных величин нормальных напряжений  $\sigma_{max}(t)$

В случае использования такого критерия потери устойчивости:

$e$	0,01 см	0,02 см	0,03 см	0,04 см
$t_{кр}$	11,8 часа	9,4 часа	7,9 часа	7,0 часа

В **Главе 4** рассматривается устойчивость стержней и арок с учетом вязкоупругопластических свойств материала (дерево, бетон). В качестве закона, устанавливающего связь между напряжениями и деформациями, было использовано уравнение вязкоупругопластической модели наследственного старения предложенное проф. А.Г. Тамразяном.

$$\varepsilon(t) = \frac{f[\sigma(t)]}{E_0(t)} - \int_{t_0}^t f[\sigma(\tau)] \cdot \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau. \quad (4.1)$$

В представленном уравнении  $f[\sigma(\tau)]$  — нелинейная функция напряжений, определяющая связь между напряжениями и мгновенными деформациями,  $C(t, \tau)$  — мера ползучести.

В качестве соотношения, устанавливающего связь между напряжениями и мгновенными деформациями для сжатой древесины, использовалась формула Ф.И. Герстнера:

$$\sigma = E_0 \cdot \varepsilon - E_0^2 \varepsilon^2 / 4R. \quad (4.2)$$

Сжимающие напряжения и деформации в формулу (4.2) подставляются со знаком «+». Для растянутой зоны предполагалась упругая работа вплоть до разрушения. Деформацию через напряжения представим в виде:

$$\varepsilon = f(\sigma)/E_0, \quad \text{где } f(\sigma) = 2R[1 - (\sqrt{1 - \sigma/R})]. \quad (4.3)$$

Для меры ползучести  $C(t, \tau)$  древесины использовалась формула, в соответствии с работой В.А. Зедгенидзе и И.Е. Прокоповича:

$$C(t, \tau) = (C_0 + A_0 \exp(-\gamma\tau)) \cdot [1 - B_1 \exp(-\gamma_1\tau(t-\tau))]. \quad (4.4)$$

Уравнение (4.1) представим, как и ранее, в виде суммы деформаций:

$$\varepsilon(t) = \sigma(t)/E(\sigma, t) + \varepsilon^*, \quad \text{где } E = E_0\sigma/f(\sigma) \text{ — сек. модуль,} \quad (4.5)$$

$$\varepsilon^* = - \int_{t_0}^t f[\sigma(\tau)] \cdot \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau \text{ — деф. ползучести}$$

Приведем окончательное основное разрешающее уравнение для шарнирно опертого стержня:

$$\frac{d^2 v}{dx^2} \left( EI - \frac{ES^2}{EA} \right) + Fv = -Fv_0 - \frac{ES}{EA} F - M^* + \frac{ES}{EA} N^*. \quad (4.7)$$

Приведенные жесткости в соотношении (4.7) определяются:

$$EA = \int_A E(y) dA; \quad ES = \int_A E(y) \cdot y dA; \quad EI = \int_A E(y) \cdot y^2 dA. \quad (4.8)$$

Осевая деформация и изменение кривизны запишутся:

$$\chi = - [ES(F - N^*) + EA(M + M^*)] / (ES^2 - EI \cdot EA); \quad (4.9)$$

$$\varepsilon_0 = [ES \cdot (M + M^*) + EI(F - N^*)] / (ES^2 - EI \cdot EA). \quad (4.10)$$

Были решены модельные задачи для деревянного стержня с квадратным сечением  $b \times h = 3 \times 3$  см, длиной  $l = 63$  см. Гибкость  $\lambda$  данного стержня составляет около 73, Эйлера сила — 24,8 кН. Начальная погибь задавалась синусоидой  $v_0 = f_0 \sin(\pi x/l)$

На рис. 4.1 представлена зависимость стрелы прогиба от величины нагрузки при кратковременном нагружении при различных значениях  $f_0$ . Из приведенного графика видно, что начальные несовершенства существенно влияют на величину критической нагрузки.

В случае действия длительной нагрузки, на рис. 4.2 приведены графики роста прогиба в середине пролета по отношению к первоначальному, построенные при  $F = 10$  кН для трех значений стрелы начальной погиби:  $f_0 = 0,01$  см,  $f_0 = 0,015$  см,  $f_0 = 0,02$  см.

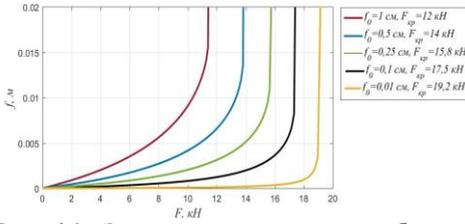


Рис. 4.1. Зависимость стрелы прогиба от нагрузки при различных несовершенствах.

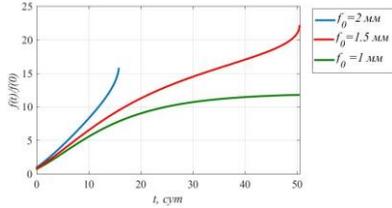


Рис. 4.2. Изменение максимального прогиба во времени при различных значениях стрелы начальной прогиби

Из представленных графиков видно, что начальные несовершенства при одной и той же нагрузке существенно влияют на величину критического времени. В первом случае наблюдается заметный рост прогиба (в 12 раз), но он приходит к конечному значению, во втором случае происходит потеря устойчивости через 50 суток, а в третьем — через 15,8 суток.

В разделе 4.2. рассматриваются решения задачи расчета на устойчивость деревянных арок с учетом геометрической нелинейности методом конечных элементов. Осевая деформация при учете геометрической нелинейности представляет сумму линейной и нелинейной составляющей:

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_0^l + \varepsilon_0^n = \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \overbrace{\left( \frac{dv}{dx} \right)^2}^{\text{геом.нелинейность}} \quad (4.11)$$

Минимизация функционала полной энергии по неизвестным вектору узловых перемещений задача сводится к системе алгебраических уравнений:

$$([K] + [K_g])\{U\} = \{F\} + \{F^*\}, \quad (4.12)$$

где  $[K]$  — матрица жесткости,  $[K_g]$  — геометрическая матрица жесткости,  $\{F^*\}$  — вклад в вектор нагрузки деформаций ползучести,  $\{F\}$  — вектор внешних нагрузок.

Решение физически и геометрически нелинейной задачи осуществляется при помощи метода Ньютона Рафсона. Расчет на ползучесть выполняется аналогично расчету на статическую нагрузку. Приращение деформаций ползучести в момент времени  $t + \Delta t$  можно определить с использованием линейной аппроксимации по Эйлеру.

$$\Delta \varepsilon^* = \left( \frac{\partial \varepsilon_1^*}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon_2^*}{\partial t} \right) \Delta t. \quad (4.13)$$

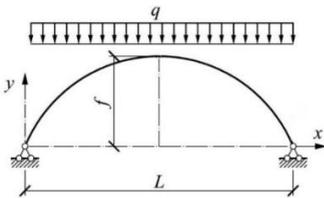


Рис. 4.3. Расчетная схема арки

с размерами  $b = 10\text{см}$ ,  $h = 15\text{см}$ .

Был выполнен расчет шарнирно неподвижно опертой по концам арки параболического очертания под действием равномерно распределенной по длине нагрузки (рис.4.3) при следующих исходных данных:

$$E_0 = 1,48 \cdot 10^4 \text{МПа}, R = 55 \text{МПа}, \\ L = 16\text{м}, f = 3,2\text{м}.$$

Поперечное сечение арки прямоугольное

На (рис.4.4) приведен график зависимости прогиба в середине пролета арки от нагрузки. Штриховой линии соответствует расчету в упругой постановке.

Для контроля правильности результатов решение упругой задачи также выполнялось в программном комплексе ANSYS с использованием стержневых конечных элементов BEAM 188.

Количество конечных элементов принималось такое же, как и в MatLab. Расчет с учетом ползучести для данной арки показал, что даже при нагрузках, достаточно близких к мгновенной критической, рост перемещений носит ограниченный характер.

На (рис.4.5) приведен график изменения во времени прогиба в середине пролета при нагрузке  $q = 8 \text{ кН/м}$ . Штриховой линии на данном графике соответствует решение в вязкоупругой постановке. Существенной разницы в результатах не выявлено.

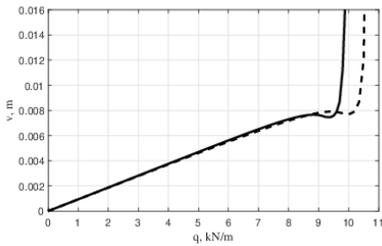


Рис. 4.4. Зависимость максимального прогиба арки от нагрузки

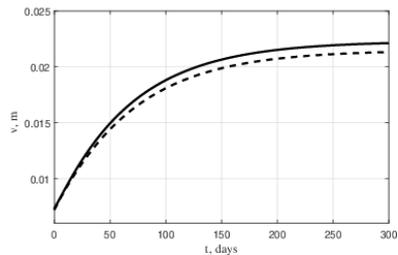


Рис.4.5. Развитие максимального прогиба от нагрузки  $q = 8 \text{ кН/м}$  во времени

Также при указанных выше исходных данных был выполнен расчет трехшарнирной арки с промежуточным шарниром в середине пролета.

В этом случае мгновенная критическая нагрузка оказалась существенно ниже.

При расчете в упругой постановке она составила  $4 \text{ кН/м}$ , а мгновенная критическая нагрузка с учетом нелинейной зависимости между напряжениями и мгновенными деформациями —  $3,3 \text{ кН/м}$ .

Кривые прогиба в середине пролета от нагрузки приведены на (рис.4.6).

Как и в предыдущем примере, даже при нагрузке, достаточно близкой к мгновенной критической, ползучесть носит затухающий характер. Кривые изменения во времени максимального прогиба приведены на (рис. 4.7).

В разделе 4.3. моделируется равновесие железобетонных арок при ползучести и ее конечно-элементная реализация. Рассматривается арка параболического очертания, шарнирно опёртую по концам. Внешняя нагрузка — равномерно распределённая нагрузка интенсивностью  $q$ . За уравнение состояния при кратковременном воздействии принимается формула Сарджина.

За длительную критическую нагрузку  $q_{дл}$  примем такую, начиная с которой рост прогиба имеет незатухающий характер, т. е. при  $t \rightarrow \infty v \rightarrow \infty$ . В данной задаче  $q_{дл} \approx 153 \text{ кН/м}$ .

Отношение мгновенной критической нагрузки к длительной составляет  $\frac{q_{мгн}}{q_{дл}} = 1.44$ .

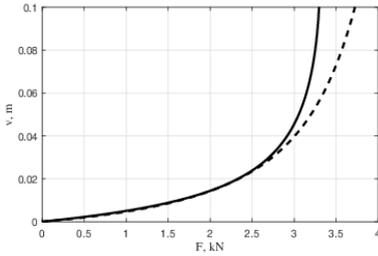


Рис. 4.6 Зависимость максимального прогиба от нагрузки для арки с промежуточным шарниром в середине пролета: штриховая линия — упругое решение, сплошная линия — решение с учетом мгновенной нелинейности деформирования

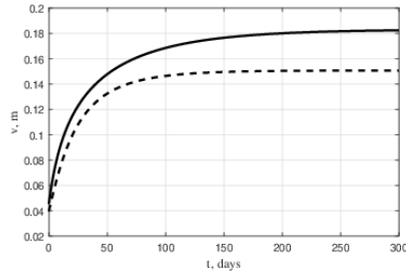


Рис. 4.7. Кривые максимального прогиба для арки с промежуточным шарниром в середине пролета с течением времени при  $q = 3 \text{ кН/м}$

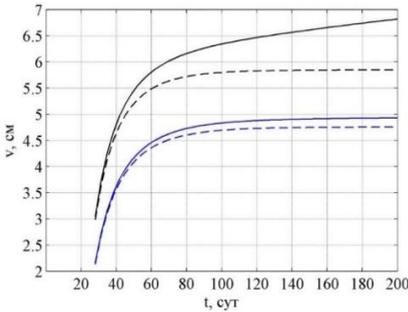


Рис. 4.8. Графики роста прогиба при  $q = q_{дл}$

- синяя штриховая — при линейной ползучести без учёта геометрической нелинейности.

Из приведенных графиков видно, что пренебрежение как геометрической нелинейностью, так и нелинейной составляющей ползучести приводит к существенному расхождению между результатами.

**Глава 5** посвящена устойчивости тонких изотропных пластин с учетом физической и геометрической нелинейности.

Целью настоящей главы является получение разрешающих уравнений для задачи изгиба и устойчивости гибкой пластинки, а также устойчивости нелинейно вязкоупругих прямоугольных пластин, находящихся под действием усилий в срединной плоскости, с учетом геометрической нелинейности.

В разделе 5.1. рассматривается круглая пластинка, защемленная по контуру, подвергающаяся действию сжимающих радиальных усилий  $p$  и имеющую начальную погибь  $w_0(r)$  (рис. 5.1).

На рис.4.8 приведены зависимость роста стрелы прогиба при  $q = q_{дл}$ :

- чёрная сплошная линия — результат с учётом геометрической нелинейности и нелинейной ползучести;
- чёрная штриховая — без учёта геометрической нелинейности, но с учётом физической нелинейной ползучести;
- синяя сплошная — при линейной ползучести с учётом геометрической нелинейности;

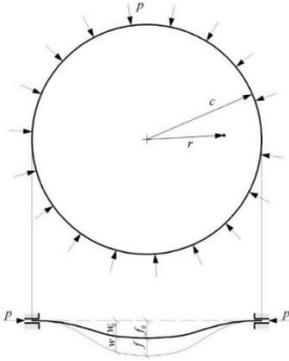


Рис. 5.1. Круглая пластинка с начальной погибью под действием радиальных сжимающих усилий

Необходимо отметить, что проблема выпучивания при ползучести не является задачей чистой устойчивости. Здесь, как и ранее, требуется задание начальных несовершенств, которые, как правило, принимаются в виде начального искривления, либо эксцентриситета приложения нагрузки

Разрешающие уравнения с учетом начальной погиби имеют вид:

$$D \left( \frac{d^3 w}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dw}{dr} \right) = \psi + \frac{h d\Phi}{r dr} \left( \frac{dw}{dr} + \frac{dw_0}{dr} \right) - \frac{dM_r^*}{dr} - \frac{M_r^*}{r} + \frac{M_\theta^*}{r}; \quad (5.1)$$

$$\frac{d^3 \Phi}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 \Phi}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{d\Phi}{dr} = -\frac{E}{r} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{dw}{dr} \right)^2 + \frac{dw}{dr} \frac{dw_0}{dr} + r \frac{d\varepsilon_{\theta, \text{cp}}^*}{dr} + \varepsilon_{\theta, \text{cp}}^* - \varepsilon_{r, \text{cp}}^* \right). \quad (5.2)$$

Так как поперечная нагрузка отсутствует, то  $\psi = 0$ . Условия на границе для уравнений (5.1) и (5.2) имеют вид:

$$w|_{r=c} = 0, \quad \frac{dw}{dr} \Big|_{r=c} = 0, \quad \sigma_{r, \text{cp}} \Big|_{r=c} = \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dr} \Big|_{r=c} = -p.$$

При малых прогибах, когда напряжения в срединной поверхности не зависят от вертикальных перемещений, уравнение (5.1) переписывается в виде:

$$D \left( \frac{d^3 w}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dw}{dr} \right) = -ph \left( \frac{dw}{dr} + \frac{dw_0}{dr} \right) - \frac{dM_r^*}{dr} - \frac{M_r^*}{r} + \frac{M_\theta^*}{r}. \quad (5.3)$$

Критическое давление, при котором происходит потеря устойчивости в упругой постановке:

$$p_{\text{кр}} = 14,68D/(c^2 h).$$

Введем по аналогии с понятием длительной критической силы величину длительного критического давления:

$$p_{\text{дл}} = 14,68D_\infty/(c^2 h),$$

где  $D_\infty$  — длительная цилиндрическая жесткость.

Чтобы проверить, насколько справедлива данная аналогия, была решена модельная задача для пластинки из ЭДТ-10 при различных значениях давления  $p$ . Вычисления выполнялись при следующих исходных данных:

$$\nu = 0,3, \quad E = 3035 \text{ МПа}, \quad E_\infty = 2310 \text{ МПа}, \quad m^* = 4,44 \text{ МПа}, \\ \eta_0^* = 1,8 \cdot 10^8 \text{ МПа} \cdot \text{с}, \quad \text{размеры: } c = 1 \text{ м}, \quad h = 5 \text{ мм}.$$

Для такой пластинки  $p_{\text{кр}} = 0,1 \text{ МПа}$ ,  $p_{\text{дл}} = 0,47 p_{\text{кр}}$ . Начальная погибь задавалась выражением:  $w_0 = f_0(1 - r^2/c^2)^2$ . Величину  $f_0$  приняли равной 0,01 мм.

На рисунке 5.2 приведены графики роста стрелы прогиба при различных величинах нагрузки ( $p < p_{\text{дл}}$ ,  $p = p_{\text{дл}}$  и  $p > p_{\text{дл}}$ ). Сплошным линиям соответствует решение системы (5.1) и (5.2) при помощи МКР, штриховым — решение на основе МКЭ.

Результаты, полученные двумя методами, достаточно хорошо согласуются между собой. Из рис. 5.2 видно, что при  $p < p_{\text{дл}}$  скорость роста прогиба затухает, при  $p = p_{\text{дл}}$  прогиб растет с постоянной скоростью, а при  $p > p_{\text{дл}}$  скорость роста прогиба возрастает. На рисунке 5.3. показаны графики роста прогиба.

Необходимо отметить, что при использовании метода конечных разностей (далее — МКР) в случае небольшого количества отрезков по радиусу возможен эффект «ложной» потери устойчивости при  $p < p_{\text{дл}}$ .

Из данного рисунка видно, что при 20 интервалах по  $r$  отрезок затухающей скорости роста прогиба ( $\partial^2 w / \partial t^2 < 0$ ) сменяется участком, на котором скорость роста прогиба возрастает ( $\partial^2 w / \partial t^2 > 0$ ). При сгущении конечно-разностной сетки указанный эффект пропадает.

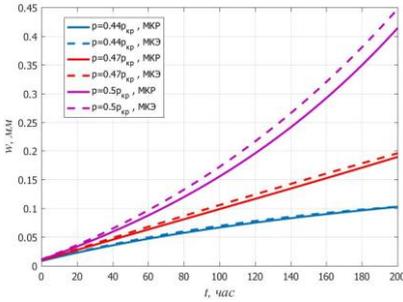


Рис. 5.2. Графики роста стрелы прогиба

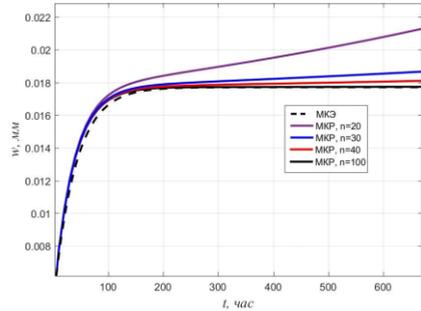


Рис. 5.3. Рост стрелы прогиба при  $p = 0.3 p_{\text{кр}}$

Аналогичный характер кривых роста стрелы прогиба был получен для сжатых стержней на основе линейного уравнения Максвелла-Томпсона. При использовании нелинейного уравнения Максвелла-Гуревича для стержней также можно ввести величину длительной критической силы.

Одномерный характер данной задачи позволяет относительно просто получить независимое решение с использованием других методов для отладки алгоритма МКЭ. Введенное понятие длительной критической нагрузки может быть обобщено на случай более сложных задач устойчивости при ползучести пластин и оболочек.

Далее в разделе 5.6 получены разрешающие уравнения для задачи устойчивости нелинейно вязкоупругих прямоугольных пластин (рис. 5.4), находящихся под действием усилий в срединной плоскости, с учетом геометрической нелинейности. Приведем разрешающие уравнения, вывод которых подробно приведен в диссертации:

$$D\nabla^4 w = q + q^* + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 (w + w_0)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 (w + w_0)}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 (w + w_0)}{\partial x \partial y}, \quad (5.4)$$

где

$$q^* = - \left( \frac{\partial^2 M_x^*}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 H^*}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^*}{\partial y^2} \right).$$

$$\frac{1}{Eh} \nabla^4 \Phi = \left( \frac{\partial^2(w + w_m)}{\partial x \partial y} \right)^2 - \left( \frac{\partial^2 w_m}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2(w + w_m)}{\partial x^2} \frac{\partial^2(w + w_m)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_m}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_m}{\partial y^2} + \frac{1}{Eh} (2(1 + \nu) \frac{\partial^2 S^*}{\partial x \partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 N_x^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N_y^*}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial^2 N_x^*}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 N_y^*}{\partial x^2}). \quad (5.5)$$

Таким образом, задача свелась к системе из двух нелинейных дифференциальных уравнений (5.4) и (5.5). Граничные условия для представленной на рис. (5.4) пластины имеют вид:

$$\begin{aligned} \text{при } x = 0, x = a: N_x &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = -p; S = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = 0; w = 0; M_x = 0; \\ \text{при } y = 0, y = b: N_y &= \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 0; S = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = 0; w = 0; M_y = 0. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Уравнение (5.4) при малых прогибах и отсутствии деформаций ползучести представляет бигармоническое уравнение плоской задачи теории упругости.

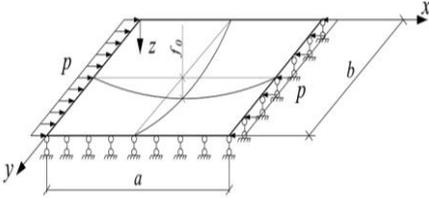


Рис. 5.4. Расчетная схема задачи

в основной системе метода сил (ОСМС).

Если прогибы малы по сравнению с толщиной пластинки, можно считать, что усилия в срединной поверхности постоянны ( $N_x = -p$ ,  $N_y = S = 0$ ) и выполнять расчет с использованием линеаризованного уравнения:

$$D \nabla^4 w + p \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = q^* - p \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2}. \quad (5.7)$$

Решение системы уравнений (5.4) и (5.5) выполняется численно МКР в сочетании с методом последовательных приближений и методом Эйлера для определения деформаций ползучести. На первом этапе решается упругая задача. Увеличение нагрузки  $p$  происходит ступенчато, небольшими порциями.

Начальные значения прогибов  $w_1$  при малой нагрузке определяются из линеаризованного уравнения (5.7). Далее эти значения подставляются в уравнение (5.5), и вычисляется функция напряжений. Затем выполняется решение уравнения (5.4) с известными значениями функции  $\Phi$ , в результате определяются значения прогибов в узлах  $w'_1$ . Далее в у (5.4) подставляются значения  $w_2 = (w_1 + w'_1)/2$ .

Итерационный процесс на каждом шаге повторяется до тех пор, пока относительная разница между максимальными величинами  $w_i$  и  $w'_i$  превышает заданную величину (нами она принималась равной 0.1%).

На втором шаге по нагрузке в качестве начального значения  $w_1$  принимается конечный результат из первого шага. Расчет на ползучесть выполняется аналогично, временной интервал разбивается на заданное количество шагов  $\Delta t$ .

Если закон ползучести задан в дифференциальной форме, деформации ползучести на следующем шаге определяются по известной скорости роста деформаций на текущем шаге при помощи метода Эйлера соотношение (2.13).

Приведем результаты решения модельной задачи для полимерной пластинки из поливинилхлорида при  $a = 2$  м,  $b = 2$  м,  $E = 1480$  МПа,  $h = 1$  см,  $\nu = 0.3$ .

В качестве закона ползучести использовалось нелинейное обобщенное уравнение Максвелла-Гуревича. Реологические параметры ПВХ принимали из работы проф. Гольдмана А.Я.:

$$E_{\infty} = 5990 \text{ МПа}, m^* = 12.6 \text{ МПа}, \eta_0^* = 5.44 \cdot 10^7 \text{ МПа} \cdot \text{с}.$$

Начальная погибь  $w_0(x, y)$  задавалась функцией, соответствующей форме потери устойчивости упругой пластинки:

$$w_0(x, y) = f_0 \sin(\pi x/a) \sin(\pi y/b). \quad (5.8)$$

Нами исследовался характер изменения перемещений во времени для  $p < p_{\infty}$ ,  $p = p_{\infty}$ ,  $p > p_{\infty}$  при различных величинах стрелы начальной погиби  $f_0$ .

Графики роста прогиба при  $p = 0.9p_{\infty}$ ,  $p = p_{\infty}$  и  $p = 1.1p_{\infty}$  приведены соответственно на рис. 5.5 и рис. 5.6..

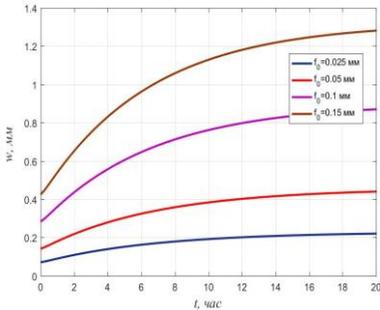


Рис. 5.5. Графики роста прогиба при  $p = 0.9p_{\infty}$

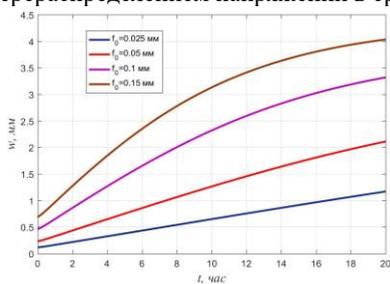


Рис. 5.6. Графики роста прогиба при  $p = p_{\infty}$

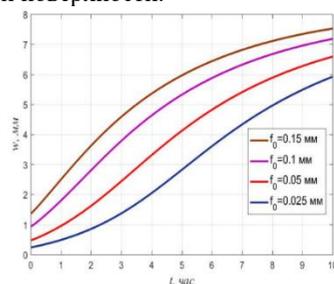


Рис. 5.7. Графики роста прогиба при  $p = 1.1p_{\infty}$

В заключении приведено решение модельной задачи о влиянии отверстий на выпучивание прямоугольных пластин при ползучести.

Из рис. 5.5 видно, что при  $p < p_{\infty}$  скорость роста прогиба всегда носит затухающий характер, независимо от величины начальной погиби. Однако при  $p \geq p_{\infty}$  характер изменения перемещений наблюдается только при небольших прогибах.

При достижении вертикальными перемещениями величин, соизмеримых с толщиной пластинки скорость их роста начинает затухать даже при нагрузке больше длительной критической.

При больших начальных значениях погиби участок с возрастающей скоростью роста прогиба отсутствует вообще. Интенсивное выпучивание сдерживается перераспределением напряжений в срединной поверхности.

**В шестой главе** в разделе 6.1 показана методика определения реологических параметров полимерных материалов по кривым сдвиговой ползучести и с использованием методов нелинейной оптимизации. Здесь предлагается методика, в которой в качестве исходных данных могут быть использованы результаты испытаний на любой из простейших видов деформации (сдвиг, изгиб).

Для определения реологических параметров пенополиуретана, используемого в качестве наполнителя трехслойных конструкций, нами были проведены испытания данного материала на ползучесть при сдвиге. Испытания проводились в течение 1150 ч для трех различных уровней нагрузки, соответствующих 10%, 20% и 30% от предела прочности материала (табл.1).

Табл. 6.1 Параметры при деформации сдвига и уровень нагрузки

№	Параметры при деформации сдвига	Уровень нагрузки		
		$\tau = 0.1\tau_{ult}$ 10%	$\tau = 0.2\tau_{ult}$ 20%	$\tau = 0.3\tau_{ult}$ 30%
1	Нагрузка ( $F$ ) Кн	1,79	3,75	5,7
2	Касательные напряжения ( $\tau$ ) ( $10^{-3}$ МПа)	28,2	57,7	90,4
3	Линейное вертикальное перемещение $\delta_v$ (мм)	0,52	1,06	1,71
4	Упругая деформация сдвига $\gamma_0$ ( $10^{-3}$ m/m)	5,82	11,88	19,02
5	Мгновенный модуль сдвига ( $G$ ) (МПа)	4,84	4,97	4,75

Образцы из жесткого двухкомпонентного пенополиуретана (PUR) размером 250x250x90 мм с одной стороны прикреплялись к балке стальной рамы, а с противоположной стороны через стальную пластину прикладывалась вертикальная нагрузка, величина которой регулировалась. Перемещения нагруженной пластины замерялись с точностью 0.01 мм. Деформация сдвига вычислялась как отношение вертикального перемещения  $\delta_v$  к толщине образца  $h$ .

Подобные эксперименты проводились португальскими учеными. Для описания кривых ползучести они использовали степенной закон Финдли:

$$\gamma(\tau, t) = \tau(1/G_e + t^n/G_t), \quad (6.1)$$

где  $G_e$  и  $G_t$  — соответственно упругий и вязкоупругий модуль сдвига материала.

Существенным недостатком закона Финдли является то, что время включено в него в явном виде. Вследствие этого данный закон применим только при простом нагружении, когда нагрузка во времени постоянна. При наличии температурного поля оно также должно быть стационарным.

Указанных недостатков лишено нелинейное уравнение Максвелла-Гуревича.

В диссертации приводится методика получения реологических параметров, входящих в данное уравнение. На рисунке 6.2 представлены результаты обработки экспериментальных данных.

Из рисунка 6.1 видно, что нелинейное уравнение состояния Максвелла-Гуревича лучше всего согласуется с экспериментальными данными в отличие от уравнения, представленного в виде степенного закона Финдли и линейного уравнения Максвелла, которые дают весьма посредственные результаты.

В этом же разделе показана методика определения реологических параметров при чистом изгибе. Для апробации разработанной методики на первом этапе была построена теоретическая кривая ползучести при заданных значениях  $\eta_0^*$  и  $m^*$ , и затем была решена обратная задача нахождения релаксационных констант по построенной кривой.

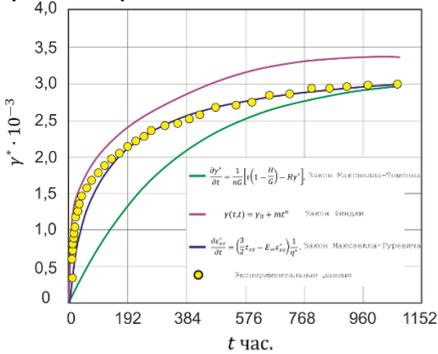


Рис. 6.1. Экспериментальная кривая роста сдвиговой деформации ползучести и ее аппроксимация

При сильном отклонении начального приближения от точных значений решение найти не удавалось.

На рисунке 6.2 показан график изменения целевой функции  $S$  в зависимости от параметров  $m^*$  и  $\eta_0^*$ . На рисунке 6.3 для наглядности также приведены изолинии одинаковых значений целевой функции. На графике изолиний точка  $m^* = 4,44$  МПа,  $\eta_0^* = 2083$  МПа · сут отмечена красным крестиком.

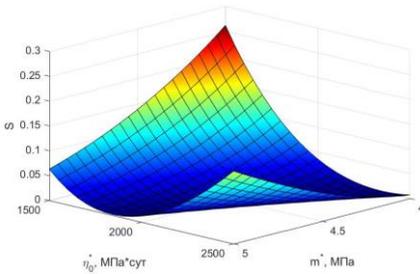


Рис. 6.2. Изменение целевой функции в зависимости от параметров  $m^*$  и  $\eta_0^*$ .

Поскольку реологические константы из испытаний материалов на изгиб ранее не определялись, нами также была выполнена апробация методики на кривых релаксации напряжений для вторичного ПВХ, обработка которых другим методом выполнялась в работах проф. Чепурненко А.С.

На рис. 6.4 приведены экспериментальные кривые релаксации напряжений при различных температурах (отмечены маркерами), их аппроксимация по методике, предложенной А.С. Чепурненко (штриховые линии) и автором (сплошные линии).

Вычисления выполнялись при  $b = 0,5$  см,  $h = 2$  см  
 $F = 0,04$  кН,  $a = 10$  см,  
 $l = 50$  см,  $E = 3035$  МПа,  
 $E_\infty = 2310$  МПа,  $m^* = 4,44$  МПа,  
 $\eta_0^* = 2083$  МПа · сут.

Требуемое количество итераций для нахождения решения зависело от начального приближения. Так, при начальных значениях  $m^* = 8$  МПа,  $\eta_0^* = 10000$  МПа · сут потребовалось 37 итераций, и в результате были получены величины:  $m^* = 4,439$  МПа,  $\eta_0^* = 2083,594$  МПа · сут.

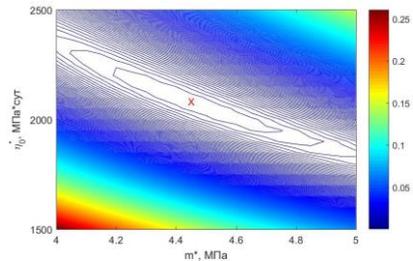


Рис. 6.3. Изолинии равных значений целевой функции

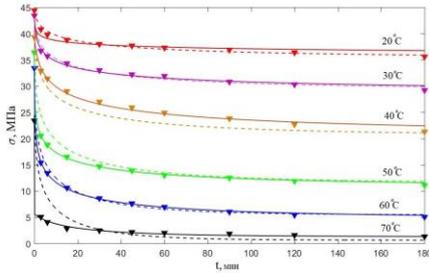


Рис. 6.4. Экспериментальные кривые релаксации напряжений вторичного ПВХ и их аппроксимация по методике А.С. Черпурненко (штриховые линии) и по методике, предложенной автором (сплошные линии)

Для апробации разработанной методики производились испытания на ползучесть при изгибе образцов листового поликарбоната. Эксперимент производился по схеме чистого изгиба (рис. 6.5).

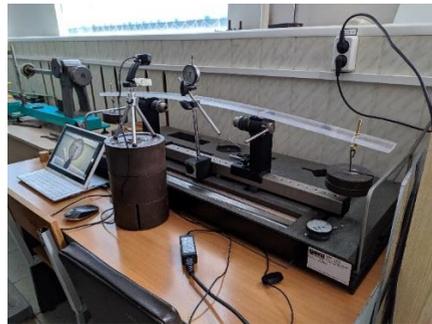
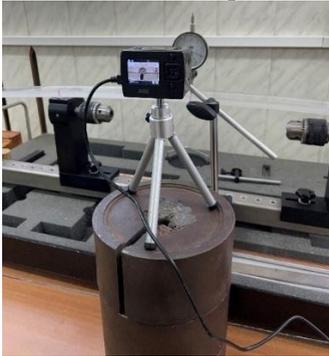


Рис. 6.5. Схема экспериментальной установки при изгибе

Размер консоли  $a = 25$  см, длина пролета  $l = 50$  см, поперечное сечение образцов  $4.5 \times 1.2$  см.

Величины сосредоточенных сил  $F$  на концах консолей принимались равными 10.5 Н в первом испытании и 21 Н во втором.

В табл. 6.2 представлены вычисленные в результате обработки экспериментальных кривых средние значения модуля упругости, модуля высокоэластичности, начальной релаксационной вязкости и модуля скорости.

Табл. 6.2. Результат обработки экспериментальных кривых

Эксперимент	$E$ , МПа	$E_{\infty}$ , МПа	$m^*$ , МПа	$\eta_0^*$ , МПа · ч
№1, $F=10.5$ Н	3679	$1.85 \cdot 10^4$	0.259	$1.23 \cdot 10^5$
№2, $F=21$ Н	3586	$1.76 \cdot 10^4$	0.247	$1.15 \cdot 10^5$

Значения, полученные в двух экспериментах, достаточно близки между собой. Также стоит обратить внимание, что по сравнению с полиметилметакрилатом поликарбонат при практически одинаковом модуле упругости обладает гораздо менее выраженной ползучестью. Модуль высокоэластичности поликарбоната выше, чем у ПММА, примерно в 7 раз.

Экспериментальные кривые ползучести и их аппроксимация представлены на рис. 6.6. Упругие характеристики, в частности, модуль Юнга определялся двумя

методами (изгиб и методом колебаний по собственным частотам) в лаборатории «Прогрессивных полимеров» КБГУ им. Бербекова. (рис. 6.7)

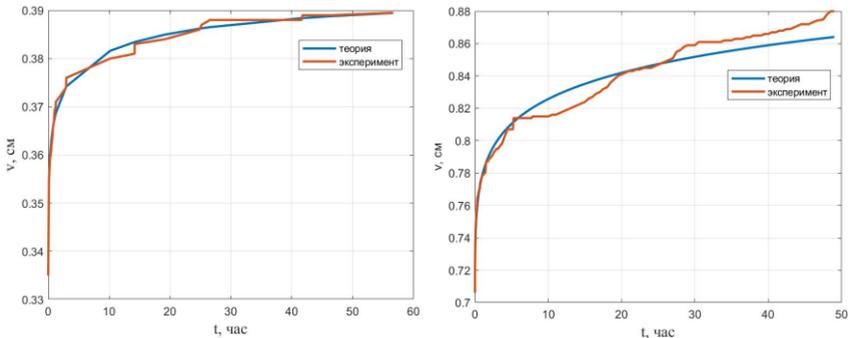


Рис. 6.6. Экспериментальная и теоретическая кривая роста прогиба при  $F = 10.5 \text{ Н}$  и  $F = 21 \text{ Н}$

В разделе 6.4 представлено испытания по определению зависимости критического времени от нагрузки и соответственно сравнение с теоретическим результатом.

В испытаниях на устойчивость, в представленной работе, использовали призматические образцы прямоугольного сечения:  $h = 8 \text{ мм}$ ;  $b = 15 \text{ мм}$ .



Рис. 6.7. Универсальная испытательная машины Gotech Testing Machine GT-TCS 2000 (Тайвань)

После вырезания заготовок из больших отливок, они шлифовались в зажимах на шлифовальном станке при интенсивном охлаждении. При проверке в поляризованном свете оказалось, что в стержнях практически отсутствовали начальные напряжения. Отклонение оси стержня от прямолинейной составляло не более 0,05% от длины стержня.

За основу взята универсальная испытательная машины Gotech Testing Machine GT-TCS 2000 (Тайвань) рис. 6.7.

Для того чтобы при испытаниях в режиме ползучести поддерживать сжимающее усилие постоянным, использовалось контролирующее устройство с контактным датчиком. Торцы стержней закреплялись шарнирно. Опоры представляли собой стальные призмы. На торцы стержня крепились металлические подпятники с углублениями под призмы (рис.6.8-6.9).

Полная автоматизация установки позволяла проводить эксперименты любой продолжительности без непосредственного наблюдения. Показания индикаторов фиксировали с помощью видеорежистратора, подающие информацию на компьютер непосредственно. Сжатие стержней с постоянной скоростью сближения торцов проводили на описанной выше установке. Показания снимали, либо визуально с

помощью индикатора при малых скоростях нагружения, либо с помощью тензодатчиков при больших скоростях нагружения.

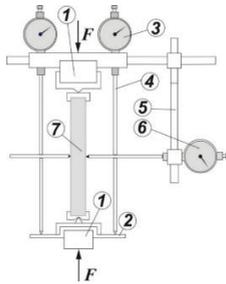
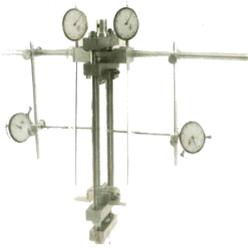


Рис. 6.8. Общий вид реверса с устройством для измерения прогибов стержня

Рис. 6.9. Индикатор для измерения перемещений  $0 \div 50$  мм.

На данной установке был проведен ряд экспериментов при сжатии стержней с постоянной скоростью сближения торцов. Зависимость нагрузки от времени имела максимум, отвечающий критической нагрузке  $F_{кр}$ . Особенно ярко этот максимум выражен при больших скоростях сжатия. В этом случае можно считать, что весь процесс происходит в упругой области. Экспериментально определенная по испытаниям нескольких образцов  $F_{кр}$  была равна  $0,97F_3$ , где  $F_3$  — Эйлера критическая сила, соответствующая шарнирно опертому стержню. Такое согласование говорит о том, что опоры в экспериментальной установке с достаточной степенью точности можно считать шарнирами.

При испытаниях в режиме ползучести были получены зависимости прогиба середины стержня от времени для разных нагрузок. Такого рода зависимости можно разбить на три характерных участка. В течение длительного времени прогиб остается почти постоянным или происходит сравнительно медленное искривление с почти постоянной скоростью. Затем следует переходный участок, когда скорость прогиба нарастает, и, наконец, вблизи критического времени начинается искривление стержня с очень большой скоростью, приводящее к разрушению. Поскольку этот заключительный участок весьма мал по сравнению со всем процессом, считалось, что время разрушения образца есть критическое время.

Основной целью экспериментальной работы было определение зависимости критического времени от нагрузки. Поскольку критическое время с уменьшением нагрузки сильно возрастает, удалось получить экспериментальные точки для нагрузок, лежащих в интервале  $0,75 \leq F/F_3 \leq 1$ . Наибольшая продолжительность эксперимента была 85 суток. Всего в опытах на ползучесть было испытано около 21 образца. Несмотря на известный разброс экспериментальные точки располагаются довольно плотно вблизи некоторой кривой, что свидетельствует об определенной функциональной зависимости между критическим временем и сжимающей силой.

Этот вывод позволяет проводить сравнение экспериментальных данных по устойчивости стержней при ползучести с решением теоретической задачи.

Полученные диаграммы потери устойчивости приведены на рис.6.10.

Табл. 6.3. Результаты испытания стержней на устойчивость

Скорость сближения торцов, $\frac{\text{мм}}{\text{с}}$	Количество образцов	Продолжительность эксперимента	Скорость роста нагрузки, $\frac{\text{кг}}{\text{с}}$	$\frac{F_{\text{кр}}}{F_3}$	$\frac{\min}{\max}$	$\left(\frac{F_{\text{кр}}}{F_3}\right)_{\text{ср}}$
0,33	6	1 с	$66 \div 68$	0,955	1,036	0,979
0,03	5	$10 \div 15$ с	$5 \div 7$	0,904	0,975	0,964
$0,5 \cdot 10^3$	6	10 мин	$0,1 \div 0,2$	0,876	0,987	0,946
$0,1 \cdot 10^3$	4	1 ч	0,2	0,881	0,957	0,936

Результаты экспериментального исследования устойчивости стержней из полимера ЭДТ—10 сведены в таблицу и приведены в диссертации.

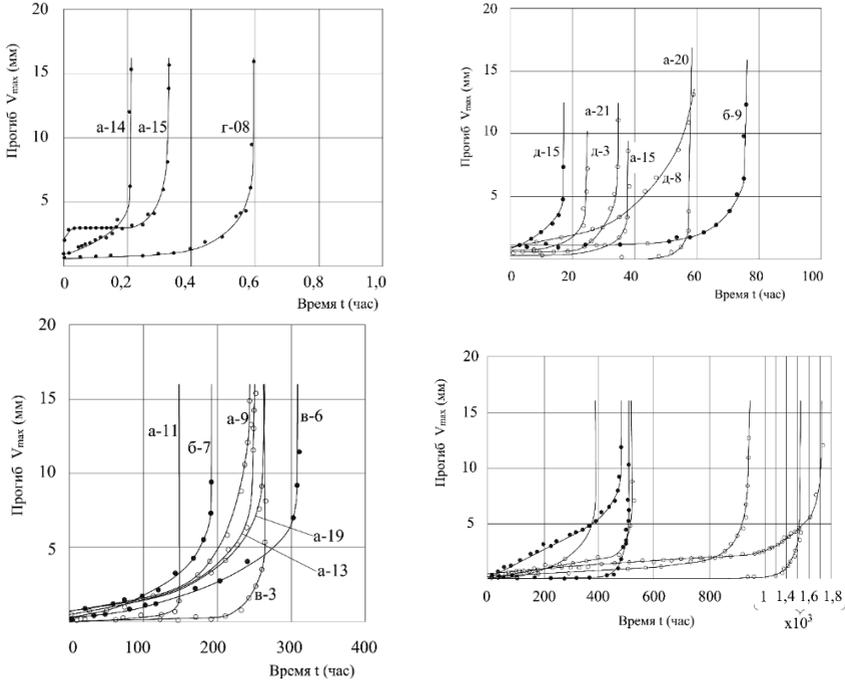


Рис. 6.10. Экспериментальные диаграммы потери устойчивости стержней при ползучести

В второй главе настоящей работы был проведен расчет, в котором были использованы размеры, подвергнутые экспериментальному исследованию образцов и константы исследуемого материала для одного члена спектра времен релаксации обобщенного уравнения Максвелла-Гуревича.

На рис. 6.11 приведены две упомянутые теоретические кривые, полученные численным интегрированием, и результаты эксперимента. Первая кривая соответствует  $\eta_0^* - 10^{10}$  кгсек/мм<sup>2</sup>, вторая —  $10^{11}$  кгсм/мм<sup>2</sup>.

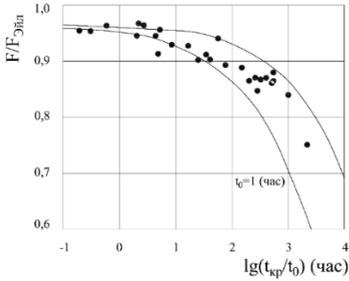


Рис. 6.11. Сравнение результатов расчета по нелинейной теории с экспериментальными результатами. Для крайних значений  $\eta_0^*$ :

$$1 \text{ — } \eta_0^* = 10^{10} \frac{\text{кгсек}}{\text{мм}^2}, \quad 2 \text{ — } \eta_0^* = 10^{11} \frac{\text{кгсек}}{\text{мм}^2}$$

Несмотря на некоторый разброс экспериментальных данных, почти все точки укладываются в интервал между двумя теоретическими кривыми.

Таким образом результаты теоретического расчета показали в полное удовлетворительное совпадение с полученными экспериментальными данными на интервале  $0,75 < F_0/F_3 < 1$ . Это совпадение можно рассматривать как подтверждение пригодности предлагаемого метода решения задачи устойчивости полимерных стержней при ползучести. Слишком большая длительность экспериментов при малых уровнях нагрузки не позволила, к сожалению, получить экспериментальные точки, соответствующие этим нагрузкам и провести сравнение на всей теоретической кривой. Однако, удовлетворительное совпадение теоретического расчета с экспериментальными данными на участке  $0,75 < F_0/F_3 < 1$  позволяет предполагать, что теоретический расчет на всем интервале изменение нагрузки будет давать достаточно правильные.

Осреднение экспериментальных результатов (по близким значениям нагрузки) дает экспериментальную кривую, с которой удовлетворительно совпадает теоретическая кривая, отвечающая среднему значению параметра  $\eta_0^*$  (рис. 6.12).

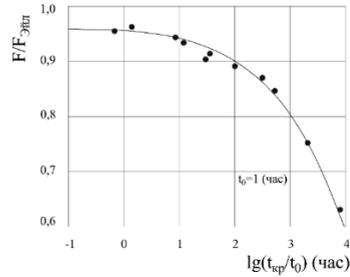


Рис. 6.12. Сравнение результатов расчета по нелинейной теории с экспериментальными результатами. Для среднего значения  $\eta_0^*$ . Экспериментальные точки соответствуют осредненным результатам по близким значениям нагрузки

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

### Итоги выполненного исследования:

1. На основе аналитического обзора современной научно-технической, нормативной, методической литературы проведен анализ отечественного и зарубежного опыта в области нелинейного реологического расчета на устойчивость стержней, арок и пластин что позволило развить научно-теоретические представления в данном направлении, а также обобщить существующие теоретические и экспериментальные исследования включая общую постановку задач.

2. Предложена методика определения реологических параметров полимерных материалов по кривым ползучести и релаксации при различных простейших видах деформации с использованием методов нелинейной оптимизации на основе

нелинейного обобщённого уравнения Максвелла с учетом зависимости упругих и реологических характеристик от температуры. Разработана методика определения реологических параметров пенополиуретана при сдвиговой ползучести на основе нелинейного обобщённого уравнения состояния Максвелла. Показано, что при использовании указанного уравнения качество аппроксимации экспериментальных кривых ползучести выше, чем в случае применения степенного закона Финдли и линейного уравнения Максвелла-Томпсона.

3. Предложен численно-аналитический метод решения уравнений устойчивости стержней и полос постоянного и переменного поперечного сечения при продольном и поперечном нагружении. Определена область устойчивости стержней и полос при одновременном действии двух силовых факторов и получены расчетные формулы. Определены пределы применимости этих формул.

4. Получено разрешающее уравнение для расчета на боковое выпучивание балок постоянной и переменной жесткости с учетом начальных несовершенств в виде эксцентриситета приложения нагрузки, а также начальной погиби в плоскости наименьшей жесткости и начального угла закручивания. Установлены различия в результатах расчета с учетом начальных несовершенств в упругой и вязкоупругой постановке. Для вязкоупругих балок, в отличие от упругих, начальные неправильности существенно влияют на процесс выпучивания.

5. Разработан алгоритм деформационного расчета арочных конструкций на основе метода конечных элементов, с применением метода последующих уточнений, с контролем градиента изменения перемещений узлов арки для оценки устойчивости с учетом всех видов нелинейности для анализа их несущей способности во времени.

6. Получены универсальные разрешающие уравнения, а также разработан алгоритм расчета на устойчивость полимерных пластин в условиях нелинейной ползучести и исследовано влияние ослаблений в виде отверстий на величину критического времени и критической силы.

7. Полученные автором теоретические результаты согласуются с данными собственных и проведенных другими исследователями экспериментов, а также в частных случаях с известными численными и аналитическими решениями.

Поскольку полимерное связующее является составной частью композиционных материалов, таких, например, стеклопластики, и определяет, по сути дела, их неупругое поведение, то полученные результаты, по крайней мере качественно, можно отнести и к этим материалам. Выполнена верификация разработанного автором программного обеспечения и алгоритмов путем сравнения с существующими сертифицированными программными комплексами, дополненными авторскими модулями.

**Рекомендации.** Полученные в диссертационном исследовании результаты могут быть применены при производстве композитов в форме стержней и пластин для специального и строительного назначения; в образовании — в учебном процессе при подготовке бакалавров, магистров и кадров высшей квалификации.

**Перспективы дальнейших исследований:** С использованием полученных теоретических и экспериментальных данных целесообразно продолжить разработку строительных композитов нового поколения для применения к объектам и их элементам в строительстве, авиа и кораблестроения.

**ОСНОВНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ**

Основные положения диссертации и результаты исследований изложены в следующих работах:

— в 54 публикациях в рецензируемых изданиях, входящих в перечень ведущих периодических изданий ВАК РФ и/или международные базы Scopus/Web of Science:

1. **Языев, С. Б.** Плоская деформация неоднородных многослойных цилиндров с учетом нелинейной ползучести / С. В. Литвинов, **С. Б. Языев**, С. Б. Языева // Вестник МГСУ. — 2010. — № 1. — С. 128—132.
2. **Языев, С. Б.** Расчет на устойчивость полимерных стержней с учетом деформаций ползучести и начальных несовершенств / С. В. Литвинов, Е. С. Клименко, И. И. Кулинич, **С. Б. Языев** // Инженер. вестник Дона. — 2011. — № 2. — URL: <http://www.ivdon.ru/magazine/archive/n2y2011/418>.
3. Литвинов, С. В. Расчет на устойчивость стержней из ЭДТ—10 при различных вариантах закрепления / С. В. Литвинов, Е. С. Клименко, И. И. Кулинич, **С. Б. Языев**, Е. А. Торлина // Инженер. вестник Дона. — 2011. — № 2. — URL: <http://www.ivdon.ru/magazine/archive/n2y2011/415>.
4. **Языев, С. Б.** Устойчивость полимерных стержней при различных вариантах закрепления / С. В. Литвинов, Е. С. Клименко, И. И. Кулинич, **С. Б. Языев** // Вестник МГСУ. — 2011. — № 2. — Т. 2. — С. 153—157.
5. **Языев, С. Б.** Исследование устойчивости неоднородных полимерных стержней в условиях термовязкоупругости / И. И. Кулинич, В. В. Литвинов, **С. Б. Языев** // Инженерный вестник Дона. — 2012. — Т. 21. — № 3.
6. **Языев, С. Б.** К вопросу определения релаксационных констант уравнения связи максвелла для жестких полимеров в задачах устойчивости / И. И. Кулинич, **С. Б. Языев**, С. Б. Языева // Инженерный вестник Дона. — 2012. — Т. 21. — № 3.
7. Козельская, М. Ю. Расчет на устойчивость сжатых полимерных стержней с учетом физической нелинейности методом конечных элементов / М. Ю. Козельская, А. С. Чепурненко, **С. Б. Языев** // Вестник евразийской науки. — 2013. — № 3 (16). — Режим доступа: <http://naukovedenie.ru/PDF/62trgsu313.pdf>.
8. **Языев, С. Б.** Расчёт трёхслойной пластинки методом конечных элементов с учётом ползучести среднего слоя / **С.Б.Языев**, Б.М.Языев, А.С.Чепурненко, С.В.Литвинов // Вестник Дагестан. гос. техн. ун-та. — 2014. — № 2 (33). — С. 47—55.
9. Аваков, А. А. Напряженно-деформированное состояние железобетонной арки с учетом нелинейной ползучести бетона / А. А. Аваков, **С. Б. Языев**, А. С. Чепурненко // Научно-технический вестник Поволжья. — 2015. — № 1. Есть ссылка на похожую статью, но название отличается слегка <https://s.fundamental-research.ru/pdf/2015/3/37075.pdf>.
10. **Yazyev S. B.** Flat Axisymmetrical Problem of Thermal Creepage for Thick-Walled Cylinder Made Of Recyclable PVC / **S. B. Yazyev**, S. V. Litvinov, L. I. Trush // Procedia Engineering. — 2016. — № 150. — С.1686—1693. — URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1877705816314734>.
11. Litvinov, S. V. Optimization of thick-walled spherical shells at thermal and power influences / S. V. Litvinov, A. N. Beskopylny, L. I. Trush, **S. B. Yazyev** // MATEC Web of Conferences. — 2017. — Т. 106 (2017). — С. 04013. — URL: <https://www.matec->

conferences.org/articles/mateconf/abs/2017/20/mateconf\_spbw2017\_04013/mateconf\_spbw2017\_04013.html.

12. **Yazyev S. B.** Calculation of shallow polymer shell taking the creep into account / **S.B. Yazyev**, L.R.Mailyan, A.S.Chepurnenko, B.M.Yazyev // MATEC Web of Conferences. — 2017. — № 106. — Режим доступа: [www.matec-conferences.org/articles/mateconf/abs/2017/20/mateconf\\_spbw2017\\_04010/mateconf\\_spbw2017\\_04010.html](http://www.matec-conferences.org/articles/mateconf/abs/2017/20/mateconf_spbw2017_04010/mateconf_spbw2017_04010.html).

13. **Языев, С. Б.** Моделирование изменения деформационных свойств бетона в защитных конструкциях реакторов АЭС под действием ионизирующего излучения / **С. Б. Языев**, Э. К. Агаханов, Р. М. Карачев, А. С. Чепурненко, **С. Б. Языев** // Вестник ДГТУ. Технические науки. — 2016. — №1. — URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/modelirovanie-izmeneniya-deformatsionnyh-svoystv-betona-v-zaschitnyh-konstruktsiyah-reaktorov-aes-pod-deystviem-ioniziruyushchego>.

14. Veremeenko, A.A. Finite-element modeling of loading of spring from an orthotropic material / A.A. Veremeenko, A.S. Chepurnenko, P.A. Shvetsov, L. A. Zorchenko and **S.B. Yazyev** // IOP Conference Series: Earth and Environmental Science. — 2017. — Т. 90. — С. 1-6. — URL: [iopscience.iop.org/article/10.1088/1755-1315/90/1/012099](http://iopscience.iop.org/article/10.1088/1755-1315/90/1/012099).

15. **Yazyev, S.** Energy method in solving the problems of stability for a viscoelastic polymer rods / **S. Yazyev**, M. Kozelskaya, G. Strelnikov, S. Litvinov // MATEC Web of Conferences. ICMTMTE 2017. — Т. 129 (2017). — С. 05010. — URL: [https://www.matec-conferences.org/articles/mateconf/pdf/2017/43/mateconf\\_icmtmte2017\\_05010.pdf](https://www.matec-conferences.org/articles/mateconf/pdf/2017/43/mateconf_icmtmte2017_05010.pdf).

16. **Yazyev, S. B.** Optimization of thick-walled spherical shells at thermal and power influences / **S. B. Yazyev**, S. V. Litvinov, A. N. Beskopylny, L. I. Trush, // MATEC Web of Conferences. — 2017. — Т. 106 (2017). — С. 04013. — URL: [https://www.matec-conferences.org/articles/mateconf/abs/2017/20/mateconf\\_spbw2017\\_04013/mateconf\\_spbw2017\\_04013.html](https://www.matec-conferences.org/articles/mateconf/abs/2017/20/mateconf_spbw2017_04013/mateconf_spbw2017_04013.html).

17. Litvinov, S. Forecasting the Strength of an Adhesive Bond Over a Long Period of Time / S. Litvinov, A. Zhuravlev, S. Bajramukov, **S. Yazyev** // International Scientific Conference Energy Management of Municipal Transportation Facilities and Transport EMMFT 2017. — Advances in Intelligent Systems and Computing. — Т. 692. — С. 902—907. — URL: [https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-319-70987-1\\_97](https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-319-70987-1_97).

18. **Yazyev S. B.** Determination of physic and mechanical parameters of high-density polyethylene based on relaxation curves due to the presence of hydroxyapatite and ionizing radiation / **S. B. Yazyev**, S. V. Litvinov, D. A. Vysokovskiy // MATEC Web of Conferences. — EDP Sciences, 2018. — Т. 196. — С. 01013. — URL: <https://www.matec-conferences.org/articles/mateconf/abs/2018/55>.

19. Litvinov, S. V. Buckling of glass reinforced plastic rods of variable rigidity / S. V. Litvinov, **S. B. Yazyev**, I. I. Rudchenko, G. S. Molotkov // Materials Science Forum. — 2018. — Т. 931. — С.133—138. — URL: <https://www.scientific.net/MSF.931.133>.

20. Litvinov, S. V. Determination of the Stress-Strain State of a Rotating Polymer Body / S. V. Litvinov, L. I. Trush, **S. B. Yazyev** // Materials Science Forum. — 2018. — Т. 935. — С.121—126. — URL: <https://www.scientific.net/MSF.935.121>.

21. **Yazyev, S. B.** The Definition of a Critical Deflection of Compressed Rods with the Creep by the Method of Bubnov-Galerkin / B. M. Yazyev, **S. B. Yazyev**, A. P. Grinev,

- E. A. Britikova // *Materials Science Forum.* — Trans Tech Publications Ltd, 2018. — Т. 931. — С.127-132.
22. **Языев, С.Б.** Оценка напряженно-деформированного состояния пластины переменной толщины в условиях изгиба / **С. Б. Языев, С. Б. Языева, И. М. Зотов, Б. М. Языев** // *Строительство и техногенная безопасность.* — 2017. — №8 (60). — URL: <https://cyberleninka.ru/article/n/otsenka-napryazhenno-deformirovannogo-sostoyaniya-plastiny-peremennoy-tolschiny-v-usloviyah-izgiba>.
23. Литвинов, С. В. Теоретическое исследование модифицированных упругих и высокоэластических параметров полиэтилена высокой плотности на основе экспериментальных кривых релаксации / С. В. Литвинов, Л. И. Труш, А. А. Савченко, **С. Б. Языев** // *Изв. вузов. Химия и хим. технология.* — 2019. — Т. 62. — № 5. — С. 78—83. — URL: <http://journals.isuct.ru/ctj/article/view/1261/783>.
24. **Yazyev, S.** Optimization of the Thick-Walled Sphere by the Energy Method on the Basis of the Strength Criterion of P. Balandin / **S. Yazyev, S. Skuratov, V. Bondarenko, S. Yazyeva** // *Energy Management of Municipal Transportation Facilities and Transport.* — Springer, Cham, 2017. — С.894-901.
25. **Yazyev, S.** Side buckling of the cantilever beam with narrow rectangular cross section / **S. Yazyev, I. Zotov, D. Vysokovsky, B. Yazyev** // *E3S Web of Conferences.* — EDP Sciences, 2019. — Т. 97. — С. 04066.
26. Litvinov, S. Approbation of the Mathematical Model of Adhesive Strength with Viscoelasticity / S. Litvinov, X. Song, **S. Yazyev, A. Avakov** // *Key Engineering Materials.* — 2019. — Т. 816. — С.96—101. — URL: <https://www.scientific.net/KEM.816.96>.
27. Zotov, I. M. Calculation of the flat bending shape stability of rectangular cross section beams with regard to creep / I. M. Zotov, A. S. Chepurnenko, **S. B. Yazyev** // *Herald of Dagestan State Technical University Technical Sciences.* — 2019. — Т. 46. — №. 1. — С. 169-176.
28. **Yazyev, S. B.** Fractality in architectural forms and in organization of space in buildings / **S. B. Yazyev, B. M. Yazyev, I. A. Mayatskaya, S. B. Yazyeva,** // *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering.* — IOP Publishing, 2019. — Т. 698. — № 2. — С. 022087.
29. **Yazyev S. B.** Rectangular Cross Section Beams Calculation on the Stability of a Flat Bending Shape Taking into Account the Initial Imperfections / **S. B. Yazyev, I. M. Zotov, A. P. Lapina, A. S. Chepurnenko,** // *Materials Science Forum.* — Trans Tech Publications Ltd, 2020. — Т. 974. — С.551-555.
30. **Языев, С. Б.** Метод энергии в расчете на устойчивость плоской формы изгиба консольной полосы с учетом собственного веса / **С. Б. Языев** // *Строительные материалы и изделия.* — 2020. — Т. 3. — №. 1. — С. 76-82.
31. Lapina, A. Flat bending shape stability of the beams with variable section width / A. Lapina, **S. Yazyev, A. Chepurnenko, I. Dubovitskaya** // *E3S Web of Conferences.* — EDP Sciences, 2020. — Т. 164. — С. 02016.
32. **Yazyev, S.** Improving the energy method for calculating beams with a narrow rectangular section on the side buckling / **S. Yazyev, A. Lapina, I. Zotov, A. Chepurnenko, Irina Doronkina** // *E3S Web of Conferences.* — EDP Sciences, 2020. — Т. 164. — С. 02033.
33. Sabitov, L. Technological and construction features of modular reinforced concrete foundation designing for various high-rise structures / L. Sabitov, A. Mayilyan, L.

- Mayilyan, **S. Yazyev**, O. Radaykin, L. Akhtyamova // E3S Web of Conferences. — EDP Sciences, 2020. — Т. 164. — С. 02034.
34. Маилян, Л. Р. Напряженно-деформированное состояние системы "комбинированная башня-железобетонный фундамент-грунт основания" высотных сооружений / Л. Р. Маилян, **С. Б. Языев**, Л. С. Сабитов, Ю. Г. Коноплёв, О. В. Радайкин // Строительные материалы и изделия. — 2019. — Т. 2. — № 6. — С. 29-37.
35. Чепурненко, А. С. Уточнение решения задачи о длительной прочности адгезионного соединения при нормальном отрыве / А. С. Чепурненко, С. В. Литвинов, **С. Б. Языев**, Л. С. Сабитов // Строительная механика и расчет сооружений. — 2020. — № 3. — С. 26—31.
36. **Языев, С. Б.** Расчет на устойчивость сжатых деревянных стержней при нелинейной ползучести / **С. Б. Языев**, В. С. Чепурненко, А. С. Чепурненко, Л. С. Сабитов // Строительная механика и расчет сооружений. — 2020. — № 4. — С. 67-71.
37. **Yazyev, S. B.** The energy method for calculating the cantilever strip bending flat form stability taking into account its own weight development / **S. B. Yazyev**, I. M. Zotov, A. P. Lapina, A. S. Chepurnenko, D. A. Vysokovskiy // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. — IOP Publishing, 2020. — Т. 913. — № 2. — С. 022023.
38. **Yazyev, S. B.** Finite-element analysis of plate stability under conditions of nonlinear creep / **S. B. Yazyev**, A. S. Chepurnenko, A. P. Lapina, S. Xuanzhen // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. — IOP Publishing, 2020. — Т. 913. — № 2.
39. **Yazyev, S. B.** Flexural buckling of a revolving bar in a rigid pipe with a gap exposed to axial force and dead weight/ **S. B. Yazyev**, P. V. Ivanova, Yu. G. Konoplev, B. M. Yazyev // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. — IOP Publishing, 2020. — Т. 913. — № 2. — С. 022021.
40. Sabitov, L. S. Comparative analysis of the various types of structures for the electric transmission power cables supports' static work in the software complexes implementing the finite elements method / L. S. Sabitov, A. D. Ziganshin, O. V. Radaykin, L. Sh. Akhtyamova, **S. B. Yazyev** // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. — IOP Publishing, 2020. — Т. 913. — № 2. — С. 022032.
41. Litvinov, S. Determination of Rheological Parameters of Polymer Materials Using Nonlinear Optimization Methods / S. Litvinov, **S. Yazyev**, A. Chepurnenko, B. Yazyev // Proceedings of the XIII International Scientific Conference on Architecture and Construction 2020. — Т. 130. — Springer, Singapore. — С. 587—594. — URL: [https://link.springer.com/chapter/10.1007%2F978-981-33-6208-6\\_58](https://link.springer.com/chapter/10.1007%2F978-981-33-6208-6_58).
42. **Языев, С. Б.** Определение реологических параметров полимерных материалов с использованием методов нелинейной оптимизации / **С. Б. Языев**, А. С. Чепурненко, С. В. Литвинов // Строительные материалы и изделия. — 2020. — Т. 3. — № 5. — С. 15—23. — URL: <http://bstu-journals.ru/archives/10782>.
43. **Языев, С. Б.** Метод энергии в расчете на устойчивость плоской формы изгиба консольной полосы с учетом собственного веса / **С. Б. Языев** // Строительные материалы и изделия. — 2020. — Т. 3. — № 1. — С. 76-82.
44. **Языев, С. Б.** Численно-аналитический расчет продольного изгиба призматических упругих стержней при действии осевой сжимающей нагрузки с учетом собственного веса / **С. Б. Языев**, А. С. Чепурненко, А. А. Аваков // Вестник МГСУ. — 2021. — Т. 16. — № 1. — С. 30-40.

45. **Yazyev, S. B.** Energy method for solving the stability problem of an elastic rod with variable stiffness taking into account its dead weight / S. B. Yazyev, L. Sh. Akhtyamova, V. S. Chepurnenko, A. A. Reshetnikov, A. D. Ziganshin // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. — IOP Publishing, 2021. Т. 1083. — №. 1. — С.
46. Chepurnenko, A. S. Buckling of compressed rods taking into account their own weight under different boundary conditions / A. S. Chepurnenko, **S. B. Yazyev**, D. A. Vysokovskiy, G. B. Verzhbovskiy // IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. — IOP Publishing, 2021. — Т. 1083. — №. 1. — С. 012004.
47. Chepurnenko, A. S. Combined use of contact layer and finite-element methods to predict the long-term strength of adhesive joints in normal separation / A. S. Chepurnenko, S. V. Litvinov, **S. B. Yazyev** // Mechanics of composite materials. — 2021. — Т. 57. — № 3. — С.501—516.
48. **Языев, С. Б.**, Андреев В. И., Чепурненко А. С. Расчет на устойчивость деревянных арок с учетом нелинейной ползучести //Advanced Engineering Research. — 2021. — Т. 21. — №. 2. — С. 114-122.
49. **Языев, С. Б.**, Чепурненко А. С., Аваков А. А. Численно-аналитический расчет продольного изгиба призматических упругих стержней при действии осевой сжимающей нагрузки с учетом собственного веса // Вестник МГСУ. — 2021. — Т. 16. — № 1. — С. 30-40.
50. Козлов, Г. В. Термостабильность нанокompозитов полимер/органоглина: структурный анализ / Г. В. Козлов, С. Б. Языев, И. В. Долбин // Теплофизика высоких температур. — 2021. — Т. 59. — №. 2. — С. 313-315.
51. Chepurnenko, A. Axisymmetric bending of a circular three-layer plate taking into account creep / A. Chepurnenko, D. Vysokovskiy, E. Rusakova, V. Vanja, **S. Yazyev** // E3S Web of Conferences. — EDP Sciences, 2021. — Т. 281. — С. 01005.
52. Yazyev, S. The Stress-Strain State of Reinforced Concrete Arches with a View of Concrete Viscoelasticity / S. Yazyev, V. Andreev, L. Akhtyamova // Proceedings of FORM 2021. — Springer, Cham, 2022. — С.459–471.
53. Sabitov, L. Improvement of wind power units towers constructions and their numerical simulation / L. Sabitov, L. Mailyan, L. Akhtyamova, A. Ziganshin, **S. Yazyev** // E3S Web of Conferences. — EDP Sciences, 2021. — Т. 281. — С. 01033.
54. Языев, С. Б. Расчет на устойчивость плоской формы изгиба балок с переменной шириной поперечного сечения / С. Б. Языев // Строительство и архитектура. — 2021. — Т. 9. — № 2. — С. 41-45.

— в 3-х монографиях:

1. Литвинов, С. В. Моделирование процессов деформирования многослойных цилиндрических тел при термомеханических нагрузках: монография / С. В. Литвинов, **С. Б. Языев**. — Ростов н/Д.: Рост. гос. строит. ун-т, 2009. — 96 с.
2. **Языев, С. Б.** Устойчивость полимерных стержней в условиях вязкоупругости: монография / **С. Б. Языев**, Л. Н. Панасюк, С. В. Литвинов, Г. М. Данилова—Волковская, Е. Х. Аминова. — Ростов н/Д.: Рост. гос. строит. ун-т, 2010. — 81 с.
3. Клименко, Е. С. Устойчивость сжатых неоднородных стержней с учётом физической нелинейности материала: монография / Е. С. Клименко, Е. Х. Аминова, С. В. Литвинов, **С. Б. Языев**, И. И. Кулинич. — Ростов н/Д.: Рост. гос. строит. ун-т, 2012. — 77 с.

— в 5-ти патентах и свидетельствах на программы на ЭВМ:

1. Опора из секции многогранного сечения. Патент на изобретение №2743116 Оpubл. 15.02.2021. — Правообладатель: **Языев Сердар Батыроович** (ru), Сабитов Линар Салихзанович (ru), Кузнецов Иван Леонидович (ru), Зиганшин Алмаз Дамирович (ru), Киямов Ильгам Киямович (ru), Ахтямова Лейсан Шамилевна (ru), Кабарова Гузель Ильдусовна (ru), Маилян Александр Леонович (ru)
2. Оптимизация деревянных балок переменного сечения. Свидетельство об официальной регистрации программы для ЭВМ № 2016615085. — № 2016612477; заявл. 23.03.2016; зарег. 16.05.16. **Языев С.Б.**, Карамышева А. Чепурненко А.С.
3. Расчёт двухслойной армоцементных оболочек на силовые и температурные воздействия в условиях пожара. Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ /Кабардино-Балкарский гос. ун-т. Номер регистрации (свидетельства): 2020619374. Дата регистрации: 17.08.2020. Номер и дата поступления заявки: 2020617814. 27.07.2020. 218 Кб. Журтов А. В., **Языев С.Б.**, Литвинов С.В., Хежев Т.А., Чепурненко А.С;
4. Расчёт остаточных напряжений при производстве изделий, имеющих форму вращения. Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ /Кабардино-Балкарский гос. ун-т. Номер регистрации (свидетельства): 2020660684. Дата регистрации: 09.09.2020. Номер и дата поступления заявки: 2020617898. 27.07.2020. **Языев С.Б.**, Хаширова С. Ю., Лесняк Л. И., Литвинов С. В., Молоканов Г. О., Чепурненко А.С.
5. Расчет балок прямоугольного сечения на устойчивость плоской формы изгиба с учетом ползучести. Свидетельство о гос. регистрации программы для ЭВМ /Кабардино-Балкарский гос. ун-т. Номер регистрации (свидетельства): 2020661325. Дата регистрации: 21.09.2020. Номер и дата поступления заявки: 2020617809. 27.07.2020. **Языев С.Б.**, Хаширова С. Ю., Зотов И.М., Лапина А.П., Чепурненко А.С., Молоканов Г. О.

В печать \_\_\_\_\_ . Формат 60×84/16.  
Объем 2,9 усл. п. л. Тираж 100 экз. Заказ № 5

Отпечатано в издательском центре ДГТУ  
Адрес университета и полиграфического предприятия:  
344000, г. Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1