

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ» (ДГТУ)

На правах рукописи

ЯЗЫЕВ СЕРДАР БАТЫРОВИЧ

**РАЗВИТИЕ МЕТОДОВ РАСЧЕТА НА УСТОЙЧИВОСТЬ  
ВЯЗКОУПРУГИХ СТЕРЖНЕЙ И ПЛАСТИН В  
УСЛОВИЯХ НЕЛИНЕЙНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ**

2.1.9. Строительная механика

Диссертация  
на соискание учёной степени  
доктора технических наук

Научный консультант  
академик РААСН,  
д.т.н., профессор  
В.И. Андреев

## ОГЛАВЛЕНИЕ

<b>ВВЕДЕНИЕ.....</b>	<b>7</b>
<b>1 СОСТОЯНИЕ ВОПРОСА. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.....</b>	<b>17</b>
1.1 Реология как раздел механики сплошных сред. Связь деформаций ползучести с компонентами тензора напряжений. ....	17
1.1.1 Линейная вязкоупругость.....	22
1.1.2 Нелинейная вязкоупругость.....	24
1.2 Полная система уравнений механики сплошной среды. Определяющее уравнение состояния (связи) и его параметры. ....	29
1.2.1 Линейное и нелинейное уравнение связи Максвелла и его параметры.....	32
1.2.2 О константах обобщённого нелинейного уравнения Максвелла-Гуревича .....	35
1.2.3 Одноосное напряженное состояние. Дискретный спектр времен релаксации .....	37
1.2.4 Плоское напряженное состояние. Дискретный спектр времен релаксации .....	41
1.3 Современное состояние исследований в области устойчивости стержней и методов расчета с учетом реологии материала. ....	49
1.3.1 Обзор исследований устойчивости стержневых систем .....	49
1.3.2 Обзор исследований устойчивости плоской формы изгиба .....	54
1.4 Выводы по главе .....	56
<b>2 УСТОЙЧИВОСТЬ СТЕРЖНЕЙ В УПРУГОЙ И ВЯЗКОУПРУГОЙ ПОСТАНОВКАХ .....</b>	<b>57</b>
2.1 Численно-аналитический расчет продольного изгиба призматических упругих стержней с учетом собственного веса при действии осевой нагрузки .....	57
2.1.1 Решение модельных задач численно-аналитическими методами.....	61
2.1.2 Решение модельных задач методом конечных разностей.....	72

2.2	Вывод разрешающих уравнений для упруго стержня переменной жесткости с учетом собственного веса .....	74
2.2.1	Решение энергетическим методом задачи устойчивости упруго стержня переменной жесткости с учетом собственного веса.....	75
2.3	Вывод разрешающих уравнений для стержня с учетом реологических свойств материала. ....	80
2.3.1	Конечно-разностная аппроксимация разрешающих уравнений .....	85
2.3.2	Решение модельных задач.....	92
2.3.3	Конечно-элементное моделирование при расчете стержней на устойчивость с учетом деформаций ползучести.....	95
2.3.4	Решение модельных задач методом конечных элементов .....	103
2.4	Численно-аналитические методы решения задач устойчивости вязкоупругих стержней. Метод Ритца-Тимошенко и Бубнова-Галеркина .....	105
2.4.1	Решение задач методом Ритца-Тимошенко.....	106
2.4.2	Решение задач методом Бубнова-Галеркина .....	109
2.4.3	Сравнение результатов решения задач МКР и МКЭ с численно-аналитическими методами Бубнова-Галеркина и Ритца-Тимошенко .....	113
2.5	Влияния температуры на устойчивость стержней переменной жесткости в условиях вязкоупругости.....	117
2.5.1	Устойчивость полимерных стержней при изменении температуры вдоль стержня и в поперечном сечении.....	117
2.5.2	Учет дискретного спектра времен релаксации стержня из полиэтилена высокой плотности.....	125
2.6	Выводы по главе 2 .....	129
<b>3</b>	<b>ИЗГИБНО-КРУТИЛЬНАЯ ФОРМА ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ ВЯЗКОУПРУГИХ СТЕРЖНЕЙ ПЕРЕМЕННОЙ ЖЕСТКОСТИ.....</b>	<b>131</b>
3.1	Устойчивость плоской формы изгиба тонкой полосы прямоугольного сечения .	131

3.1.1	Энергетический метод в расчетах изгибно-крутильной формы потери устойчивости консольной полосы с учетом собственного веса .....	133
3.1.2	Боковое выпучивание призматических балок переменного поперечного сечения .....	140
3.2	Начальные несовершенства в условиях плоской формы изгиба балок .....	150
3.3	Изгибно-крутильная форма потери устойчивости для вязкоупругих балок в условиях ползучести. Вывод разрешающих уравнений. Методика расчета .....	151
3.3.1	Алгоритм расчета вязкоупругой балки при ползучести.....	153
3.3.2	Выпучивание полимерной консольной полосы при ползучести.....	157
3.3.3	Устойчивость плоской формы изгиба балок прямоугольного сечения при ползучести .....	160
<b>3.4</b>	<b>Выпучивание упругих вращающихся стержней при действии осевых сжимающих сил с учетом собственного веса. ....</b>	<b>162</b>
3.4.1	Решение модельных задач без учета собственного веса .....	165
3.4.2	Решение модельных задач с учетом собственного веса.....	168
3.5	Методика решения интегро-дифференциального уравнения изогнутой оси балки .....	176
3.6	Выводы по главе 3 .....	180
<b>4</b>	<b>УСТОЙЧИВОСТЬ СТЕРЖНЕЙ И АРОК С УЧЕТОМ ВЯЗКОУПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ СВОЙСТВ МАТЕРИАЛА .....</b>	<b>182</b>
4.1	Уравнение связи для вязкоупругопластической модели наследственного старения. Вывод разрешающих уравнений.....	182
4.1.1	Решение модельной задачи. ....	186
4.2	Метод конечных элементов в задаче расчета на устойчивость деревянных арок с учетом геометрической нелинейности .....	188
4.2.1	Решение модельной задачи .....	192
4.3	Равновесие железобетонных арок при ползучести и ее конечно-элементная реализация. ....	194



4.3.1	Разрешающие уравнения метода конечных элементов .....	198
4.3.2	Итерационный анализ устойчивости с применением квазистатической процедуры метода конечных элементов .....	201
4.3.3	Решение модельной задачи .....	203
4.4	Выводы к главе 4 .....	205
<b>5</b>	<b>ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧ ИЗГИБА И УСТОЙЧИВОСТИ ГИБКИХ ВЯЗКОУПРУГИХ ПЛАСТИН.....</b>	<b>207</b>
5.1	Изгиб круглой гибкой пластины в условиях нелинейной ползучести .....	207
5.2	Устойчивость круглой гибкой пластины с начальной погибью под действием радиальных сжимающих усилий в условиях ползучести .....	212
5.3	Изгиб прямоугольной гибкой пластинки в условиях ползучести. ....	215
5.4	Устойчивость прямоугольной пластинки из вторичного ПВХ в условиях ползучести .....	223
5.5	Изгиб пластин с учетом геометрической нелинейности. Конечно-элементное моделирование ползучести вязкоупругих пластин. ....	226
5.5.1	Формирование матрицы жесткости плоского треугольного конечного элемента в локальной системе координат с учетом деформации ползучести.....	232
5.6	Устойчивости прямоугольных пластин с учетом геометрической нелинейности. ....	236
5.7	Влияние отверстий на выпучивание прямоугольных пластин при ползучести. ...	240
5.8	Выводы по главе 5 .....	243
<b>6</b>	<b>ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕОЛОГИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ и МОДЕЛИРОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ПОЛИМЕРНЫХ СТЕРЖНЕЙ .....</b>	<b>245</b>
6.1	Определение реологических параметров полимерных материалов по кривым сдвиговой ползучести и с использованием методов нелинейной оптимизации ...	245
6.1.1	Определение реологических параметров при сдвиге .....	246
6.1.2	Определение реологических параметров при изгибе .....	252

6.2	Определение упругих механических характеристик .....	259
6.2.1	Определение динамического модуля упругости методом импульсного воздействия вибрации .....	259
6.2.2	Экспериментальное определение Модуля Юнга из условия изгиба .....	263
6.3	Экспериментальное определение зависимости критического времени от нагрузки. Сравнение с теоретическим результатом .....	266
6.3.1	Основные этапы потери устойчивости в условиях ползучести. Предварительные опыты. ....	266
6.3.2	Сжатие стержней с постоянной скоростью сближения торцов. Тестирование экспериментальной установки .....	269
6.3.3	Определение зависимости критического времени от нагрузки .....	271
6.3.4	Сравнение теоретических результатов с экспериментом .....	275
6.4	Выводы по главе 6 .....	277
<b>7</b>	<b>ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ.....</b>	<b>278</b>
	<b>БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК .....</b>	<b>280</b>
<b>8</b>	<b>ПРИЛОЖЕНИЕ 1. (ПРОГРАММЫ РАСЧЕТА НА ЭВМ).....</b>	<b>297</b>
<b>9</b>	<b>ПРИЛОЖЕНИЕ 2. (ВНЕДРЕНИЯ, ПАТЕНТЫ И СВИДЕТЕЛЬСТВА О ГОСУДАРСТВЕННОЙ РЕГИСТРАЦИИ ПРОГРАММ ДЛЯ ЭВМ) .....</b>	<b>314</b>

## **ВВЕДЕНИЕ**

### **Актуальность исследования**

Использование материалов, обладающими свойствами реологии в качестве конструкционных, предъявляет к изделиям из них определенные требования надежной работы при заданных режимах эксплуатации. Практическое обеспечение этого требования связано прежде всего с разработкой инженерных методов расчета, которые с достаточной полнотой учитывали бы многообразие силовых, температурных и других воздействий на несущие элементы конструкций.

Исследование вопросов устойчивости элементов конструкций из материалов, обладающими свойством реологии, в зависимости от постановки и методов решения, особенно в случаях сочетания нагрузок с начальными несовершенствами крайне сложно. Если добавить учет переменной жесткости и косвенной непрерывной неоднородности, то такая постановка задачи приближает конструктивную схему к реальным объектам.

Сложность аналитического или численного расчета резко возрастает при учете физической или геометрической нелинейности материала. Многие исследователи, используя цифровые вычислительные комплексы, стараются решать нелинейные задачи теории вязкоупругости в строгой корректной постановке, максимально точно описывая топологию конструкции и приближая расчетную схему к реальной работе.

Разработанные в последнее время расчетные комплексы, основанные на МКЭ, в частности, ABAQUS, ANSYS, LS-DYNA, Nastran, Plaxis, ПК ЛИРА предлагают использовать готовые модули для проведения вычислительных экспериментов (моделирования). Но есть некоторые проблемы, в частности, в вышеперечисленных комплексах используются модели, которые разработаны изначально для конкретных материалов, что вынуждает исследователей дописывать, или корректировать подпрограммы для других материалов, в частности, для полимеров и композитов на их основе.

Современное развитие промышленности полимерных материалов строительного назначения и как следствие реология полимеров нашло свое место как самостоятельная, в теоретическом отношении область знаний, что повлекло за собой формирование основных взаимосвязанных между собой направлений исследований, имеющих свои методы и приложения, свой ареал адептов, в частности:

- прикладная реология, вектор исследований которой направлен на решение инженерных задач с последующей оценкой поведения реологически сложных материалов в условиях различных геометрических схем деформирования, а с другой стороны, с аффилиацией полимерных материалов, основываясь на характеристиках их реологических свойств;

- теоретическая реология как раздел строительной механики с широким диапазоном исследования принципов деформации материалов («ползучесть сложных сред» при наложении больших обратимых деформаций на необратимые;

Исходя из вышеизложенного, вопрос развития методов расчета и прогнозирования прочности и устойчивости конструктивных элементов из полимеров и композитов на их основе (полимербетонных, дощатоклееных и других) с учетом физической и геометрической нелинейности, реологических свойств материала, можно отнести к одному из приоритетных направлений в строительной механике и механике полимеров.

### **Степень разработанности проблемы**

Исследования в направлении прочности и устойчивости стержней и пластин в нелинейной постановке проводятся еще с начала прошлого века А.Г. Greenhill, М.Хейм, Ф.С. Ясинским, Н. Engelhardt, М. Levy, G.H. Halphen, G. H. Bryan, С.П. Тимошенко и др. Несмотря на это до сих пор многие аспекты этого вопроса остаются малоизученными. К примеру, расчет на устойчивость с учетом ползучести пластин и стержней переменной геометрии, учет непрерывной неоднородности упругих и реологических свойств рассматриваемого конструкционного материала.

Вопросам расчета пластин и стержней на выпучивание с учетом реологии материала посвятили свои работы такие ученые, как С.П. Тимошенко, В.В. Петров, Н.А. Алфутов, А.С. Вольмир, В.З. Власов, А.Р. Ржаницын, Ю.Н. Работнов, В.И. Травуш, Л.М. Качанов, А.Л. Рабинович, В.Л. Бажанов, И.И. Гольденблат, О. Зенкевич, О.К. Морачковский, Н.И. Карпенко, А.А. Трещев, Ю.В. Немировский, А.П. Янковский, В.И. Андреев, Р.А. Турусов, А.Г. Тамразян, Г.Г. Кашеварова и др. Общую теорию ползучести, применительно к стержневым элементам и пластинкам развивали Ю.Н. Работнов, В.С. Федоров, В.Н. Сидоров, П.А. Акимов, Л.М. Качанов, А.Р. Ржаницын, Н.Х. Арутюнян, Н. И. Безухов, Н. Н. Малинин, В.Д. Харлаб и др.

Задачам расчета напряжено-деформированного состояния и устойчивости полимерных стержней, пластин и оболочек с учетом ползучести, посвящены работы А.А. Аскадского, В. И. Андреева, И. И. Гольденבלата, Р.А. Турусова, А.Я. Гольдмана, А. Л. Рабиновича, А. Я. Малкина, С. А. Тимашева, В. И. Климанова, Б. М. Языева, А. С. Чепурненко, и др.

Многие авторы практически не рассматривали нелинейную ползучесть, помимо этого, большая часть нелинейных реологических моделей относится к одноосному напряженному состоянию, что автоматически создает непреодолимое препятствие в применении их моделей для расчета тонкостенных конструкций, конкретно пластин или оболочек.

С одной стороны, оптимальный выбор наиболее приемлемого уравнения состояния для рассматриваемого материала элемента конструкции – решение всех конкретных проблем и в конечном счете – дело вычислительной техники, но это не совсем обоснованно и ложное предположение. Возникают другие принципиальные проблемы, непосредственно относящиеся к реологии: проблема граничных условий и проблема устойчивости вычислительного процесса.

Например, представленные проф. А.А. Аскадским и проф. А. Я. Малкиным решения самых разнообразных уравнений состояния с различными ядрами и резольвентами, различного строения материала, показали, что использование численных методов решения далеко не всегда дает надежные результаты. Этот принципиально важный аспект выбора и формулировки уравнений связи требует наложения строгих ограничений на возможность применения тех или иных подходов для решения прикладных инженерных задач.

Отметим еще один немаловажный фактор, заключающийся в том, что в современных пакетах, использующих МКЭ, заложен ограниченный набор реологических моделей, которые позволяют учитывать ползучесть при расчетах. Эти модели либо ориентированы на какой-то конкретный материал, либо отсутствует вовсе возможность учета ползучести, что ограничивает исследователей в полноценном использовании расчетного комплекса.

### **Научно-техническая гипотеза**

Гипотеза заключается в разработке методологии научного подхода в расчетах на устойчивость, описывающего механическое поведение полимерных стержней и пластин строительного назначения, отличительной характеристикой которых является наличие у них большой доли обратимых высокоэластических деформаций, не совпадающих по фазе с напряжениями, что обуславливает большую, чем у металлов и бетона зависимость физико-механических характеристик от скорости деформации, температуры и длительности воздействия нагрузок, как следствие, относительно большую возможность «холодной» ползучести и несоизмеримо большую роль релаксационных процессов.

Характерной особенностью для деформаций ползучести (высокоэластических деформаций) является наличие спектра времен релаксации, который необходимо учитывать в расчетах на устойчивость и прочность.

### **Цель исследования**

Заключается в разработке научных основ моделирования процессов выпучивания полимерных стержней, арок и пластин строительного назначения и совершенствование методов расчета на устойчивость при нелинейной ползучести с учетом переменной жесткости и неоднородности материала.

### **Задачи исследования**

Согласно намеченной цели, были сформулированы и поставлены следующие задачи:

1. Обобщить существующие теоретические и экспериментальные исследования и провести анализ состояния проблемы, сформулировать базовые положения теории эволюционного моделирования применительно к решению задач устойчивости стержней, арок и пластин, включая общую постановку задач.
2. Выполнить экспериментальную оценку определив реологические параметры полимеров строительного назначения из испытаний на сдвиг в условиях ползучести, на изгиб с

использованием методов нелинейной оптимизации и разработать соответствующую методику их определения, с последующей эмпирической верификацией.

3. Разработать численно-аналитический аппарат оценки устойчивого равновесия стержней с учетом выявленных особенностей в их действительной работе, в частности, переменной жесткости, собственного веса и деформаций ползучести с учетом спектра времен релаксации.

4. Предложить инженерные методы расчета на изгибно-крутильную потерю устойчивости вязкоупругих призматических балок переменной жесткости и выполнить сравнительную оценку; создать компьютерные программы, реализующие расчётный аппарат предложенных методов.

5. Разработать методику расчета арочных конструкций и моделирования деформаций с учетом реологических особенностей дерева и бетона для оценки их работоспособности при длительных воздействиях.

6. Получить универсальные разрешающие уравнения изгиба и устойчивости круглых гибких пластинок, а также устойчивости нелинейно вязкоупругих прямоугольных пластин, находящихся под действием усилий в срединной плоскости, с учетом геометрической нелинейности, провести численные исследования при решении задач устойчивости пластин в условиях нелинейной ползучести и дать оценку влияния ослаблений в виде отверстий на величину критического времени и критической силы.

7. Провести численную и эмпирическую верификацию предложенных моделей путем сопоставления результатов расчетов на устойчивость с данными, полученными при анализе деформаций объектов в сертифицированных программных комплексах и с данными проведенных экспериментов на устойчивость термопластичных стержней при ползучести.

#### **Объект исследования**

Объектом исследования являются призматические стержни, балки, арки и тонкие пластины переменной жесткости и неоднородной структуры из бетона, дерева и полимеров конструкционного назначения.

#### **Предмет исследования**

Адаптированные методы, математическое моделирование для конструкций и их элементов, эксплуатируемых в нормальных условиях, и конструктивных систем, имеющих риск потери устойчивости, а также влияния вязкоупругих характеристик и спектра времен релаксации на критическую силу и критическое время.

#### **Область исследований**

В соответствии с паспортом специальности ВАК 2.1.9. Строительная механика включает следующие области исследований:

- п. 2: «Линейная и нелинейная механика конструкций, зданий и сооружений, разработка физико-математических моделей их расчета»;

- п. 3: «Аналитические методы расчета зданий, сооружений и их элементов на прочность, жесткость, устойчивость, при статических, динамических, температурных нагрузках и других воздействиях»;
- п. 4: «Численные и численно-аналитические методы расчета зданий, сооружений и их элементов на прочность, жесткость, устойчивость при статических, динамических, температурных нагрузках и других воздействиях.»
- п. 11: «Экспериментальные методы исследования зданий, сооружений и их элементов».

### **Методы исследования**

Для анализа вопросов устойчивости стержней и пластин выполнено моделирование с применением математического аппарата теории упругости и ползучести. Исследование базируется на использовании системного подхода, позволяющего раскрыть многообразие проявлений изучаемого объекта в целостности и единстве. Все вычисления проведены на базе современных ПЭВМ с применением математического пакета MATLAB. Выполнялось сравнение результатов в упругой постановке с решением в программных вычислительных комплексах (ПК Лира САПР, ANSYS).

### **Научная новизна**

1. Предложен алгоритм определения реологических параметров термопластичного материала с использованием методов нелинейной оптимизации.
2. Предложен численно-аналитический метод для реализации решения и анализа задач устойчивости стержней и полос переменной жесткости по длине при поперечном и продольном нагружении с учетом собственного веса.
3. Разработан и реализован на ЭВМ алгоритм определения критической нагрузки при боковом выпучивании с учетом ползучести энергетическим методом с использованием форм Бубнова-Галеркина, Ритца-Тимошенко и методом конечных элементов для балок постоянного и переменного сечения.
4. Получены разрешающие уравнения и разработан итерационный алгоритм определения напряжённо-деформированного состояния, а также анализа устойчивости деревянных и железобетонных арок с учетом одновременно геометрической и физической нелинейности, что позволило расширить границы применимости полученных результатов.
5. При квазистатическом процессе расчета проведена модернизация и усовершенствован алгоритм определения деформаций ползучести с введением новой величины длительной критической силы для полимерных стержней и пластин. Разработан универсальный, подходящий для произвольных уравнений состояния, численный алгоритм расчета устойчивости полимерных стержней и пластин на основе метода конечных элементов с учетом физической и геометрической нелинейности.

6. Создана математическая модель для эффективного расчета полимерных стержней и пластин конструкционного назначения на термосиловое воздействие с учетом функциональной зависимости физико-механических характеристик материала, геометрической и физической нелинейности, а также учет двух и более составляющих спектра времен релаксации материала.

7. Предложен новый критерий для определения критического времени, основанный на полученных графических зависимостях, в частности, локального минимума при изменении во времени нормальных напряжений.

8. Представлены предложения по дальнейшему совершенствованию используемых методов расчета на устойчивость элементов конструкций из полимера путем введения интегральных величин, определяющих часть деформаций ползучести, и их учета в разрешающих уравнениях для анализа полученных результатов.

### **Теоретическая значимость**

Теоретическая значимость работы состоит в развитии методов расчета на напряженно-деформированное состояние и устойчивость термопластичных призматических стержней и пластин с учетом нелинейной ползучести при термосиловом воздействии, а также с учетом косвенной неоднородности. Доказано, что полученные системы разрешающих уравнений для полимерных стержней и пластин, позволяют решать широкий круг задач данного раздела строительной механики и механики полимеров.

Разработанные алгоритмы при незначительной модификации могут быть применены к другим, не рассмотренным в диссертации объектам, например, оболочкам.

Предложенные модели имеют следующие достоинства:

1. Позволяют для термопластичных стержней, испытывающих действие продольной силы в условиях ползучести, определить величину длительной критической нагрузки, превышение которой приводит к потере устойчивости с течением времени;
2. Способствует выявлению и исследованию явления перераспределения напряжений и внутренних усилий в ортотропных пластинках при ползучести;
3. Позволяют провести оценку погрешности теории стержней и пластин из полимера применительно к задачам ползучести на основе конечно-элементного моделирования.

### **Практическая значимость**

1. Разработан и представлен алгоритм и программное обеспечение для обработки кривых ползучести и релаксации на основе уравнения состояния полимера. На примере вторичного поливинилхлорида, пенополиуретана, эпоксидного связующего, полипропилена доказано высокое качество аппроксимации экспериментальных кривых.

2. Разработан и внедрен пакет прикладных программ в среде MATLAB для расчета на ползучесть пластин и стержней различной формы при использовании произвольного закона уравнения состояния (интегральной или дифференциальной формы).



3. Рекомендован новый подход к использованию энергетического метода, заключающимся в том, что, уравнение упругой линии и форма стержня задается в виде полинома, содержащего неопределенные коэффициенты и неопределенные показатели степени. Предложенный подход позволил определить точные значения критической нагрузки при особом изменении поперечного сечения стержня и с учетом его собственного веса. Предложены расчетные формулы для определения критической силы и напряжения.

4. На основе анализа полученных решений в процессе ползучести, обоснована и введена новая величина длительной цилиндрической жесткости, и длительный коэффициент Пуассона. Данное утверждение дает возможность с использованием известных методов решения упругих задач определять перемещения и напряжения в конце процесса ползучести.

#### **Достоверность результатов и обоснованность полученных результатов**

Степень достоверности результатов работы подтверждается использованием фундаментальных теоретических положений строительной механики, апробированных методов теории расчета деревянных, железобетонных и полимерных конструкций или их элементов, изложенных в нормативной литературе.

Обоснованность полученных результатов подтверждается достаточным объемом теоретических и экспериментальных исследований, проведенных на сертифицированном и поверенном оборудовании, использованием фундаментальных законов механики сплошной среды в упругой и вязкоупругой постановках, сравнением результатов с решениями в существующих программных комплексах.

#### **Положения, выносимые на защиту**

- 1) Базовые теоретические положения для адаптации разработанных алгоритмов к решению задач устойчивости полимерных стержней и пластин конструкционного назначения, деревянных и железобетонных арок;
- 2) Методика обработки кривых ползучести и релаксации и получение на их основе значений реологических параметров для уравнения связи.
- 3) Численно-аналитическое представление и методы решения задач устойчивости для стержней и пластин с учетом реологии материала в физически и геометрически нелинейной постановках;
- 4) Методика определения длительных критических нагрузок для сжатых стержней из материалов, реологическое поведение которых можно описать обобщенным уравнением состояния Максвелла-Гуревича и Максвелла-Томсона с учетом дискретного спектра времен релаксации;
- 5) Разрешающие уравнения, алгоритмы расчета и результаты теоретического исследования изгибно-крутильной формы потери устойчивости вязкоупругих стержней переменной жесткости;

6) Алгоритм конечно-элементного моделирования прочности и устойчивости полимерных пластин и железобетонных арок при ползучести с учетом геометрической нелинейности.

7) Сравнительные результаты решений, полученных на основе классических методов и алгоритмов расчета на устойчивость, а также сравнение их с результатами экспериментальных исследований на устойчивость полимерных стержней.

**Личный вклад автора** состоит в:

1. формулировке проблемы, цели и задач исследования, где автору принадлежит определяющая роль, также, как в постановке теоретических задач, так и в планировании и проведении экспериментов, анализе и обобщении полученных результатов;
2. в развитии и расширении области использования модели для решения задач напряженно-деформированного состояния и устойчивости элементов из полимеров конструкционного назначения, деревянных балок и железобетонных арок в условиях ползучести;
3. получении всех разрешающих уравнений для решения новых классов задач устойчивости стержней, балок и пластин с учетом реологии материала, разработке методов численного и аналитического решения и анализа поставленных задач.

**Апробация работы**

Основные результаты исследований, выполненные автором в рамках настоящей диссертационной работы, доложены на различных международных научно-практических конференциях:

1. Международная научно-техническая конференция «Строительство и Архитектура: Теория и практика инновационного развития» CATPID-2017,2018, 2021, 2022 (г. Нальчик); CATPID-2019 (г. Кисловодск);
2. International scientific conference "INTEGRATION, PARTNERSHIP AND INNOVATIONS IN CONSTRUCTION SCIENCE AND EDUCATION", MGSU, 12-14 November 2014.
3. XXVII Российско-Польско-Словацкий семинар «Теоретические основы строительства» (XXVII R-S-P Seminar «Theoretical Foundation of Civil Engineering»), организуемый ежегодно при участии НИУ МГСУ. (Ростов-на-Дону), 2018 г.
4. XXVIII Российско-польско-словацкий семинар «Теоретические основы строительства» (XXVII R-S-P Seminar «Theoretical Foundation of Civil Engineering»), организуемый ежегодно при участии НИУ МГСУ (Жилина, Словакия), 2019 г.
5. Международная научно-техническая конференция ICMTMTE 2017,2018,2019 (г. Севастополь).
6. Международная научно-техническая конференция «Пром-Инжиниринг – 2016» (г. Челябинск).
7. Международная научно-техническая конференция SPbWOSCE - 2016 «Smart City» (г. Санкт-Петербург).

8. 15-й международной научной конференции «Underground Urbanisation as a Prerequisite for Sustainable Development» (г. Санкт-Петербург, 2016).
9. Международной научно-практической конференции, посвященной 95-летию ФГБОУ ВПО «ГГНТУ им. акад. М. Д. Миллионщикова (г. Грозный, 2015).
10. I Всероссийской многопрофильной научно-практической конференции молодых ученых опорных университетов России (г. Ростов-на-Дону, 2017).
11. Научно-практической конференции «Строительство и архитектура – 2017-18» (г. Ростов-на-Дону).
12. Семинарах кафедры «Соппротивление материалов» и «Техническая механика» Ростовского государственного строительного университета (г. Ростов-на-Дону, 2015, 2016).
13. Семинарах кафедры «Соппротивление материалов» и «Техническая механика» Донского государственного технического университета (г. Ростов-на-Дону, 2020-2022).
14. XIV Международной научно-практической конференции «Новые полимерные композиционные материалы. Микитаевские чтения» (г. Нальчик, 2018); XV Международной научно-практической конференции «Новые полимерные композиционные материалы. Микитаевские чтения» (г. Нальчик, 2019), XVI Международной научно-практической конференции «Новые полимерные композиционные материалы. Микитаевские чтения» Online (г. Нальчик, 2020).

Под руководством С. Б. Языева успешно защищены 2 кандидатские диссертации (Муханов А.В., Козельский Ю.Ф.) и две работы представлены к защите.

По результатам диссертационной работы автору в составе авторского коллектива присуждена серебряная медаль РААСН в 2020 году (выписка из протокола президиума РААСН №5 от 20.03.2020).

Работа выполнена в целевой докторантуре ФБГОУ ВО «ДГТУ» под научным консультированием академика РААСН, д.т.н., профессора, профессора кафедры «Соппротивление материалов» НИУ МГСУ В.И. Андреева.

#### **Внедрение результатов исследования**

В виде пакета прикладных программ основные результаты научного исследования внедрены в ООО «Научно-исследовательский центр «НИКА» (г. Казань), ООО «СевкавНИПИагропром» (г. Ростов-на-Дону), практику проектирования группы компаний АКССстрой (г. Аксай), а также в образовательный процесс в Донском государственном техническом университете при подготовке аспирантов по направлению 2.1.9 Строительная механика.

#### **Публикации**

Основные положения диссертационной работы опубликованы в 54 печатных работах, из них 23 работы в ведущих рецензируемых научных изданиях, определенных ВАК РФ, 31 статья –

в изданиях, входящих в наукометрические базы данных Web of Science и Scopus, 4 монографии. Получены 4 авторских свидетельства на программы для ЭВМ, 1 патент.

### **Структура и объем работы**

Диссертационная работа состоит из введения, шести глав, заключения, приложения, списка литературы. Работа изложена на 321 страницах машинописного текста, включающего 199 рисунка, 33 таблицы и 2 приложения.

## 1 СОСТОЯНИЕ ВОПРОСА. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

### 1.1 Реология как раздел механики сплошных сред. Связь деформаций ползучести с компонентами тензора напряжений.

Представление об общей сущности молекулярного механизма деформации впервые развил Пуассон в 1829 г. при выводе уравнений течения вязкой сжимаемой жидкости [1], получивших со временем название уравнений Навье — Стокса. Свою идею он применил к простейшей модели тела как системы материальных точек, связанных действием центральных сил.

Впоследствии Максвелл дал идее Пуассона более детальное молекулярно-кинетическое истолкование и указал [2] общий характер соответствующей этому истолкованию зависимости между деформациями и напряжениями (применительно к случаю любого изотропного тела, испытывающего помимо Гуковской, только полностью необратимую деформацию). Тем самым Максвелл дал исходные предпосылки для построения общей теории деформируемости.

Концепцию «вязкости» и ползучести принадлежит Кельвину [3], а исследования релаксации (Kohlrusch [4]).

В первой четверти XX столетия были опубликованы трактаты о реологии полимеров, с введением понятия вязкоупругости и высокоэластичности полимеров (А.П. Алесандров [5,6]), Leaderman [7], Ferry [8], высокоэластичность полимерных растворов (Philippoff [9] и Weissenberg [10]). Развитие основ теории больших деформаций по праву можно отнести к Hencky [11].

За последние 20-25 лет в приведенных направлениях по исследованию реологии были достигнуты определенные успехи.

Монография Л.И. Седова [19], а также фундаментальные исследования многих авторов Oldroyd [13,14], Coleman-Noll [15, 16], Truesdell [17, 18], показали общие способы построения уравнений состояния реологически сложных сред, т.е. материалов, при деформации которых имеет место наложение необратимого течения и больших упругих деформаций.

В ряде дальнейших исследований [20,21], были установлены общие принципы создания реологических уравнений состояния и их ограничения

Как показала практика, в частности, в работах [22, 23] решение большого количества реологических уравнений состояния различного строения оказывается математически неустойчивым и как следствие, использование численных методов решения далеко не всегда дает надежные результаты. Этот почти формальный, но тем не менее принципиально важный аспект выбора и формулировки реологического уравнений состояния требует наложения строгих ограничений на возможность применения тех или иных подходов для решения прикладных задач.

Рассмотрим общие характеристики кривой напряжение-деформации.

На рисунке 1.1а показано семейство кривых поливинилхлорида в широком диапазоне температур, полученное при определенной скорости деформации.

При температурах выше перехода от каучукоподобного состояния к вязкотекучему (кривая 1) материал подчиняется законам течения ньютоновской жидкости, напряжение пропорционально скорости деформации. При температуре несколько ниже  $T_{тек}$  (кривая 2) в материале развиваются большие обратимые упругие деформации, и эта особенность сохраняется вплоть до температур, близких к  $T_g$ . С дальнейшим повышением температуры напряжение, необходимое для достижения заданной деформации, возрастает.

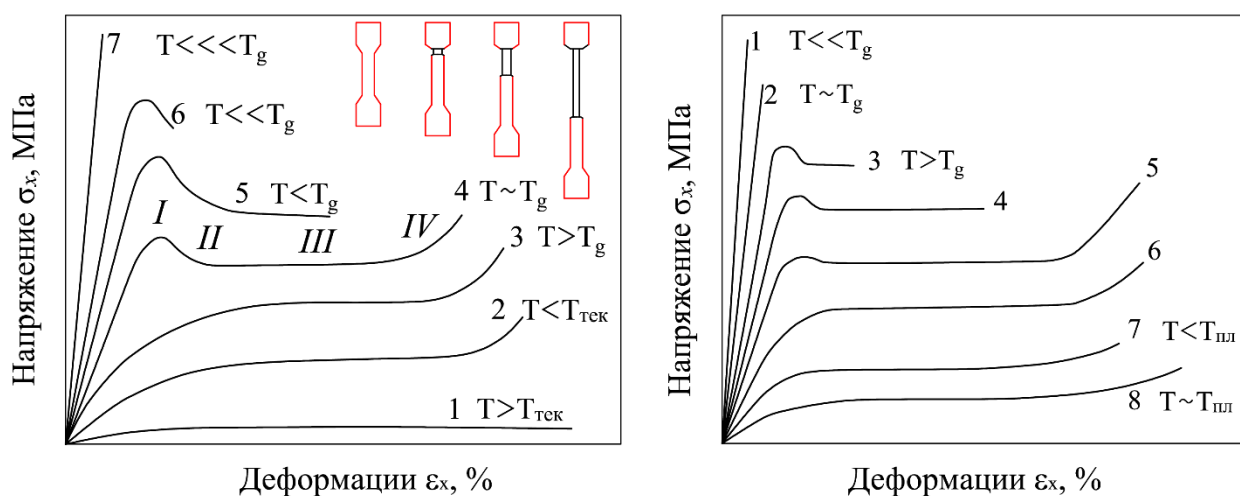


Рисунок 1.1 – Диаграммы деформирования полимеров: а — поливинилхлорида; б — кристаллического полимера

Снижение температуры до температуры стеклования  $T_g$  (кривая 4), материал вынужденно становится эластичным, то есть он растягивается до точки предела текучести, после чего напряжение довольно быстро снижается вплоть до того, при котором происходит холодная вытяжка.

Если сравнить исследуемые образцы (I и II) то можно сказать, что падение нагрузки связано с локализацией деформации в области образующейся шейки.

Последующая деформация при напряжении вытяжки вызывает разрастание шейки в обе стороны (III). Наконец, шейка охватывает всю длину образца (IV), и начинается растяжение ориентированного образца, характеризующееся возрастанием напряжения.

Если деформация происходит при температуре ниже  $T_g$ , ориентированное расположение цепей макромолекулы «замораживается» и при снятии нагрузки уже не происходит полного восстановления. Однако если материал нагреть выше температуры стеклования, сегменты цепей вновь обретут подвижность, произойдет полный возврат деформации, и материал образца восстановит первоначальную форму.

При более низкой температуре (кривая 5), как и у металлов, наблюдается предел текучести, после которого начинается холодная вытяжка, но в этом случае разрушение происходит раньше, чем шейка распространяется на всю длину образца; при еще более низкой температуре разрушение происходит тотчас после образования шейки (кривая 6). Наконец, при достижении подсостояния хрупкости ( $T_{\text{хруп}}$ ) материал ведет себя вполне хрупко, и его диаграмма напоминает «гуковскую» прямую.

Таким образом, можно сформулировать основные особенности влияния температуры на диаграммы растяжения аморфных полимеров:

1. При температуре выше  $T_{\text{тек}}$  материал вязкотекучий, деформации необратимы.
2. В интервале температур  $T_{\text{тек}} - T_g$  деформация при разгрузке полностью обратима.
3. В подсостоянии вынужденной эластичности в интервале температур  $T_g - T_{\text{хруп}}$  наблюдается вынужденная высокоэластическая деформация, которая при разгрузке полностью необратима, однако при нагревании выше  $T_g$  исходные размеры образца полностью восстанавливаются.
4. Ниже  $T_{\text{хруп}}$  материал вполне хрупок. Отметим, что температуры  $T_{\text{тек}}$ ,  $T_g$ ,  $T_{\text{хруп}}$  зависят от скорости деформации. С повышением последней материал становится более жестким и хрупким, и все три указанных перехода смещаются в область более высоких температур.

В заключение данного раздела рассмотрим особенности кривых напряжение — деформация для типичного высококристаллического полимерного материала, представленных на рисунке 1.1б. На первый взгляд они подобны кривым, показанным на рисунке 1.1а для аморфного полимера, однако характерные температурные области и механизмы деформации этих материалов существенно отличаются.

При температуре значительно ниже  $T_g$  аморфных областей полимеры обоих типов вполне хрупки, но, если для аморфных полимеров возможны большие деформации в подсостоянии вынужденной эластичности (кривые 4,5 на рисунке. 2.1, а), то у высококристаллических полимеров они отсутствуют. На кривой 3 (рисунок. 1.1, б) отчетливо наблюдается предел текучести и по мере дальнейшего роста температуры образуется шейка и развивается холодная вытяжка (кривая 4).

В рассматриваемом интервале температур разрушение часто происходит еще до того, как шейка распространилась на весь образец. При более высоких температурах (кривые 5, 6) холодная вытяжка происходит полностью, и напряжение возрастает при растяжении образца, полностью перешедшего в шейку уже за счет растяжения самих молекулярных цепей. Когда температура испытания приближается к температуре плавления  $T_{\text{плав}}$ , величина обратимой после разгрузки деформации возрастает, выше  $T_{\text{плав}}$  материал превращается в вязкую жидкость.

Характеристики кривых напряжение — деформация кристаллических полимеров можно обобщить следующим образом:

1. Температура хрупкости  $T_{\text{хруп}}$  близка к температуре стеклования  $T_g$  аморфных областей для высококристаллических полимеров, в то время как для низкокристаллических материалов  $T_{\text{хруп}}$  может оказаться существенно ниже  $T_g$ .
2. В интервале температур  $T_g - T_{\text{плав}}$  происходит холодная вытяжка, причем у низкокристаллических материалов этот процесс возможен и ниже  $T_g$  в результате деформации аморфных областей.
3. Полученная холодной вытяжкой структура имеет высокую прочность.
4. Свойства и характерные температуры для кристаллических полимеров зависят от скорости деформации.

Заметим, что образование шейки и холодная вытяжка имеют место как в частично кристаллических, так и аморфных полимерах, однако механизмы явлений в обоих случаях различны.

Для аморфных и кристаллических полимеров в эксплуатационной области температур наблюдаются участки диаграмм однородного растяжения, анализ которых чрезвычайно важен при использовании полимеров как конструкционных материалов.

При использовании кристаллических полимеров в качестве конструкционных материалов необходимо знать их упругие, прочностные и деформативные характеристики в условиях, когда еще сохраняется первоначальная структура материала. Поскольку параметры диаграммы растяжения зависят от скорости деформирования и температуры, то характеристики конструкционных материалов могут быть получены лишь на основе серии диаграмм растяжения, определенных в широком диапазоне скоростей деформации и температур

Путем последовательного усовершенствования опытных образцов, изготовление элементов конструкций нередко ведется эмпирическими методами.

Связь деформаций ползучести с компонентами тензора напряжений принимается отвечающей соотношениям теории ползучести типа течения. Необходимо отметить, что сама составляющая деформации ползучести заложена не в матрице жесткости системы, а как добавка к внешним узловым силам “фиктивных” сил, обусловленных деформациями ползучести. Этим подходом воспользуемся и мы в настоящем исследовании. Тогда в каждый интервал времени систему определяющих уравнений можно представить, как:

$$[K]\{q\} = \{Fq\} + \{Fc\}, \quad (1.1)$$

где  $[K]$  – матрица жесткости системы

$\{Fq\}$  – вектор узловых внешних сил

$\{Fc\}$  – вектор “фиктивных” сил (вызванных деформациями ползучести).

Из множества известных реологических уравнений состояния или теорий ползучести можно классифицировать их следующей последовательности: теория течения, теория старения, теория упрочнения, наследственная теория. Приведем их ниже.



1. Согласно теории течения, функциональная связь между скоростью деформации ползучести и медленно меняющимся напряжением, а также временем, можно представить в общем виде:

$$\frac{\partial \varepsilon^*}{\partial t} = f(\sigma, t). \quad (1.2)$$

Согласно известным экспериментальным данным, можно отметить, что зачастую результаты при использовании теории течения оказываются спорными, но удовлетворительными. Но есть исследования, которая доказывает, что теория течения систематически занижает скорость ползучести при увеличении нагрузки последовательно. [24,25].

2. В общем случае уравнение состояния согласно теории старения, включающая в себя время в явном виде, можно привести как:

$$f(\varepsilon, \sigma, t) = 0. \quad (1.3)$$

Достоинство данной теории состоит в крайней простоте записи уравнения связи.

Для функции  $f(\sigma, t)$  не обязательно задаваться аналитическим выражением и численной реализации достаточно непосредственно кривые ползучести (при  $\sigma = const$ ), в обычных координатах «деформация  $\varepsilon^*$  – время  $t$ ».

Для описания ползучести полимера, в частности, пенополиуретана, М. Garrido и др. [25,26] используется степенной закон Финдли, относящийся непосредственно к теории старения:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E_e} + \frac{\sigma}{E_t} t^n. \quad (1.4)$$

В знаменателях слагаемых  $E_e$  и  $E_t$  – соответственно упругий и вязкоупругий модуль деформации материала. В дальнейшем при определении упругих и вязкоупругих констант мы воспользуемся уравнением (1.4). Недостаток теории - время в явном виде.

3. В настоящий момент исследователи прибегают к использованию теории ползучести как теории упрочнения и наследственные теории.

Уравнения теории упрочнения связывают в форме некоторой аналитической зависимости напряжения, деформации и их скоростей:

$$f(\sigma, \dot{\sigma}, \varepsilon, \dot{\varepsilon}) = 0. \quad (1.5)$$

Так, например, для пенопластов используется закон Фойгта, который при сдвиговой ползучести запишется в виде:

$$\tau = \eta \frac{\partial \gamma}{\partial t} + H\gamma, \quad (1.6)$$

где  $\eta$  — коэффициент вязкости пенопласта;  $H$  — длительный модуль сдвига;  $\tau$  — касательное напряжение;  $\gamma$  — угол сдвига.

Соотношение (1.6) можно считать частным случаем теории упрочнения широко используемое в периодическом научном издании линейное уравнение Максвелла-Томпсона.

Скорость роста деформации ползучести для закона Максвелла-Томпсона записывается в виде [27]:

$$\frac{\partial \varepsilon^*}{\partial t} = \frac{1}{nE} \left( \left( 1 - \frac{H}{E} \right) \sigma - H \varepsilon^* \right), \quad (1.7)$$

где  $E$  и  $H$  – соответственно мгновенный и длительный модуль упругости,  $n$  – время релаксации.

### 1.1.1 Линейная вязкоупругость

Основополагающими линейной теории вязкоупругости считаются работы Больцмана (1876 г.) и Вольтерры (1913 г.), в которых сформулирован один из основополагающих принципов этой теории — принцип суперпозиции. С другой стороны, теория вязкоупругости основывается на теории реологических моделей, восходящих к Максвеллу и Фойхту (1867 г.).

Большой вклад в развитие теории вязкоупругости внесли работы советских ученых Н.Х. Арутюняна [28], Болотина В.В. [29,30], Ю.Н. Работнова [31,32,33,34,35], А.Ю. Ишлинского [36], А.А. Ильюшина [37,38,39,40,41], А. Р. Ржаницына [42,43,44,45,46,47], Л.М. Качанова [48], М.И. Розовского [49,50], А.К. Малмейстера [51] и др.

М. Гуртин и Е. Штернберг в своих работах установили для теории ползучести изотропных тел аналоги уравнений равновесия в перемещениях (уравнений Ламе), уравнений сплошности в напряжениях (уравнений Бельтрами–Митчелла), теоремы взаимности работ (теоремы Бетти), а также аналоги общего решения однородных уравнений в форме Б. Г. Галеркина [52] и П. Ф. Папковича. Аналог уравнений Бельтрами–Митчелла использовался раньше также Н. Х. Арутюняном [28].

Следуя линейной теории наследственной ползучести, полная деформация имеет вид:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E} + \varepsilon^*(t) \quad (1.8)$$

где  $\sigma(t)$  – напряжение,  $\varepsilon^*(t)$  – деформация ползучести.

Вторым слагаемым в приведенном выше соотношении принято называть – деформация ползучести. Деформация ползучести в момент времени  $t$  в интегральном виде записывается:

$$\varepsilon^*(t) = \int_0^t K(t - \tau) \sigma(\tau) d\tau. \quad (1.9)$$

где  $K(t - \tau)$  – ядро ползучести,  $\tau$  – переменная интегрирования, меняющаяся от 0 до  $t$ ,  $t$  текущий момент времени.

Деформации наследственной ползучести после разгрузки являются полностью обратимыми (упругое последствие).

Больцманом было предложено выражение для ядра ползучести в явном виде:

$$K(t - \tau) = \frac{C}{t - \tau}, \quad (1.10)$$

где  $C > 0$  – некоторая постоянная, зависящая от материала.

Приведенное ядро имеет некоторую особенность, в частности, что при  $t = \tau$  скорость деформации равна бесконечности, и интеграл расходится, то есть, в точке  $t = \tau$ , появляется сингулярность ядра.

Приведем пример несингулярного ядра в линейной теории наследственности, например, сумма экспоненциальных функций:

$$K(t - \tau) = \sum_{k=1}^n \alpha_k e^{-\lambda_k(t-\tau)}, \quad (1.11)$$

где  $\alpha_k > 0$  и  $\lambda_k > 0$  – постоянные материала.

Чем привлекательна экспоненциальное ядро. Оно позволяет перейти от интегральной формы закона ползучести к дифференциальной. К ней можно отнести, например, ядро Абеля:

$$K(t - \tau) = \frac{C}{(t - \tau)^\alpha} \quad C > 0, 0 < \alpha < 1. \quad (1.12)$$

Некоторая систематизация ядер и резольвент проведена в (таблице 1.1).

Таблица 1.1. Характеристические функции, используемые для аппроксимации ползучести и релаксации

Ядро	Резольвента
$\frac{A \cdot \exp(-\beta(t-s))^{k_2}}{(t-s)^{1-k_1}}$	$\frac{\exp(-\beta(t-s))^{k_2}}{(t-s)^{k_1}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[A\Gamma(\frac{k_1+k_2-1}{k_1})(t-s)^{n(k_1+k_2-1)}]}{\Gamma[n(\frac{k_1+k_2-1}{k_1})]}$ <i>М.А. Колтунов</i>
$\frac{\alpha_2 \lambda_2 \gamma \cdot \exp(-\gamma(t-s))^{\alpha_2}}{(t-s)^{1-\alpha_2}}$ <i>Г.Л. Слонимский</i>	$\frac{\exp(-\gamma(t-s))^{\alpha_2}}{(t-s)^{1-\alpha_2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[\alpha_2 \lambda_2 \gamma \Gamma(2 - \frac{1}{\alpha_2})]^n (t-s)^{n(2\alpha_2-1)}}{\Gamma[n(2 - \frac{1}{\alpha_2})]}$
$\frac{\alpha_2 \lambda_1 \cdot \exp(-(t-s))^{\alpha_1}}{(t-s)^{1-\alpha_1}}$ <i>А.П. Бронский</i>	$\frac{\exp(-\beta(t-s))^{\alpha_1}}{(t-s)^{\alpha_1}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[\alpha_1 \lambda_1 \Gamma(2 - \frac{1}{\alpha_1})]^n (t-s)^{n(2\alpha_1-1)}}{\Gamma[n(2 - \frac{1}{\alpha_1})]}$ <i>М.А. Колтунов</i>
$\frac{A \cdot \exp(-\beta(t-s))}{(t-s)^{1-\alpha}}$ <i>А.Р. Ржаницын</i>	$\frac{\exp(-\beta(t-s))}{(t-s)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[A\Gamma(\alpha)^n (t-s)^{n\alpha}]}{\Gamma(n\alpha)}$ <i>М.А. Колтунов, В.Н. Безухов</i>
$\frac{A \cdot \alpha}{(t-s)^{1-\alpha}}$	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[A\Gamma(\alpha)^n (t-s)^{n\alpha-1}]}{\Gamma(n\alpha)}$ <i>М.А. Колтунов</i>
$\frac{A \cdot (t-s)^\alpha}{\Gamma(1+\alpha)}$ <i>Ю.Н. Работнов</i>	$(t-s)^\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A(\beta)^n (t-s)^{n(\alpha+1)}}{\Gamma(n+1)(\alpha+1)}$ <i>Ю.Н. Работнов</i>

Отметим, что дробноэкспоненциальная функция Ю. Н. Работнова [35] может использоваться не только как ядро релаксации, но и как ядро ползучести, например, когда материал обнаруживает ограниченную во времени ползучесть:

$$K(t - \tau) = \frac{(t - \tau)^\alpha}{\Gamma(1 + \alpha)}, \quad (1.13)$$

где  $\Gamma(1 + \alpha)$  – гамма-функция.

В описании ползучести полимеров при различных постоянных и переменных температурах важную роль играет принцип температурно-временной аналогии.

Основные идеи принципа были высказаны в работах А. П. Александрова, Ю. С. Лазуркина [6], Г. Лидермана [7], М. Вильямса, Р. Ландела, Дж. Ферри [8].

Материалы, удовлетворяющие принципу температурно-временного соответствия, называют, следуя Шварцлю и Ставерману [53], терморелогически простыми. А. Р. Ржаницын [47], Морленд и Ли [54] обобщили линейную теорию вязкоупругости на неизотермические процессы введением модифицированного времени. Эти результаты были впоследствии развиты Муки и Штернбергом [55].

### 1.1.2 Нелинейная вязкоупругость

В настоящее время нелинейная теория вязко-упругости находится на стадии широкого развития. Исследователи ищут пути описания нелинейного вязкоупругого поведения материалов. Поэтому в литературе освещено много различных подходов, рассматривающих нелинейную вязкоупругость с феноменологических, молекулярных и чисто эмпирических позиций.

Остановимся кратко на *первом — феноменологическом подходе*.

Общее определяющее нелинейное уравнение вязкоупругости для случая сложного напряженного состояния получено в работе Р. Ривлина и А. Грина [56]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-\infty}^t \dots \int_{-\infty}^t \Pi_{i_1 j_1 i_2 j_2 \dots i_k j_k}^{(n)}(t_1, \tau_1, \dots, \tau_k) \times \\ \times \frac{d\sigma_{i_1 j_1}(\tau_1)}{d\tau} \dots \frac{d\sigma_{i_k j_k}(\tau_k)}{d\tau_k} d\tau_1 \dots d\tau_k \end{aligned} \quad (1.14)$$

Применение определяющего уравнения (1.14) весьма затруднительно из-за большого количества ядер, требующих определения из эксперимента, и сложности перехода к обратному уравнению.

В ряде работ рассмотрены упрощенные варианты общего нелинейного уравнения (1.14), при этом в (1.14) удержаны только два или три первых члена ряда.

Экспериментальные исследования с использованием (1.14) провели Г. Лидерман, Ф. Мак-Кракен, О. Накада, И. Уорд и Е. Онат, К. Онанан и В. Финдли, Ф. Локкет [58,59,60].

Из (1.14) при удержании только одного интегрального члена ряда следует уравнение линейной вязкоупругости.

Из-за трудностей отыскания параметров ядер, входящих в соотношения нелинейной наследственной теории вязкоупругости, идут по пути использования упрощенных вариантов, исходя из рассмотрения реального нелинейного поведения материала.

Большое распространение получила нелинейная наследственная теория, основанная на уравнении Ю. Н. Работнова [32],

$$\varphi[\varepsilon(t)] = \sigma(t) + \int_{-\infty}^t \Pi(t - \tau)\sigma(\tau)d\tau. \quad (1.15)$$

Уравнение (1.15) описывает релаксационные процессы полимеров, изохронные кривые  $\sigma - \varepsilon$ ,  $t$  которых подобны. Это уравнение позволяет учитывать необратимые деформации, развивающиеся в процессе деформирования. Кратно-интегральная форма уравнения (1.15) имеет следующий вид:

$$\varepsilon(t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \left[ \sigma(t) + \int_{-\infty}^t \Pi(t - \tau)\sigma(\tau)d\tau \right]^k. \quad (1.16)$$

В [32] получены простые формулы обращения указанного представления, там же предложено нелинейное уравнение, обобщающее (1.15) на случай процессов, сопровождающихся убыванием деформации (нелинейная разгрузка).

Уравнения нелинейной наследственности могут быть представлены в форме Лидермана – Розовского [57,49] в случае подобия кривых ползучести:

$$\varepsilon(t) = \psi(\sigma) + \int_0^t \Pi(t - \tau)F[\sigma(\tau)]d\tau \quad (1.17)$$

В форме некоторой аналитической зависимости деформации и их скоростей соотношение (1.17) можно представить:

$$\varphi(\varepsilon, \dot{\varepsilon}) = \psi(\sigma, \dot{\sigma}) + \int_0^t \Pi(t - \tau)\psi(\sigma, \dot{\sigma})d\tau. \quad (1.18)$$

В работе [61] было сделано предположение, что зависимость приращения деформации от напряжения имеет следующий вид:

$$\frac{d\varepsilon}{d\tau} = f[\sigma(\tau), t - \tau]. \quad (1.19)$$

Предположив упругую деформацию линейной функцией от напряжений, то в результате интегрирования (1.19) будем иметь:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma}{E} + \varepsilon^{cr}. \quad (1.20)$$

где  $\varepsilon^{cr} = \int_0^t f[\sigma(\tau), t - \tau]d\tau$

Контрольные эксперименты подтвердили нелинейный принцип суперпозиции, описываемый соотношением (1.20). Можно, следуя [62], выделить в области напряжений от  $\sigma = 0$  до  $\sigma = \sigma_B$ , где  $\sigma_B$  предел прочности, три подобласти.

В линейной подобласти материал ведет себя как линейное вязкоупругое тело. В подобласти слабой нелинейности функция  $f(\sigma, t - \tau)$  может быть представлена в виде произведения двух функций, одна из которых зависит только от  $\sigma$ , вторая — только от  $(t - \tau)$ .

При высоких напряжениях имеем подобласть сильной нелинейности, где такое разделение невозможно. Последнее обстоятельство объясняется зависимостью времен релаксации от действующего напряжения [27]. Рассмотрение этой подобласти существенно важно для последующего анализа деформирования и длительной прочности полимерных материалов и попытки описания механического поведения различных классов полимерных материалов вплоть до разрушения.

Вопрос о тензорных соотношениях для малых и больших деформаций изотропных и анизотропных упругих и вязкоупругих сред и их термодинамический анализ достаточно полно освещен в монографии И. И. Гольденבלата [63].

Теория вязкоупругости, оперирующая линейными дифференциальными и интегро-дифференциальными уравнениями, развивалась в работах А. К. Ишлинского, А. Р. Ржаницына и Ю. Н. Работнова [36, 42, 31].

А. Р. Ржаницын [43] применил модель вязкоупругого тела к решению ряда задач.

В [65] разработана замкнутая квазилинейная теория вязкоупругих тел, обладающих физической нелинейностью.

В случае выбора конкретного вида функций от инвариантов, получаем нелинейную теорию вязкоупругости, предложенную В. В. Москвитиним [66,67].

Главное достоинство и привлекательность этой теории состоит в том, что она позволяет сформулировать программу экспериментов для определения материальных функций, входящих в ее уравнения. Интегральные соотношения теории записываются следующим образом [86]:

$$\varphi_1(\varepsilon_i, \theta) e_{ij} = f_1(\sigma_i, \sigma) s_{ij} + \int_0^t \Gamma(t - \tau) f_1(\sigma_i, \sigma) s_{ij}(\tau) d\tau; \quad (1.21)$$

$$\varphi_2(\theta, \varepsilon_i) K_0 \theta = f_2(\sigma, \sigma_i) \sigma + \int_0^t U(t - \tau) f_2(\sigma, \sigma_i) \sigma(\tau) d\tau. \quad (1.22)$$

Здесь  $\sigma_i$  — интенсивность напряжений;  $\varepsilon_i$  — интенсивность деформаций;  $K_0$  — модуль объемной деформации;

$$\sigma_i = \left(\frac{3}{2}\right) (s_{ij} s_{ij})^{\frac{1}{2}}; \quad \varepsilon_i = \left(\frac{3}{2}\right) (e_{ij} e_{ij})^{\frac{1}{2}}; \quad \sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}};$$

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \left[ (\varepsilon_\xi - \varepsilon_\eta)^2 + (\varepsilon_\eta - \varepsilon_\zeta)^2 + (\varepsilon_\zeta - \varepsilon_\xi)^2 + \frac{3}{2} (\gamma_{\xi\eta}^2 + \gamma_{\eta\zeta}^2 + \gamma_{\zeta\xi}^2) \right]$$

Здесь  $\theta = \varepsilon_{kk}$ ;  $3\sigma = \sigma_{kk}$ .

Соотношение (1.21) для девиаторных величин и их вторых инвариантов  $\sigma_u$  и  $\varepsilon_u$  содержит теперь и первые инварианты тензоров напряжений и деформаций  $\sigma, \theta$ .

В свою очередь, соотношение (1.22) содержит и вторые инварианты девиаторов. Наличие в соотношениях (1.22) величин  $\sigma$  и  $\theta$ , принимающих различные значения при простом растяжении и сжатии и нулевые значения при чистом сдвиге, позволяет учесть указанные выше особенности.

Если  $R(t)$  и  $V(t)$  — резольвенты соответствующих ядер  $\Gamma(t)$  и  $U(t)$ , то из (1.21) и (1.22) следует:

$$f_1(\sigma_u, \sigma) s_{ij} = \varphi_1(\varepsilon_u, \theta) e_{ij} - \int_0^t R(t - \tau) \varphi_1(\varepsilon_u, \theta) e_{ij}(\tau) d\tau; \quad (1.23)$$

$$f_2(\sigma, \sigma_u) \frac{\sigma}{K_0} = \varphi_2(\theta, \varepsilon_u) \theta - \int_0^t V(t - \tau) \varphi_2(\theta, \varepsilon_u) \theta(\tau) d\tau. \quad (1.24)$$

Функции  $f_1, \varphi_1$ , и  $f_2, \varphi_2$  так же, как и ядра  $R, \Gamma$  и  $V, U$ , определяются экспериментально.

Развитие вышеперечисленных подходов является особенно важным для конструкционных полимеров, поскольку область линейности у них довольно узкая и изучение нелинейного поведения позволит существенно расширить область их практического применения.

Отклонения от линейного поведения для полимеров, находящихся в области высокоэластического состояния, связаны в основном с большими деформациями, т. е. геометрической нелинейностью.

Одним из способов учета вязкоупругого поведения, чрезвычайно интересным для прогнозирования свойств твердых полимеров, является так называемый метод приведенных переменных.

При изучении вязкоупругого поведения аморфных полимеров существенную услугу в установлении общих закономерностей оказал принцип температурно-временной суперпозиции.

Область применения метода температурно-временной суперпозиции ограничивается условием неизменности внутренней структуры полимера с изменением температуры.

В работе [68] А. А. Ильюшину удалось теоретически осуществить вывод эмпирического уравнения Вильямса—Ландела—Ферри [69], исходя из предположений об одинаковой температурной зависимости всех вязких элементов модели вязкоупругого тела.

Уравнения линейной и нелинейной теорий вязкоупругости удовлетворяются для полимерных материалов не совсем точно, так как свойства полимеров меняются во времени.

Теории ползучести стареющих наследственных сред, развитые Н. Х. Арутюняном [28] применительно к такому материалу, как бетон, могут быть перспективными и для полимерных материалов:

$$\varepsilon(t) = \sigma(t) \frac{1}{E(t)} - \int_{\tau_0}^t \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{1}{E(\tau)} \right] \sigma(\tau) d\tau - \int_{\tau_0}^t \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} F[\sigma(\tau)] d\tau, \quad (1.25)$$

где  $C(t, \tau)$  – мера ползучести,  $F[\sigma(\tau)]$  – функция нелинейности,

Функцию нелинейности указанными авторами предлагалось принимать в виде:

$$F[\sigma(\tau)] = [1 + \xi\sigma(\tau)]\sigma(\tau), \quad (1.26)$$

где  $\xi$  — параметр, определяемый опытным путем.

Распространение теории вязкоупругости на среды, свойства которых существенно меняются во времени, осуществлено В. В. Болотиным [70]. В цитируемой работе дана также постановка задач теории вязкоупругости для структурно неустойчивого материала и существенно неизотермических условий деформирования сформулирована аналогия для решения некоторого класса задач.

Таким образом, в [70]. В. В. Болотиным развито новое направление в теории вязкоупругости.

Обобщение теории старения на нелинейную область работы материала сделали Дейвенпорт и И.И. Улицкий [71]:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E(t)} + [\alpha\sigma + \beta\sigma m]\dot{C}, \quad (1.27)$$

где  $\alpha, \beta, m$  – некоторые константы,  $\dot{C}(t, \tau)$  – мера ползучести.

Использование эмпирических соотношений или простейших реологических моделей для описания поведения полимерных материалов под нагрузкой дает лишь грубое приближение. Для аналитических расчетов физически и геометрически нелинейных материалов необходима разработка достаточно общих уравнений состояния. Для этой цели служат описанные выше феноменологические теории.

Следующий фундаментальный подход к проблеме установления функциональной связи между напряжениями и деформациями базируется на методах физики полимеров.

Успешное развитие физики полимеров в работах А. П. Александрова [72], Г. М. Бартенева [73], П. П. Кобеко, Е. В. Кувшинского, В. А. Каргина, Ю. С. Лазуркина, Г. Л. Слонимского, Я. И. Френкеля, С. Я. Френкеля, Ф. Бюхе, Н. Джеймса, В. Куна, Дж. Максвелла, В. Марка, Л. Трелоара, А. Тобольского, Р. Флори и других [74,75,76] – создало основу, на которой ведется изучение свойств и описание механического поведения полимерных материалов.

Физический подход интенсивно развивается при анализе деформационных и прочностных свойств и связи их с молекулярным строением, при изучении влияния структуры на механические свойства, при исследовании релаксационных процессов и молекулярной подвижности в полимерах. Здесь могут применяться менее сложные соотношения, дающие в ряде случаев только качественное описание явлений, но позволяющие раскрыть их физический смысл.

Среди дифференциальных уравнений, предложенных для описания нелинейного механического поведения полимеров, лучшее согласие с экспериментальными фактами имеет уравнение, полученное Г. И. Гуревичем [78].



Экспериментальные исследования, использующие эту теорию, проведены различными авторами [79,80,81,82,83,84]. А. Л. Рабинович существенно дополнил теорию, дал термодинамическое обоснование определяющего уравнения и использовал его для описания механического поведения полимерных связующих и стеклопластиков на их основе [27].

Современный уровень электронной вычислительной техники позволил произвести на основе указанной теории расчеты сложных элементов конструкций, работающих в различных режимах нагружения и при различных температурах, включая те, при которых физические характеристики полимера меняются [85,86], а также решить задачи потери устойчивости [83].

## 1.2 Полная система уравнений механики сплошной среды.

### Определяющее уравнение состояния (связи) и его параметры.

Для вязкоупругой неоднородной среды справедливы все основные уравнения механики сплошной среды: статические (уравнения равновесия Навье), геометрические (соотношения Коши) и физические (уравнения состояния). Для дальнейшего использования приведем в матричном виде:

#### Уравнения равновесия Навье.

$$[A]\{\sigma\} - \{F\} = 0;$$

$$\text{где } A = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}; \{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix}; \{F\} = \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix}. \quad (1.28)$$

$[A]$  – матрица дифференциальных операторов,  $\{\sigma\}$  – вектор напряжений,  $\{F\}$  – вектор функции объёмных сил.

В плоской задаче

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}; \{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}; \{F\} = \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix}. \quad (1.29)$$

#### Статические граничные условия:

$$\{P\} = [N]\{\sigma\},$$

$$\text{где } [N] = \begin{bmatrix} l & 0 & 0 & m & 0 & n \\ 0 & m & 0 & l & n & 0 \\ 0 & 0 & n & 0 & m & l \end{bmatrix}; \{P\} = \begin{Bmatrix} P_{xv} \\ P_{yv} \\ P_{zv} \end{Bmatrix}; \quad (1.30)$$

$$l = \cos(x, v); m = \cos(y, v); n = \cos(z, v)$$

$[N]$  – матрица направляющих косинусов нормали в точке поверхности.

На части плоскости, где приложены нагрузки  $\{P_0\}$ , должно выполняться условие:

$$\{P\} = \{P_0\}.$$

Здесь и далее индекс 0 означает, что параметр известен изначально.

В плоской задаче

$$[N] = \begin{bmatrix} l & 0 & m \\ 0 & m & l \end{bmatrix}; \{P\} = \begin{bmatrix} P_{xv} \\ P_{yv} \end{bmatrix} \quad (1.31)$$

**Кинематические граничные условия:**

$$\{u\} = \{u_0\}.$$

Это условие должно выполняться на той части поверхности, где заданы кинематические граничные условия.

**Геометрические уравнения Коши**

$$\{\varepsilon^{el}\} = [A]^T \{u\}, \quad (1.32)$$

где  $\{\varepsilon^{el}\} = \{\varepsilon_x^{el}, \varepsilon_y^{el}, \varepsilon_z^{el}, \gamma_{xy}^{el}, \gamma_{yz}^{el}, \gamma_{zx}^{el}\}^T$ ;  $\{u\} = \{u \ v \ w\}^T$ .

$\{\varepsilon^{el}\}$  – вектор упругих деформаций,  $\{u\}$  – вектор перемещений.

Здесь и далее индекс  $T$  означает операцию транспонирования матрицы. В плоской задаче:

$$\{\varepsilon^{el}\} = \{\varepsilon_x^{el}, \varepsilon_y^{el}, \gamma_{xy}^{el}\}^T; \quad \{u\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}. \quad (1.33)$$

Использование одного и того же дифференциального матричного оператора в геометрических уравнениях (Коши) и в уравнениях равновесия (Навье) принято называть статико-геометрической аналогией [87].

**Закон Гука в прямой форме**

$$\{\varepsilon^{el}\} = [D]^{-1} \{\sigma\}, \quad (1.34)$$

$$\text{где } [D]^{-1} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix}.$$

Здесь "– 1" означает операцию обращения матрицы,  $[D]^{-1}$  – матрица механических характеристик материала размером  $6 \times 6$ ,  $\nu$  – коэффициент Пуассона,  $E$  – модуль Юнга.

В плоской задаче в случае плоского напряжённого состояния

$$[D]^{-1} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & -\nu & 0 \\ -\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix}. \quad (1.35)$$

В случае плоской деформации упругие постоянные  $E$  и  $\mu$  меняются на  $E_1$  и  $\mu_1$ .

**Закон Гука в форме Ламе**

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon^{el}\}. \quad (1.36)$$

В трёхмерной задаче

$$[D] = \begin{bmatrix} \lambda + 2G & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2G & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix}. \quad (1.37)$$

Выражая постоянные Ламе через модуль Юнга и коэффициент Пуассона, матрицу  $[D]$  можно представить в другом виде

$$[D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}. \quad (1.38)$$

В плоской задаче в случае плоского напряжённого состояния

$$[D] = \frac{E}{1-\mu^2} \begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{bmatrix}. \quad (1.39)$$

В случае плоской деформации упругие постоянные  $E$  и  $\mu$  заменяются на  $E_1$  и  $\mu_1$ , которые выражаются через  $E$  и  $\nu$ :

$$E_1 = \frac{E}{1-\nu^2}; \quad \nu_1 = \frac{\nu}{1-\nu}. \quad (1.40)$$

Удельная энергия деформации равна:

$$W = \frac{1}{2} \{\varepsilon^{el}\}^T \{\sigma\} = \frac{1}{2} \{\varepsilon^{el}\}^T [D] \{\varepsilon^{el}\}. \quad (1.41)$$

Потенциальная энергия, накапливаемая во всём теле, равна

$$U = \int_V W dV = \frac{1}{2} \iiint_V \{\varepsilon^{el}\}^T \{\sigma\} dx dy dz = \frac{1}{2} \int_V \{\sigma\}^T \{\varepsilon^{el}\} dV. \quad (1.42)$$

Полные относительные и угловые деформации представляют сумму составляющих деформации и имеют вид:

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon^{el}\} + \{1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0\}^T \varepsilon_T + \{\varepsilon^*\}, \quad (1.43)$$

где  $\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}\}^T$  – полные относительные и угловые деформации;

$\{\varepsilon^{el}\} = \{\varepsilon_x^{el}, \varepsilon_y^{el}, \varepsilon_z^{el}, \gamma_{xy}^{el}, \gamma_{yz}^{el}, \gamma_{zx}^{el}\}^T$  – упругие линейные и угловые деформации;

$\varepsilon_T$  – деформации, вызванные температурой;

$\{\varepsilon^*\} = \{\varepsilon_{s,x}^*, \varepsilon_{s,y}^*, \varepsilon_{s,z}^*, \gamma_{s,xy}^*, \gamma_{s,yz}^*, \gamma_{s,zx}^*\}^T$  – деформации ползучести (высокоэластические).

Физические уравнения в матричной форме с учетом составляющих деформаций:

$$\{\varepsilon\} = [D]^{-1} \{\sigma\} + \{1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0\}^T \varepsilon_T + \{\varepsilon^*\}, \quad (1.44)$$

Откуда можно выразить вектор напряжений:

$$\{\sigma\} = D(\{\varepsilon\} - \{1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0\}^T \varepsilon_T - \{\varepsilon^*\}); \quad (1.45)$$

$$D = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1-\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}, \quad (1.46)$$

Выражение (1.45) приводим к окончательному виду:

$$\{\sigma\} = [D](\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_T\} - \{\varepsilon^*\}). \quad (1.47)$$

### 1.2.1 Линейное и нелинейное уравнение связи Максвелла и его параметры.

На примере линейного уравнения состояния Максвелла-Томпсона воспользуемся часто используемой в механике методикой принципа суперпозиции для линейных законов деформирования, который позволяет перейти к объемному напряженному состоянию:

$$nE \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + H\varepsilon = n \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \sigma. \quad (1.48)$$

Первое уравнение суммарной деформации (1.43) без температурной составляющей  $\varepsilon_T$  запишем:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x^{el} + \varepsilon_{s,x}^* = \frac{\sigma}{E} + \varepsilon_{s,x}^*. \quad (1.49)$$

Тогда, продифференцировав (1.49) по времени и подставив в (1.48), имеем следующее выражение:

$$\frac{\partial \varepsilon_{s,x}^*}{\partial t} = \frac{1}{nE} \left[ \sigma \left( 1 - \frac{H}{E} \right) \right] - H \varepsilon_{s,x}^*. \quad (1.50)$$

Зададим сумму трех одноосных напряженных состояний как объемное напряженное состояние:

$$1. \quad \sigma_x \neq 0; \sigma_y = 0; \sigma_z = 0.$$

Тогда уравнение (1.50) примет вид для составляющих полной деформации ползучести, вызванных нормальным напряжением  $\sigma_x$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon_{1x,s}^*}{\partial t} &= \frac{1}{nE} \left[ \sigma \left( 1 - \frac{H}{E} \right) \right] - H \varepsilon_{1x,s}^*; \\ \varepsilon_{1y,s}^* &= \varepsilon_{1z,s}^* = -\nu^* \varepsilon_{1x,s}^*, \end{aligned} \quad (1.51)$$

здесь  $\nu^*$  — коэффициент Пуассона для деформаций ползучести.

$$2. \quad \sigma_x = 0; \sigma_y \neq 0; \sigma_z = 0.$$

Уравнение (1.50) принимает вид:

$$\frac{\partial \varepsilon_{2y,s}^*}{\partial t} = \frac{1}{nE} \left[ \sigma \left( 1 - \frac{H}{E} \right) \right] - H \varepsilon_{2y,s}^*; \quad (1.52)$$

$$\varepsilon_{1x,s}^* = \varepsilon_{1z,s}^* = -\nu^* \varepsilon_{1y,s}^*.$$

3.  $\sigma_x = 0; \sigma_y = 0; \sigma_z \neq 0.$

Для третьего случая уравнение состояния (1.50) примет вид:

$$\frac{\partial \varepsilon_{3z,s}^*}{\partial t} = \frac{1}{nE} \left[ \sigma \left( 1 - \frac{H}{E} \right) \right] - H \varepsilon_{3z,s}^*; \quad (1.53)$$

$$\varepsilon_{3x,s}^* = \varepsilon_{3y,s}^* = -\nu^* \varepsilon_{1z,s}^*.$$

Для каждого напряженного состояния (1.51-1.52), суммируя, имеем:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \varepsilon_{1x,s}^*}{\partial t} \\ \frac{\partial \varepsilon_{2y,s}^*}{\partial t} \\ \frac{\partial \varepsilon_{3z,s}^*}{\partial t} \end{pmatrix} = \frac{1}{nE} \left[ \left( 1 - \frac{H}{E} \right) \right] \begin{bmatrix} 1 & -\nu^* & -\nu^* \\ -\nu^* & 1 & -\nu^* \\ -\nu^* & -\nu^* & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{pmatrix} - H \begin{pmatrix} \varepsilon_{1x,s}^* \\ \varepsilon_{2y,s}^* \\ \varepsilon_{3z,s}^* \end{pmatrix} \quad (1.54)$$

Часто используемая гипотеза равенства нулю объемной деформации ползучести  $\theta^* = \varepsilon_x^* + \varepsilon_y^* + \varepsilon_z^* = 0$ , дает основание предположить, что и сумма скоростей роста деформаций ползучести также должна обращаться в нуль. Суммируя (1.54), получим:

$$(1 - 2\nu^*)(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = 0. \quad (1.55)$$

Здесь  $\nu^* = 0,5$ .

В полимерах при некоторых условиях могут существовать все типы деформации: мгновенноупругая ( $\varepsilon_{ik}^{el}$ ) (обратимая в фазе с напряжением), мгновеннопластическая  $\varepsilon_{pl,ik}$ , вязкоупругая (высокоэластическая)  $\varepsilon_{s,ik}^*$  (обратимая, но не в фазе с напряжением) и полностью необратимая типа течения  $\varepsilon_{ik}^0$ .

В каждом из рассмотренных выше физических состояний полимеров эти деформации проявляются в различной степени. В подсостоянии хрупкости полимерные цепи практически теряют гибкость, конформации макромолекул оказываются фиксированными, хотя при этом и возможны независимые колебания отдельных звеньев. Доля деформаций  $\varepsilon_{s,ik}^*$  и  $\varepsilon_{ik}^0$  в этом подсостоянии весьма мала.

В вязкотекучем состоянии преобладающую роль играют деформации вязкого течения; упругие и в особенности склерономные деформации проявляются слабо. Что же касается вязкоупругих деформаций, то они весьма ощутимы лишь в некоторых определенных интервалах температур.

В высокоэластическом состоянии преобладающими являются вязкоупругие деформации. При повышенных статических нагрузках эти деформации могут сопровождаться течением.

Наряду с упругостью в застеклованных полимерах проявляются заметные вязкоупругие деформации, которые по абсолютным величинам могут в несколько раз превышать мгновенноупругие.

Для гомогенных и гетерогенных полимеров линейной и сетчатой структуры хорошо согласуется с экспериментальными данными обобщенное физически нелинейное уравнение Максвелла-Гуревича [24], которое, в свою очередь, является обобщением уравнения Максвелла-Томсона.

Рассмотрим уравнение связи (уравнение Максвелла-Гуревича), которое в основном мы будем использовать при решении задач устойчивости для стержней, пластин.

Суммарную деформацию соотношения (1.43) запишем в форме:

$$\varepsilon_{ik} = (\varepsilon_{ik}^{el}) + \alpha \Delta T \delta_{ik} + \varepsilon_{s,ik}^*; \quad (i, k = x, y, z) \quad (1.56)$$

Символ Кронекера  $\delta_{ik}$  принимает значения:

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = k; \\ 0 & \text{при } i \neq k; \end{cases} \quad \varepsilon_{s,ik}^* = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_{s,ik}^{*,n}. \quad (1.57)$$

Скорость высокоэластической деформации  $\varepsilon_{s,ik}^*$ , согласно [140], определяется выражением:

$$\frac{\partial \varepsilon_{s,ik}^*}{\partial t} = \left[ \frac{3}{2} (\sigma_{ik} - p \delta_{ik}) - E_{\infty} \varepsilon_{s,ik}^* \right] \frac{1}{\eta^*}; \quad (i, k = x, y, z) \quad (1.58)$$

или в ином виде, с использованием обратной формы закона Гука

$$\frac{\partial \varepsilon_{s,ik}^*}{\partial t} = \left( \varepsilon_{el,ik} - \frac{\theta_{el} \delta_{ik}}{3} - \frac{G_{\infty}}{G} \varepsilon_{s,ik}^* \right) \frac{1}{\left(1 + \frac{G_{\infty}}{G}\right) T^*}; \quad (i, k = x, y, z) \quad (1.59)$$

где  $T^*$  – соответствующее время релаксации

В соотношении (1.59) используется теория, согласно которой объёмная высокоэластическая деформация равна нулю  $\theta^* = 0$ , при этом  $\nu^* = 0.5$  и тогда

$$G_{\infty} = \frac{E_{\infty}}{2(1 + \nu_{cr})} = \frac{E_{\infty}}{3}; \quad E_{\infty} = 3G_{\infty}.$$

В (1.59) использованы соотношения

$$p = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sigma_{ik} \delta_{ik} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \sigma_{ii}; \quad (1.60)$$

$$\theta_{el} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 (\varepsilon_{ii}^{el}); \quad p = K \theta_{el}; \quad K = \frac{E}{3(1 - 2\nu)}. \quad (1.61)$$

Относительное изменение объёма записывается с учётом используемых гипотез

$$\theta = \sum_{i=1}^3 \varepsilon_{ii} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_i}; \quad \theta = \theta_{el} + 3\alpha \Delta T; \quad \sum_{n=1}^3 \varepsilon_{s,nn}^* = 0. \quad (1.62)$$

В общем виде релаксационная вязкость представляют соотношением:

$$\eta^* = \eta_0^* \exp \left\{ -\frac{1}{m^*} \left[ \gamma^* p + \left| \frac{3}{2} (\sigma_{nn} - p) - E_\infty \varepsilon_{s,nn}^* \right|_{max} \right] \right\}, \quad (1.63)$$

где индексом  $n$  обозначены главные направления для напряжений;  $\gamma^*$  — объёмный коэффициент, зависящий от структуры полимера и температуры.

Ввиду сложности строения, неоднородности, как на молекулярном, так и на более высоких уровнях, для многих полимеров характерен дискретный спектр времен релаксации, так что в правой части соотношения (1.56) должна стоять сумма нескольких членов.

Деформация ползучести при этом запишется в виде:

$$\varepsilon^* = \sum_{s=1}^n \varepsilon_s^*. \quad (1.64)$$

Для последующего интегрирования интегро-дифференциальных уравнений удобно ввести обозначение в соотношении (1.58):

$$f_{ik}^* = \left[ \frac{3}{2} (\sigma_{ik} - p \delta_{ik}) - E_\infty \varepsilon_{s,ik}^* \right]; \quad (i, k = x, y, z) \quad (1.65)$$

Необходимо отметить, что  $f_{ik}^* = f_{ki}^*$ .

Приведем окончательное выражение для уравнения связи Максвелла-Гуревича, которое мы будем использовать в качестве уравнения состояния:

$$\frac{\partial \varepsilon_{ik}}{\partial t} = \frac{1}{2G} \left( \frac{\partial \sigma_{i,k}}{\partial t} - \frac{3}{1+\nu} \frac{\partial p}{\partial t} \delta_{ik} \right) + \alpha \frac{\partial T}{\partial t} \delta_{ik} + \frac{f_{ik}^*}{\eta^*}; \quad (i, k = x, y, z). \quad (1.66)$$

В частном случае уравнение Максвелла-Гуревича, когда вязкость  $\eta^* = \kappa = nE$  величина постоянная, переходит в уравнение Максвелла-Томсона. Их отличие в том, что вязкость в уравнения Максвелла-Гуревича зависит от напряжения, а именно:

$$\frac{1}{\eta^*} = \frac{1}{\eta_0^*} \exp \left\{ -\frac{1}{m^*} [\gamma^* p + |f_{nn}^*|_{max}] \right\}. \quad (1.67)$$

Система (1.67) является физически нелинейной, что и определяет сложность получения ее решения в квадратурах.

## 1.2.2 О константах обобщённого нелинейного уравнения Максвелла-Гуревича

Представленное уравнение (1.66) при феноменологическом подходе будет использовано для теоретического описания закономерностей деформации полимеров. В работе [84] было получено вполне удовлетворительное совпадение теоретических и экспериментальных результатов в широком диапазоне температур, скоростей деформации и изменения степеней кристалличности.

Уравнение связи содержит при постоянной температуре шесть параметров — два упругих ( $E$  и  $\nu$ ) и четыре релаксационных ( $E_\infty, m^*, \eta_0^*, \gamma^*$ ). Все параметры уравнения являются

функциями (сильными или слабыми) температуры. При повышении последней величины как упругих, так и релаксационных параметров падают (за исключением коэффициента Пуассона).

Упругие параметры ( $E$  и  $\nu$ ) у кристаллических полимеров, как и в шитых аморфных, в основном определяются химической структурой полимера, однако природа упругости кристаллических полимеров, аморфные области которых находятся в высокоэластическом состоянии, имеет достаточно сложный характер. Она определяется как валентными, так и вандер-ваальсовыми силами.

Действительно, в твердых телах различаются два типа взаимодействия: химическое и дисперсионное. Энергия химической связи, как известно, гораздо больше энергии дисперсионного взаимодействия. Однако в отдельных случаях дисперсионное взаимодействие проявляется в первую очередь.

Факт уменьшения мгновенного модуля упругости в начале растяжения [88] свидетельствует о наличии упругости энергетического характера, обусловленного силами дисперсионного взаимодействия.

Энергетическая упругость обусловлена наличием кристаллических областей; увеличение кристалличности приводит к усилению напряженности цепей в аморфных областях, что уменьшает подвижность. Последнее благоприятствует проявлению сил дисперсионного взаимодействия. С увеличением степени кристалличности модуль упругости возрастает.

Растяжение кристаллических полимеров, в частности ПЭВП, сопровождается увеличением объема, о чем свидетельствуют мгновенные значения коэффициента Пуассона  $\nu = 0,42$ .

В отличие от аморфных стеклообразных полимеров, у кристаллических полимеров имеет место релаксация дисперсионного взаимодействия, что позволяет выявить «вклад» химических связей.

Для модуля высокоэластичности  $E_{\infty}^*$ , анализ диаграмм однородного растяжения показал, что приведённый модуль высокоэластичности  $E_{\infty}^*$  (характерный для членов спектра с большими временами релаксации) определяется степенью превышения сил энергетического характера над силами энтропийного характера. При достижении «баланса» сил энергетического и энтропийного характера (экстремальная точка на диаграмме растяжения)  $E_{\infty}^*$  обращается в нуль;

Коэффициент начальной релаксационной вязкости, пропорциональный времени релаксации, наоборот, является сильной функцией температуры;  $\eta_0^*$  зависит также от состава сополимеров.

Коэффициент начальной релаксационной вязкости весьма чувствителен также к способу переработки.

Модуль скорости  $m^*$ , связанный с изменением энергии активации «микрообъема» ( $m_i^* = K/a_i^*$ , где  $a_i^*$  – параметр, связанный с характеристиками микрообъёма частиц), является довольно устойчивым параметром, весьма слабо зависящим от температуры и способа переработки. С



макроскопической точки зрения  $t^*$  характеризует собой зависимость между установившейся скоростью неупругой деформации и напряжением, соответствующим этой скорости.

Объёмный коэффициент  $\gamma^*$ , являющийся множителем при объемной деформации, зависит от доли «дефектов» (пустот) в аморфных областях полимера и, как следствие, термической предыстории образцов.

### 1.2.3 Одноосное напряженное состояние. Дискретный спектр времен релаксации

В [27] было показано, что при описании механического поведения сшитых полимеров необходимо учитывать наличие спектра времен релаксации. Разумеется, как сам факт наличия спектра, так и определение его «широты», т. е. различия между значениями параметров его составляющих с максимальным и минимальным временами релаксации для данных условий опыта, устанавливаются только путем сопоставления результатов теоретического анализа и данных опыта.

В случае одноосного однородного напряженного состояния из системы без учета температурных составляющих деформаций (1.43) приходим к следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \varepsilon_x^{el} + \varepsilon_x^*; & \varepsilon_x^{el} = \frac{\sigma_x}{E}; & \varepsilon_x^* = \sum_{s=1}^n \varepsilon_{x,s}^*; \\ & \frac{d\varepsilon_{x,s}^*}{dt} = \frac{f_{xx,s}^*}{\eta_{s}^*}, \end{cases} \quad (1.68)$$

где выражения (1.65) и (1.67) принимают вид:

$$\begin{cases} f_{xx,s}^* = \sigma_x - E_{\infty,s} \varepsilon_{x,s}^*; \\ \eta_s^* = \eta_{0,s}^* \exp \left\{ \left[ \frac{\sigma_x}{3} \gamma_s^* + |f_{xx,s}^*| \right] \frac{1}{m_s^*} \right\}. \end{cases} \quad (1.69)$$

В качестве независимого переменного для случая  $v_\varepsilon = const$  можно принять суммарную деформацию  $\varepsilon_x$ , тогда уравнения (1.68) можно записать в виде:

$$\begin{cases} \sigma_x = E \left( \varepsilon_x - \sum_{s=1}^n \varepsilon_{x,s}^* \right); \\ \left[ \frac{d\varepsilon_{x,s}^*}{d\varepsilon_x} = \frac{1}{v_{\varepsilon_x}} \frac{f_{xx,s}^*}{\eta_{0,s}^*} \left[ \left( \frac{\sigma_x}{3} \gamma_s^* + |f_{xx,s}^*| \right) \frac{1}{m_s^*} \right] \right]; \quad (s = 1, 2, \dots, n) \end{cases} \quad (1.70)$$

Здесь

$$f_{xx,s}^* = E \left[ \left( \varepsilon_x - \sum_{s=1}^n \varepsilon_{x,s}^* \right) - \left( \frac{E_{\infty,s}}{E} \right) \varepsilon_{x,s}^* \right].$$

Начальные условия принимаются однородными. Число уравнений (1.70) достаточно для определения  $n + 1$  функций  $\varepsilon_{x,s}^*$  ( $s = 1, \dots, n$ ) и  $\sigma_x$ . Эти уравнения образуют совместную систему. Решение можно получить в результате численного интегрирования системы в целом.

С целью упрощения интегрирования (1.70) рассмотрим случай с  $\gamma_s^* = 0$ , тогда из (1.70) получим:

$$\frac{d\varepsilon_{x,s}^*}{d\varepsilon_x} = \frac{m_s^*}{v_{\varepsilon_x} \eta_{0,s}^*} \Psi(\zeta_s^*), \quad (s = 1, 2, \dots, n) \quad (1.71)$$

где

$$\zeta_s^* = \left| \frac{f_{xx,s}^*}{m_s^*} \right|.$$

Разделим переменные, с этой целью продифференцируем  $f_{xx,s}^*$  и при использовании (1.71) получим

$$\frac{d\varepsilon_{x,s}^*}{d\varepsilon_x} = E \left[ 1 - \sum_{s=1}^n \frac{m_k^*}{v_{\varepsilon_x} \eta_{0,k}^*} \Psi(\zeta_k^*) - \left( \frac{E_{\infty,s}}{E} \right) \frac{m_s^*}{v_{\varepsilon_x} \eta_{0,s}^*} \Psi(\zeta_s^*) \right]; \quad (s = 1, 2, \dots, n). \quad (1.72)$$

Уравнение (1.27) представляет собой систему нелинейных дифференциальных уравнений относительно производных где в правой части содержатся искомые функции в виде конечных соотношений. Отметим, что возможен вариант существования такой системы функций  $\zeta_s^*$ , которая одновременно обращает в нуль производные всех функций. Если принять соответствующее значение этих функций за максимум, то они определяются через систему трансцендентных уравнений, а относительно функции  $\Psi(\zeta_{s,max}^*)$  – систему линейных алгебраических уравнений, решение которых выглядит:

$$\Psi(\zeta_{s,max}^*) = \frac{v_{\varepsilon_x} \eta_{0,k}^*}{m_s^*} A_s \frac{1}{\Delta}; \quad (s = 1, 2, \dots, n). \quad (1.73)$$

Здесь  $\Delta$  – определитель, составленный из коэффициентов правых частей уравнения (1.72); через  $A_s$  обозначено произведение

$$A_s = \prod_{k=1}^n \left( \frac{E_{\infty,k}}{E} \right); \quad (k \neq s, \quad s = 1, 2, \dots, n).$$

Для удобства численного интегрирования исключим  $\eta_{0,s}^*$  из (1.71) с помощью (1.73), тогда получим следующую систему уравнений:

$$\frac{d\varepsilon_{x,s}^*}{d\varepsilon_x} = \frac{A_s}{\Delta} \frac{\Psi(\zeta_s^*)}{\Psi(\zeta_{s,max}^*)}, \quad (s = 1, 2, \dots, n). \quad (1.74)$$

где

$$\zeta_s^* = \left| \frac{f_{xx,s}^*}{m_s^*} \right| = \left| \left( \varepsilon_x - \sum_{s=1}^n \varepsilon_{x,s}^* \right) - \left( \frac{E_{\infty,s}}{E} \right) \varepsilon_{x,s}^* \right| \left( \frac{E_{\infty,s}}{m_s^*} \right).$$

Интегрирование ведется по итерационной схеме Эйлера.

$$\varepsilon_{x,s,i+1}^* = \varepsilon_{x,s,i}^* + \left( \frac{d\varepsilon_{x,s}^*}{d\varepsilon_x} \right) \Delta \varepsilon_x; \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (1.75)$$

Напряжение вычисляется по первой из формул (1.70). Значения первой производной в конце первого шага интегрирования, вычисленные через значения второй производной (в начальный момент  $\varepsilon_x \rightarrow 0$ , определяются следующим образом:

$$\left(\frac{d\varepsilon_{x,s}^*}{d\varepsilon_x}\right)_1 = \frac{E}{v_{\varepsilon_x} \eta_{0,s}^*} \Delta\varepsilon_x; \quad (s = 1, 2, \dots, n). \quad (1.76)$$

Выражение углового коэффициента к интегральной кривой  $\sigma_x = (\varepsilon_x)$  получим, продифференцировав первое из уравнений (1.70)

$$\frac{d\sigma_x}{d\varepsilon_x} = E \left( 1 - \sum_{s=1}^n \frac{d\varepsilon_{x,s}^*}{d\varepsilon_x} \right); \quad (s = 1, 2, \dots, n). \quad (1.77)$$

Анализ уравнений (1.76) и (1.77) показывает, что начальный наклон касательной к диаграмме растяжения  $\sigma_x = (\varepsilon_x)$ , определяющий величину эффективного модуля упругости, может существенно зависеть от скорости деформирования. Эта зависимость определяется в первую очередь составляющими спектра времен релаксации, имеющими малые значения  $\eta_{0,s}^*$ .

Наклон касательной к конечному участку диаграммы растяжения  $\left(\frac{d\sigma_x}{d\varepsilon_x}\right)_{\varepsilon_x \rightarrow 0}$  определяется главным образом составляющими спектра с большими временами релаксации, обладающими минимальными значениями  $E_{\infty,s}$ .

Действительно, из (1.74) в пределе имеем

$$\text{при } \varepsilon_x \rightarrow \infty \left(\frac{d\varepsilon_{x,s}^*}{d\varepsilon_x}\right) \rightarrow \frac{A_s}{\Delta}; \quad \frac{\left(\frac{d\varepsilon_{x,s}^*}{d\varepsilon_x}\right)}{\left(\frac{d\varepsilon_{x,n}^*}{d\varepsilon_x}\right)} = \frac{E_{\infty,n}}{E_{\infty,s}}; \quad (s = 1, 2, \dots, n). \quad (1.78)$$

Решение можно упростить, ограничиваясь двумя членами спектра времен релаксации, первым – с минимальным временем релаксации и вторым – с наибольшим временем релаксации для рассматриваемых условий опыта, и в то же время получить представление о наиболее характерных чертах процесса растяжения с  $v_{\varepsilon_x} = const$  при наличии дискретного спектра времен релаксации.

В этом случае вместо системы уравнений (1.74) задача построения кривой  $\sigma_x = (\varepsilon_x)$  сводится к решению более простой системы:

$$\begin{cases} \frac{d\varepsilon_{x,s}^*}{d\varepsilon_x} = \frac{E_{\infty,2}/E_{\infty,s}}{1 + E_{\infty,2}/E + E_{\infty,2}/E_{\infty,1}} \cdot \frac{\Psi(\zeta_s^*)}{\Psi(\zeta_{s,max}^*)}; & (s = 1, 2) \\ \sigma_x = E[\varepsilon_x - (\varepsilon_{x,1}^* + \varepsilon_{x,2}^*)], \end{cases} \quad (1.79)$$

где

$$\zeta_s^* = \left| \frac{f_{xx,s}^*}{m_s^*} \right|; \quad f_{xx,s}^* = \sigma_x - E_{\infty,s} \varepsilon_{x,s}^* = E \left[ \varepsilon_x - (\varepsilon_{x,1}^* + \varepsilon_{x,2}^*) - \frac{E_{\infty,s} \varepsilon_{x,s}^*}{E} \right]. \quad (1.80)$$

Начальные условия однородны; интегрирование выполняется по схеме (1.75). Значения параметров первой (старшей) составляющей спектра  $E_{\infty,1}$  и  $\eta_{0,1}^*$  могут быть определены из

опытов на релаксацию деформаций после разгрузки ( $\sigma_x = 0$ ); модуль скорости  $m_s^*$  является довольно устойчивой константой, поэтому значения  $m_s^*$  для обоих членов спектра можно принять одинаковыми  $m^* = m_1^* = m_2^*$ .

Конечные участки диаграмм растяжения, как было показано выше, описываются главным образом вторым (младшим) членом спектра.

В соответствии с этим можно ожидать, что релаксационные параметры, определенные по диаграммам растяжения, близки к параметрам младшего члена спектра.

В таблице 1.2 даны средние значения упругих и релаксационных параметров в режиме нагружения с постоянной скоростью деформации.

Таблица 1.2. Упругие и релаксационные параметры в режиме нагружения с постоянной скоростью деформации

$v_{\varepsilon_x} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ c}^{-1}$	Высокоэластическая деформация с одним членом спектра					Высокоэластическая деформация с двумя членами спектра				
	$E_{\text{эфф}}$ (МПа)	$m^*$ (МПа)	$E_{\infty}$ (МПа)	$\eta_0^*$ (МПа)	$\zeta_{s,max}^*$ (МПа · с)	$E_{\infty,1}$ (МПа)	$E_{\infty,2}$ (МПа)	$\eta_{0,1}^*$ (МПа)	$\eta_{0,2}^*$ (МПа)	$\zeta_{s,max}^*$ (МПа · с)
55,0	7500	18,9	1716	$9,7 \cdot 10^8$	10,0	$9 \cdot 10^3$	2850	$1,3 \cdot 10^8$	$1,0 \cdot 10^9$	10,15
6,0	5700	30,5	1856	$5,0 \cdot 10^8$	7,3	$9 \cdot 10^3$	5350	$1,1 \cdot 10^8$	$5,35 \cdot 10^8$	7,25

Здесь также приведены значения параметров первого и второго членов, использованные при расчете теоретических диаграмм растяжения.

Максимальное значение деформации для второго члена спектра определяли, используя следующее уравнение:

$$\varepsilon_{x,2}^* = \left| \sigma_{x,max} - (f_{xx,2}^*)_{max} \right| / E_{\infty,2}.$$

Располагая величинами  $E_{\infty,1}$ ,  $(\varepsilon_{x,1}^*)_{max}$  и  $m^*$  находим  $\zeta_{s,max}^*$ , при этом все параметры уравнения (1.79) становятся известными. Построение, показанное в [88,89] на (рисунке 1.2, а) позволило определить  $(\varepsilon_{x,1}^*)_{max}$ . На (рисунке 1.2, б) дано сравнение теоретических кривых, вычисленных с учетом двух членов спектра, с экспериментальными, полученными при различных значениях  $v_{\varepsilon_x}$ . Следует отметить хорошее совпадение теоретических и экспериментальных диаграмм растяжения.

**1.2.4 Плоское напряженное состояние. Дискретный спектр времен релаксации**

Обзор исследования ползучести кристаллических полимеров при плоском напряженном состоянии рассмотрим на примере тонкостенных трубчатых образцов из полиэтилена высокой плотности при комнатной температуре [89]. Механические характеристики исследуемого материала и вида нагрузений сведены в таблицу 1.3

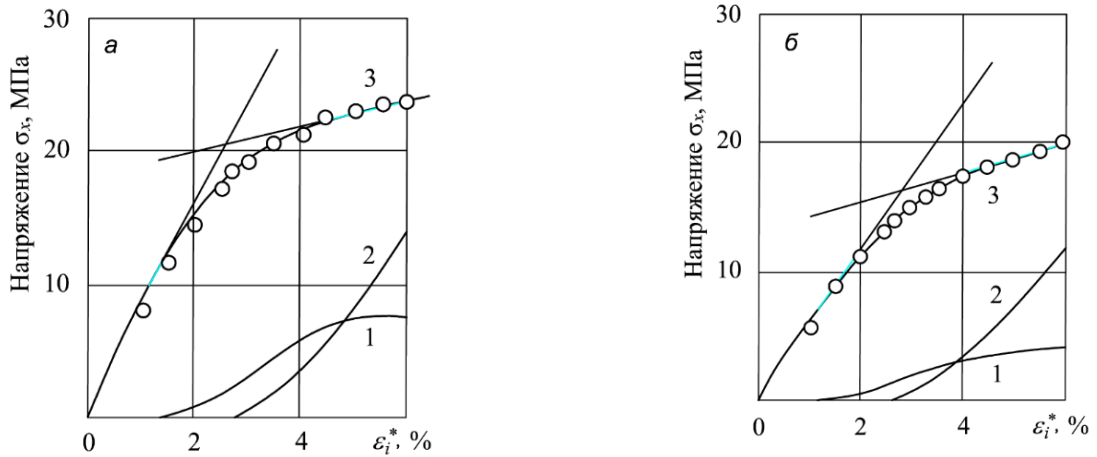


Рисунок 1.2 – Сравнение теоретических и экспериментальных кривых растяжения ПЭВП, полученных при различных скоростях деформации:

$a - v_{\epsilon_x} = 5 \cdot 10^{-3} c^{-1}$ ;  $б - v_{\epsilon_x} = 5 \cdot 10^{-3} c^{-1}$ .

Теоретические кривые вычисленные с учетом двух членов спектра (расчетные параметры см. в таблице. 1.2):

- 1 – первое слагаемое спектра; 2 – второе слагаемое спектра;
- 3 – суммарная теоретическая кривая; o – экспериментальные данные

Трубчатые образцы нагружали осевым растяжением и внутренним давлением, при этом создавали плоские напряженные состояния с соотношениями компонент главных напряжений:

$$1). \nu = \frac{\sigma_x}{\sigma_y} = 0,5; \quad 2). \nu = \frac{\sigma_x}{\sigma_y} = 2,5;$$

Таблица 1.3 Механические характеристики ПЭВП

№	Механические характеристики		Осевое растяжение и внутренне давление		
			Плоское напряжённое состояние		
1	Плотность	$\rho = 0,962 \text{ г/см}^3$	$\nu = \frac{\sigma_x}{\sigma_y}$	$\nu = \frac{\sigma_x}{\sigma_y}$	$\nu = \frac{\sigma_x}{\sigma_y}$
2	Степень кристалличности	$K = 52 \%$	0	0,5	2,5
3	Показатель текучести расплава	ПТР = 0,496 г/10 мин			
4	Условный предел текучести $v_{\epsilon} = 5 \cdot 10^{-2} c^{-1}$	$\sigma_B = 26,5 \text{ МПа}$			

Эксперименты проводились растягиванием образцов при трех уровнях интенсивности напряжений  $\sigma_i$ , с трехкратным повторением. Все полученные значения результатов усреднялись. Диапазон исследованных напряжений составлял  $\sigma_i = (0,2 - 0,4) \cdot \sigma_B$ .

Показания продольных и окружных относительных деформаций  $\varepsilon_x$  и  $\varepsilon_y$  соответственно снимали при помощи электромеханических тензометров. Результаты выводились на многоточечные электронные потенциометры. За начало отсчета ( $t = 0$ ) принимался момент достижений заданной нагрузки, при этом зафиксированные деформации принимали в качестве упругих. Время опытов составляло примерно 50 ч.

Накопленные за это время деформации во всех случаях, как правило, не превышали 5%. При таких величинах деформаций учет изменения площади поперечного сечения и толщины стенки образцов в процессе ползучести для определения текущих напряжений и деформаций не вносит существенных поправок в наблюдаемые явления.

На рисунке 1.3 приведены результаты экспериментов, где показаны кривые ползучести ПЭВП при различных напряженных состояниях, отвечающих заданным уровням интенсивности напряжений.

Обработку результатов экспериментов (рисунок 1.3) можно упростить, производя ее относительно условных величин компонент главных напряжений и деформаций, одновременно полагая, что процесс ползучести развивается при постоянных напряжениях.

Кривые построены относительно деформаций ползучести в осевом  $\varepsilon_x^*$  и окружном  $\varepsilon_y^*$  направлениях. Отметим, что это суммарные деформации за вычетом упругих составляющих.

Накопленные к концу опыта деформации ползучести  $\varepsilon_x^*$ ,  $\varepsilon_y^*$  и скорость ползучести возрастают по мере увеличения напряжений.

Точки на графиках изохронных кривых  $\sigma_i \sim \varepsilon_i^*$  рисунка 1.4 соответствуют величинам интенсивности  $\varepsilon_i^*$ , вычисления которых получены для соответствующих значений при  $t = 1$ ,  $t = 10$  и  $t = 50$  ч. Про данным кривых  $\varepsilon_x^* = \varepsilon_x^*(t)$  и  $\varepsilon_y^* = \varepsilon_y^*(t)$ .

Видно, что в принятом диапазоне напряжений и при температуре 20° С поведение ПЭВП при всех видах напряженного состояния является нелинейным. Причем нелинейность уже проявляется при значениях  $\varepsilon_i^* \geq 0,5\%$ .

Согласно методике, приведенной в [110], где обработка опытных данных для каждого  $\nu = const$  показала, что подобие изохронных кривых ползучести кривой мгновенного деформирования строго не выполняется. Отсюда вывод, что с течением времени нелинейное поведение ПЭВП изменяется.

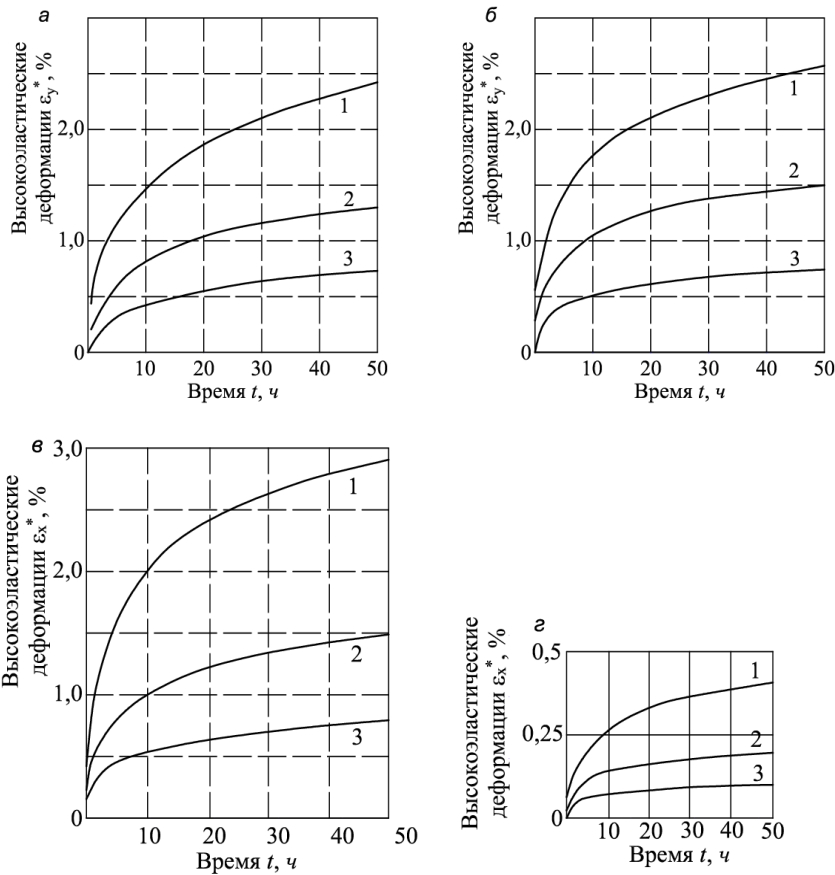


Рисунок 1.3 – Кривые ползучести ПЭВП при различных напряженных состояниях ( $T = 20^{\circ}\text{C}$ ):

- а –  $\nu = 0$ ;
- б –  $\nu = 0,5$ ;
- в –  $\nu = 2,5$ ;
- 1 –  $\sigma_i = 10$  МПа;
- 2 –  $\sigma_i = 8$  МПа;
- 3 –  $\sigma_i = 6$  МПа;

Из сравнения изохронных кривых ползучести ПЭВП для различных напряженных состояний видно, что для одинаковых условий по времени кривые  $\sigma_i \sim \varepsilon_i^*$ , располагаются тесным пучком. Наиболее удаленными друг от друга являются изохронные кривые, построенные по данным опытов при простом растяжении ( $\nu = 0$ ) и опытов при действии растяжения совместно внутренним давлением ( $\nu = 2,5$ ).

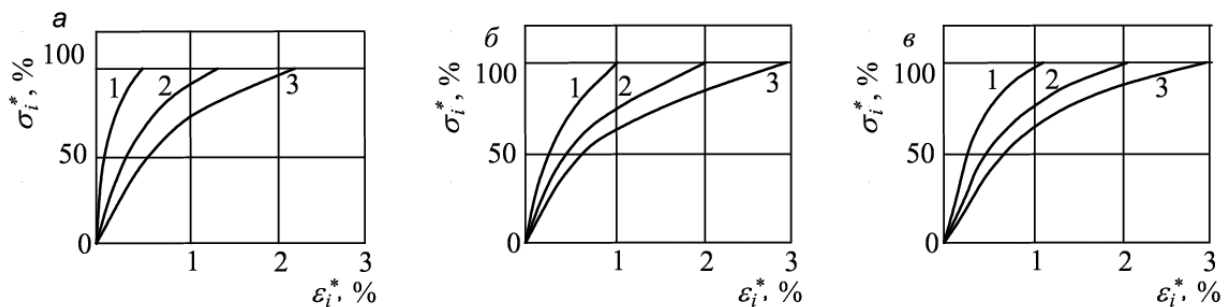


Рисунок 1.4 – Кривые ползучести ПЭВП ( $T = 20^{\circ}\text{C}$ ): а –  $\nu = 0$ ; б –  $\nu = 0,5$ ; в –  $\nu = 2,5$ ; 1 –  $t = 1$  ч.; 2 –  $t = 10$  ч.; 3 –  $t = 50$  ч.;

Результаты опытов при  $\nu = 0,5$  занимают промежуточное положение. Отклонения по напряжениям кривых  $\sigma_i \sim \varepsilon_i^*$  для опытов о  $\nu = 2,5$  от изохронных кривых одноосного растяжения при временах  $t > 10$  ч составляют  $\frac{\Delta\sigma_i}{\sigma_i} = 10 \div 15\%$ . На начальных участках ползучести ( $t <$

10 ч) отклонения несколько больше и достигают в некоторых случаях 15—25%, что связано с большей относительной погрешностью измерений малых деформаций.

Наблюдаемые расхождения между изохронными кривыми ползучести для простого и плоских напряженных состояний вызваны, по-видимому, некоторой начальной анизотропией образцов, изготовленных из экструзионных труб. Однако расхождения невелики и позволяют в первом приближении представить изохронные кривые ползучести ПЭВП для различных напряженных состояний ( $0 < \nu < \infty$ ), построенные для опытов продолжительностью 50 ч, единой кривой, в частности, изохронной кривой ползучести при простом растяжении.

Представление о единой изохронной кривой ползучести дает возможность использовать параметры материала, найденные из опытов при простейших нагружениях, для расчетов на ползучесть при сложном напряженном состоянии. Принимая во внимание зависимость характера нелинейности ПЭВП от времени, следует оговорить, что расчет деформаций при сложном напряженном состоянии должен производиться для той временной базы, на которой определены по данным простого растяжения расчетные параметры материала.

Рассмотрим возможность осуществления таких расчетов. Теоретический анализ ползучести полимеров при плоском напряженном состоянии можно провести при помощи нелинейного дифференциального уравнения связи с учетом спектра времен релаксации (1.68).

Зададимся условием:

$$\sigma_x = const; \sigma_y = const; \sigma_x > \sigma_y; \nu = \frac{\sigma_x}{\sigma_y} = const. \quad (1.81)$$

Положим, что при однородном деформировании полная деформация содержит две составляющие: упругую и высокоэластическую

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x^{el} + \varepsilon_x^*; \quad \varepsilon_y = \varepsilon_y^{el} + \varepsilon_y^*. \quad (1.82)$$

Упругие деформации  $\varepsilon_x^{el}$  и  $\varepsilon_y^{el}$  определяются законом Гука. Компоненты высокоэластической деформации представляют собой сумму слагаемых, каждое из которых отвечает соответствующей составляющей спектра времен релаксации:

$$\varepsilon_x^* = \sum_{s=1}^n \varepsilon_{s,x}^*; \quad \varepsilon_y^* = \sum_{s=1}^n \varepsilon_{s,y}^*. \quad (1.83)$$

где  $s = 1, 2, \dots, n$  – номер члена спектра.

Последовательность расположения членов спектра принимается в порядке убывания скоростей высокоэластической деформации (соответственно, в порядке возрастания времен релаксации).

Для определения слагаемых высокоэластических деформаций в направлениях  $x, y$  выпишем следующие уравнения (1.66) без температурных деформаций:



$$v_{\varepsilon_{xs}}^* \equiv \frac{\partial \varepsilon_{x,s}^*}{\partial t} = \frac{f_{x,s}^*}{\eta_s^*}; \quad v_{\varepsilon_{ys}}^* \equiv \frac{\partial \varepsilon_{y,s}^*}{\partial t} = \frac{f_{y,s}^*}{\eta_s^*}; \quad (1.84)$$

где  $f_{x,s}^*, f_{y,s}^*$  – функции девиаторов тензоров напряжений и высокоэластической деформации;  $\eta_s^*$  – коэффициент релаксационной вязкости высокоэластической деформации. Величины  $f_{x,s}^*, f_{y,s}^*, \eta_s^*$  – определяются из выражений:

$$f_{x,s}^* = \frac{3}{2}(\sigma_x - p) - E_{\infty,s} \cdot \varepsilon_{x,s}^*; \quad f_{y,s}^* = \frac{3}{2}(\sigma_y - p) - E_{\infty,s} \cdot \varepsilon_{y,s}^*; \quad (1.85)$$

$$\eta_s^* = \eta_{0,s}^* \exp \left\{ -\frac{1}{m^*} [\gamma^* p + |f_{nn,s}^*|_{max}] \right\};$$

Согласно условию (1.81)

$$|f_{nn,s}^*|_{max} = f_{x,s}^*$$

Для определения третьей компоненты высокоэластической деформации используем постоянство объёма:

$$\varepsilon_z^* = -(\varepsilon_x^* + \varepsilon_y^*) \quad (1.86)$$

После подстановки в уравнения (1.84) значения  $\eta_s^*$  из формулы (1.85) получим для каждого члена спектра в отдельности следующие дифференциальные уравнения ползучести:

$$\frac{\partial \varepsilon_{x,s}^*}{\partial t} = \frac{f_{x,s}^*}{\eta_{0,s}^*} \exp \left[ -\frac{\gamma_s^*}{3m_s^*} (\sigma_x + \sigma_y) + \left| \frac{f_{x,s}^*}{m_s^*} \right| \right]; \quad (s = 1, 2 \dots s) \quad (1.87)$$

$$\frac{\partial \varepsilon_{y,s}^*}{\partial t} = \frac{f_{y,s}^*}{\eta_{0,s}^*} \exp \left[ -\frac{\gamma_s^*}{3m_s^*} (\sigma_x + \sigma_y) + \left| \frac{f_{y,s}^*}{m_s^*} \right| \right]; \quad (s = 1, 2 \dots s)$$

Разделив переменные и проинтегрировав уравнения (1.87) с помощью интегральной показательной функции:

$$-E_i(-x) = -\int_{\infty}^x \frac{\exp(-x)}{x} dx = \int_{\infty}^x \frac{dx}{\psi(x)}.$$

которая подробно табулирована [24]:

$$\frac{d}{dx} [-E_i(-x)] = -\frac{\exp(-x)}{x}.$$

придем к следующим уравнениям:

для кривых ползучести вдоль оси  $x$

$$t_s^{(x)} = \frac{\eta_{0,s}^*}{E_{\infty,s}} \left\{ \exp \left[ -\frac{\gamma_s^*}{3m_s^*} (\sigma_x + \sigma_y) \right] \right\} [-E_i(-\zeta_{xs}^*) + E_i(-\zeta_{xs,0}^*)] \quad (1.88)$$

для кривых ползучести вдоль оси  $y$

$$t_s^{(y)} = \frac{1}{a_{0,s}} \frac{\eta_{0,s}^*}{E_{\infty,s}} \left\{ \exp \left[ -\frac{\gamma_s^*}{3m_s^*} (\sigma_x + \sigma_y) \right] \right\} \left[ -E_i \left( \frac{\zeta_{ys}^*}{a_{0,s}} \right) + E_i \left( -\frac{\zeta_{ys,0}^*}{a_{0,s}} \right) \right] \quad (1.89)$$

$$\zeta_{xs}^* = \left| \frac{f_{x,s}^*}{m_s^*} \right| = \left| \frac{(\sigma_x - 0,5\sigma_y) - E_{\infty,s} \cdot \varepsilon_{x,s}^*}{m_s^*} \right|; \quad \zeta_{xs,0}^* = (\zeta_{xs}^*)_{t=0};$$

$$\zeta_{ys}^* = \left| \frac{f_{y,s}^*}{m_s^*} \right| = \left| \frac{(\sigma_y - 0,5\sigma_x) - E_{\infty,s} \cdot \varepsilon_{y,s}^*}{m_s^*} \right|; \quad \zeta_{ys,0}^* = (\zeta_{ys}^*)_{t=0};$$

$$a_{0,s} = \frac{f_{ys,0}^*}{f_{xs,0}^*} = \frac{(\sigma_y - 0,5\sigma_x) - E_{\infty,s} \cdot \varepsilon_{y,s}^*}{(\sigma_x - 0,5\sigma_y) - E_{\infty,s} \cdot \varepsilon_{x,s}^*}.$$

где  $E_i(-\zeta^*)$  – интегрально показательная функция от аргумента  $\zeta^*$ .

За начальные условия принимаем:

$$t = 0; \quad \varepsilon_{x,s}^* = \varepsilon_{xs,0}^*; \quad \varepsilon_{y,s}^* = \varepsilon_{ys,0}^* \quad (1.90)$$

Тогда в соответствии с формулами (1.85) имеем:

$$\begin{cases} f_{xs,0}^* = (\sigma_x - 0,5\sigma_y) - E_{\infty,s} \cdot \varepsilon_{xs,0}^* \\ f_{ys,0}^* = (\sigma_y - 0,5\sigma_x) - E_{\infty,s} \cdot \varepsilon_{ys,0}^* \end{cases} \quad (1.91)$$

На практике заданные значения напряжений прикладываются не мгновенно, а в течение некоторого промежутка времени. Поэтому начальные величины деформаций  $\varepsilon_{xs,0}^*$  и  $\varepsilon_{ys,0}^*$  для различных составляющих спектра времен релаксации (для разных  $s$ ) могут быть различными.

Учитывая сказанное, понятно, что решение уравнений (1.88), (1.89) зависит от предыстории процесса, т. е. значения отдельных слагаемых высокоэластических деформаций и их распределение будет зависеть от предшествующего режима нагружения. В случае, когда нагружение ведется с достаточно большой скоростью, неупругая деформация не успевает значительно развиться и ею можно пренебречь. Тогда условие (1.90) можно записать в виде:

$$t = 0; \quad \varepsilon_{x,s}^* = \varepsilon_{xs,0}^* = 0; \quad \varepsilon_{y,s}^* = \varepsilon_{ys,0}^* = 0 \quad (1.92)$$

Полагаем, что величины начальных деформаций  $\varepsilon_{xs,0}^*$  и  $\varepsilon_{ys,0}^*$  из условия (1.90) известны или в качестве начальных условий принимаем условие (1.91). Тогда формулы (1.83), (1.88), (1.89) позволяют получить расчетные кривые ползучести вдоль осей  $x, y$  как сумму составляющих дискретного спектра времен релаксации, вычисленных для разных  $s$  при одном и том же времени  $t$ .

Уравнения (1.88), (1.89) являются неявными относительно  $\varepsilon_{x,s}^*, \varepsilon_{y,s}^*$ , поэтому построение функции  $\varepsilon_x^* = \varepsilon_x^*(t), \varepsilon_y^* = \varepsilon_y^*(t)$  производится графически. При этом удобно использовать полулогарифмические координаты, в которых уравнения (1.88), (1.89) преобразуются к виду:

$$\lg\left(\frac{t^{(x)}}{t_0}\right) = -\frac{\gamma_s^*(\sigma_x + \sigma_y)}{3m_s^* \ln 10} + \lg \frac{\eta_{0,s}^*}{E_{\infty,s} t_0} + \lg[-E_i(-\zeta_{xs}^*) + E_i(-\zeta_{xs,0}^*)]; \quad (1.93)$$

$$\lg\left(\frac{t^{(y)}}{t_0}\right) = -\frac{\gamma_s^*(\sigma_x + \sigma_y)}{3m_s^* \ln 10} + \lg \frac{\eta_{0,s}^*}{a_{0,s} E_{\infty,s} t_0} + \lg \left[ -E_i\left(\frac{\zeta_{ys}^*}{a_{0,s}}\right) + E_i\left(-\frac{\zeta_{ys,0}^*}{a_{0,s}}\right) \right]. \quad (1.94)$$

Здесь  $t_0$  – произвольный масштаб времени, выбираемый из соображений удобства построения.

Слагаемые высокоэластической деформации  $\varepsilon_z^*$  находим из условия (1.86):

$$\varepsilon_{z,s}^* = -(\varepsilon_{x,s}^* + \varepsilon_{y,s}^*) \quad (1.95)$$

Вместе с упругими деформациями, величины которых определяются по закону Гука, уравнения (1.83), (1.86), (1.88), (1.89) и (1.95) полностью характеризуют деформированное состояние в условиях ползучести с учетом дискретного спектра времен релаксации под действием напряжений  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$ . Полагая в этих уравнениях  $\sigma_y = 0$ , приходим к зависимостям, описывающим ползучесть при одноосном напряженном состоянии.

Теоретические расчеты при двухосном растяжении в условиях ползучести осуществляли при наличии упругих и релаксационных параметров  $E, m_s^*, \gamma_s^*, E_{\infty,s}, \eta_{0,s}^*$ , определенных из независимых опытов. Если ограничиться использованием двух членов спектра, отвечающих младшему и старшему спектру времен релаксации, указанные параметры можно найти из опытов на простое растяжение с постоянной скоростью деформирования или из опытов на ползучесть и релаксацию деформаций (упругое последствие).

Методика определения релаксационных констант будет приведена в последней главе диссертации. Отличие от методики предложенным проф. А.Я. Гольдманом состоит в подходе определения релаксационных констант на основе кривых релаксации и ползучести полимеров.

Отметим, что модуль скорости высокоэластической деформации  $m_s^*$  весьма незначительно зависит от режимов испытаний и принимаются одинаковым для всех членов спектра врем релаксации  $m_s^* = m^*$ .

В соответствии с изложенным профессором Гольдманом А. Я. [88,89] были рассчитаны теоретические кривые ползучести ПЭВП при простом и двухосном растяжениях с учетом дискретности спектра времен релаксации. Расчетные параметры для первого члена спектра ( $s = 1$ ) определяли из независимых опытов на релаксацию деформаций. Расчетные параметры для второго члена спектра ( $s = 2$ ) находили по данным опытов на ползучесть при одноосном напряженном состоянии (опыты с  $\nu = 0$ ). Значения модуля скорости высокоэластической деформации  $m^*$  принимали по данным экспериментов на простое растяжение с постоянной скоростью деформирования.

Из этих же опытов установлено, что объемный коэффициент  $\gamma^*$  для исследуемого материала может быть принят равным нулю. Во всех случаях при расчетах кривых ползучести по уравнениям (1.88), (1.89) полагали, что при  $t = 0$  имеют место только упругие деформации.

На рисунке 1.5 и 1.6 в качестве примера дано сопоставление теоретических кривых ползучести с опытными данными, полученными при  $\nu = 2,5$  и  $\sigma_i = 8$  МПа. Значения использованных в расчетах параметров приведены из работы [89].

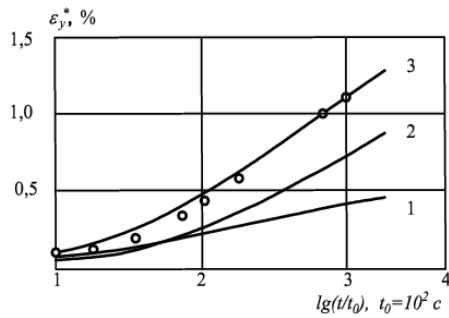


Рисунок 1.5 – Сравнение теоретических и экспериментальных кривых ползучести ПЭВП при одноосном нагружении. ( $T = 20^\circ\text{C}$ ,  $\nu = 2,5$ ,  $\sigma_i = 8$  МПа). Точки – экспериментальные данные; сплошные линии – теоретические кривые, по (1.75) с учетом двух составляющих спектра: 1 – старшая составляющая спектра, 2 – младшая, составляющая спектра, 3 – суммарная кривая.

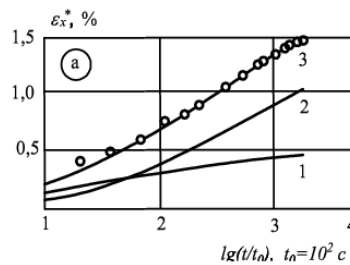
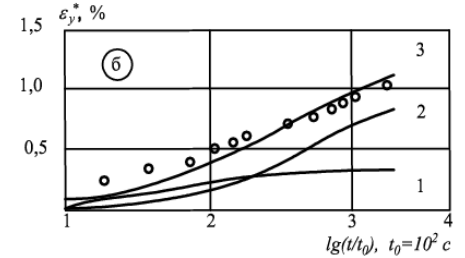


Рисунок 1.6 – Сравнение теоретических и экспериментальных кривых ползучести ПЭВП при плоском напряженном состоянии. ( $T = 20^\circ\text{C}$ ,  $\nu = 2,5$ ,  $\sigma_i = 8$  МПа). Точки – экспериментальные данные; сплошные линии – теоретические кривые, по (1.75) и (1.76) с учетом двух составляющих спектра: 1 – старшая составляющая спектра, 2 – младшая, составляющая спектра, 3 – суммарная кривая. а) в осевом направлении; б) в окружном направлении.



Расчеты показывают, что теоретические кривые одномерной ползучести удовлетворительно согласуются с экспериментальными (рисунок 1.5). Наибольшие расхождения (в пределах до 20%) имеют место на начальных участках кривых, описание которых осуществляется в основном за счет первого члена спектра (кривая 1 на рисунке 1.5). На конечных участках, где наиболее существенно сказывается вклад второго члена спектра (кривые 2 на рисунке 1.5), теоретические и экспериментальные кривые ползучести практически совпадают.

Аналогичная картина наблюдается и при рассмотрении теоретических и экспериментальных кривых ползучести  $\varepsilon_x^* = \lg(t/t_0)$ ,  $\varepsilon_y^* = \lg(t/t_0)$  из опытов при  $\nu = 2,5$  (рисунок 1.6).

Несколько худшее согласие с экспериментом, особенно заметное на начальных участках, имеют кривые ползучести в направлении оси  $y$ . Однако начиная с  $t = 10$  ч, расхождение между расчетными и опытными данными не превышает 10%.

Учитывая, что расчет теоретических кривых ползучести при плоском напряженном состоянии выполнен с помощью параметров, найденных из опытов при одноосном растяжении

и других независимых экспериментов, то полученную точность описания следует признать вполне удовлетворительной, особенно при больших временах действия нагрузки, представляющих наибольший практический интерес.

### 1.3 Современное состояние исследований в области устойчивости стержней и методов расчета с учетом реологии материала.

#### 1.3.1 Обзор исследований устойчивости стержневых систем

Первые исследования в области устойчивости упругих систем принадлежат Л. Эйлеру и Лагранжу. Леонард Эйлер первый классифицировал различные формы упругой линии призматических стержней. Он показал, что прямой, достаточной длины стержень может выпучиться под влиянием силы, действующей вдоль его оси.

Позже он исследовал вопрос о равновесии вертикального стержня под влиянием собственного веса [200] и не учел возникающие горизонтальные составляющие реакции опор.

В 1778 году Л. Эйлер вновь обращается к проблеме устойчивости, приняв равенство нулю продольной силы и исследовал решение дифференциального уравнения:

$$EI \frac{d^3 y}{dx^3} + qz \frac{dy}{dz} = 0$$

Только здесь Эйлер обнаружил, что ни при каких значениях интенсивности  $q$  не существует никаких форм равновесия, кроме прямолинейной. Отсюда Эйлер сделал вывод, что такой стержень вообще не может потерять устойчивость. Спустя только несколько месяцев он выступил с критикой своей работы. Он понял, что при выводе уравнения равновесия – он не учел момент, создаваемый горизонтальной реакцией  $N$ . Реакция возникает если учитывать собственный вес, и равна нулю если  $q = 0$ . Однако при  $q \neq 0$  появление горизонтальных реакций неизбежно следует из условия равновесия всей стойки. Тогда вместо вышеуказанного уравнения получится правильное дифференциальное уравнение:

$$EI \frac{d^3 y}{dx^3} + qz \frac{dy}{dz} = N$$

Лагранж распространил теорию Эйлера на стержни переменного сечения и применил ее для выяснения наиболее устойчивой формы сечения сжатых стержней, или иначе, говоря, занимался вопросами оптимизации [202].

Позже результаты Эйлера и Лагранжа повторили А.Г. Greenhill, М.Хейм, Ф.С. Ясинский и Н. Engelhardt.

А.Г. Greenhill [203] решил задачу выпучивания призматического стержня под действием распределенной осевой нагрузки. Если продольные сжимающие силы непрерывно распределены

вдоль оси стержня (собственный вес), то разрешающее дифференциальное уравнение кривой прогибов выпученного стержня будет иметь вид:

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = \int_0^x q[y(x) - y(\xi)] d\xi \quad (1.96)$$

Продифференцировав по  $x$  A.G. Greenhill, получил

$$EI \frac{d^3 y}{dx^3} = -q(l - x) \frac{dy}{dx} \quad (1.97)$$

В своей статье A.G. Greenhill указывает на разнообразные проблемы выпучивания, которые можно решить использованием функций Бесселя.

Самостоятельно эта проблема была очень подробно исследована Ф.С. Ясинским [204]. Им было представлено исследование с учетом различных граничных условий и внешней нагрузки, где для каждого случая закрепления стержня приведена критическая сила  $F_{кр}$ . Ф.С. Ясинский приводит коэффициенты для случая, когда гибкость стержня меньше гибкости предельной.

В своей работе [205] Lamarle в середине XIX века впервые указал пределы применимости формулы Л. Эйлера.

С.П. Тимошенко [91] используя энергетические подходы при действии осевой силы и собственного веса стержня вдоль оси определил критическую силу для стержня с жестко защемленным концом и классического закрепления стержня «шарнир-шарнир».

Используя приближенный метод решения для уравнения изогнутой оси балки, Р. Клебш [206], G.H. Halphen [207], Ф.Е. Максименко [208] и Е. Коллиньон [209] получили совпадение полученных своих результатов с решением уравнения в квадратурах.

Вопросами упругого равновесия приходится встречаться и во многих других случаях. Так, например, M. Levy и G.H. Halphen [207] исследовали вопрос об устойчивости колец, находившихся под действием равномерного радиального давления.

L. Prandtl [210] и A.G.M. Michell [211] произвели исследование устойчивости изогнутой полосы.

Устойчивость прямоугольной сжатой пластинки была рассмотрена G. H. Bryan [212].

За последние годы разрешено много других задач этого рода, связанных главным образом, с различными вопросами строительной техники. Первая попытка систематизировать эти отдельные вопросы и создать общую объединяющую их теорию принадлежит G. H. Bryan [212].

Он выяснил, что теорема Kirchhoff [213] об однозначности решений уравнений теории упругости не может быть применена в некоторых случаях, как, например, в случаях исследования длинных стержней, тонких пластинок и оболочек.

При этом исследовании им было принято за основное положение, что устойчивое равновесие при произвольной форме тела обуславливается тем, что в этом случае потенциальная энергия имеет значение минимум. Исходя из этого принципа, G. H. Bryan имел возможность

получить не только уже известные решения для сжатых стержней и круговых колец, но также и некоторые новые данные относительно устойчивости прямоугольных пластинок.

R. V. Southwell [214] работал над дальнейшим развитием этой теории. Он рассматривал идеальный абсолютно прочный материал, разрушение которого возможно только при потере устойчивости; в этом случае вопрос не ограничивается только тонкими стержнями, тонкими пластинками и оболочками. Он составил общие уравнения безразличного равновесия, выражающие условия неустойчивости данной формы при условии, что составляющие перемещений не малы по сравнению с единицей. Благодаря применению этих уравнений, R. V. Southwell пришел к заключению, что известные решения вопросов устойчивости, полученные на основании приближенных теорий тонких стержней и пластинок, правильны, как первые приближения общих решений, получаемых на основании уравнений безразличного равновесия.

Над общими вопросами упругой устойчивости работал и R. Mises [215]. Он рассматривал систему точек, соединенных между собою упругими стержнями и находящимися под действием внешних сил. На основании своих рассуждений он пришел к следующему выводу, касающемуся любой упругой системы, обладающей при отсутствии внешних нагрузок определенным естественным состоянием: «Если нагрузки приложенные к упругой системе точек, заданы только до некоторого численного значения  $\lambda$ , то среди этих значений имеется такое, отличное от нуля, значение  $\lambda_0$ , (оно может равно и бесконечности), что для всех  $\lambda$  с абсолютной величиной, меньшей  $\lambda_0$ , существуют однородные устойчивые положения равновесия. Когда  $\lambda$  приближается к нулю, то они непрерывно приближаются к естественному состоянию. Для начальных значений  $\lambda$ , больших  $\lambda_0$ , задача равновесия может иметь несколько решений».

Это положение, выведенное для упругой системы точек, справедливо и для любого упругого тела. Значение критического предела  $\lambda_0$  зависит от формы тела, рода нагрузки и величины модуля упругости, причем гибким телам и меньшему модулю упругости соответствует меньшие значения  $\lambda_0$ . В действительности, строительные материалы имеют определенный (конечный) предел текучести. Из этого следует, что на практике для таких строительных материалов вопрос об упругой устойчивости имеет значение только в случаях тонких стержней, пластинок и оболочек.

A.G. Michell [211] в исследовании поперечного изгиба стержня привел решение в квадратурах, где им доказано, что выражение для кривизны двухпараметрическая. Первый параметр появляется при учете нормальных и касательных напряжений, возникающие на площадке, параллельной оси стержня, а второй - прямо пропорционален изгибному моменту. Первая поправка, как показала практика, незначительна, и ею в случае тонких стержней пренебрегают.

Значительный вклад в историю развития вопросов устойчивости стержней, пластин и оболочек внес С.П. Тимошенко [91]. Представление решений с помощью тригонометрических рядов и вычисление этих рядов из условия минимума энергии позволило ему рассмотреть

широкий класс задач устойчивости стержней и пластин и ввести энергетический метод в практику инженерных исследований.

Безусловно, большой вклад в исследовании устойчивости внес творец строительной механики корабля И.Г. Бубнов. Его основополагающий курс по решению различных проблем изгиба и устойчивости пластин, его известный метод решения дифференциальных уравнений, представляют собой огромное и важное наследие. В частности, он предложил приближенный метод определения критической силы, не требующий определения потенциальной энергии системы.

Этот метод успешно развил Б.Г. Галеркин в своей работе [52], где привел исследование об устойчивости консольного стержня, нагруженного равномерно распределенной нагрузкой вдоль оси и осевой сжимающей силы.

Предложенная и упомянутая ранее методика решения задачи устойчивости A.G. Greenhill [203], не обошла без внимания другого известного ученого профессора А.Н. Динника, который в своей работе [216] при различных граничных условиях определил критическую длину стержня  $l_{кр}$ . При этом он учел собственный вес стержня. Его результат повторил в точности своим решением Б.Б. Галеркин [52].

Профессор Н.К. Снитко в работах [217] используя классический метод начальных параметров определял критическую нагрузку для сжатых и сжато-изогнутых стержней.

В 1935 г видный учёный в областях теории устойчивости колонн и балок, прочности кривых брусьев, конструирования уникальных машин для испытания материалов и стержней А.П. Коробов [218] предложил вариант приближенного метода расчета решения задачи устойчивости упругого стержня. На основе данного предложенного метода Н.М. Митропольский усовершенствовал метод, который позволил расширить круг поставленных задач упругого равновесия намного упрощая вычисления.

Профессор А.Р. Ржаницын [42-47] при определении критической силы для составных стержней использует графоаналитический метод.

В.М. Макушин в работах [219] исследовал устойчивость стержней с учетом собственного веса стержня.

Задачи упругого равновесия не обошел и в своих работах А.Ф. Смирнов [220] где он успешно использует метод малых возмущений.

Свой вклад в развития методов решения задач продольного изгиба упругих систем внесли В.В. Болотин [29-30], И.И. Гольденблат [63] и В.П. Белоусов [221].

А.Ф. Смирнов [220], И.М. Рабинович [27] разработали и предложили методом перемещений и смешанным методом канонические формы расчета сжатых упругих рам в условиях продольного изгиба.

Вопросы общей линейной теории устойчивости для произвольно искривленного стержня построил Vielsack P [222,223].



Академик А.Н. Крылов всегда давал оригинальное решение, которое всегда отличалось крайней простотой и ясностью и в то же время научной строгостью. Так, например, в работе [224] для случая вращающихся валов, сжатых осевой силой, он получил решение для критической угловой скорости.

В монографии "Вариационные методы решения задач упругости с приложением к изгибу и кручению авиационных профилей" Л.С. Лейбензон [225] приводит решение по определению критической угловой скорости для равномерно вращающегося консольного стержня при действии осевой силы.

В 1932 г. А. Линеvский в работе [226] используя приближенный метод для определения критической угловой скорости колонны при осевом сжатии и при учете ее собственного веса решил задачу аналитически.

Также профессор А.Н. Динник [216] приводит решение в квадратурах значения величины критического крутящего момента в зависимости от равномерного вращения стержня

Исследуя вращение консольного стержня профессор Я.Г. Пановко, приводит выражение для критической скорости

$$v_{кр} = \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{gEI}{q}} \quad (1.98)$$

Л. Эйлер [200-201] впервые для классического закрепления стержня «шарнир-шарнир» исследовал устойчивость стержней переменной жесткости и получил формулы для определения критической силы.

В своих работах Filon L.N.G [227 и П.А. Лукаш [228] для стержней переменного сечения приводят точное решение используя дифференциальное уравнение изогнутой оси балки.

В работе [216] А.Н. Динник завершает исследования для консольной полосы, подверженной действию равномерно распределенной нагрузки начатой в работе [203] А.Г. Greenhill. Практически для всех случаев вариации поперечного сечения определены критические силы.

В одной из работ профессор Н.К. Снитко устойчивость консольных стержней рассматривал сечения, моменты инерции которых менялись по закону дробно-линейных функций [217].

Наконец, А.Ф. Смирнов [220] приводит решение задач устойчивости усеченной прямоугольной пирамиды.

В заключении отметим, что в настоящее время проблема устойчивости строительных конструкций и их элементов не потеряла своей актуальности. К ней обращались и обращаются многие исследователи В.И. Травуш С.Б. Косицын, В.В. Галишникова, В.Н. Паймушин, Р.А. Каюмов, И.Д. Грудев, В.Б. Зылев, В.Д. Ключников, Л.С. Ляхович, Г.А. Мануйлов,

Мещеряков В.Б., А.В. Перельмутер, В.И. Сливкер, В.Д. Потапов, С.И. Трушин, Г. Циглер, В.Л. Якушев, Д.В. Трещев и др.

### 1.3.2 Обзор исследований устойчивости плоской формы изгиба

Хорошо известно, что стержень с весьма различными по величине моментами инерции поперечного сечения относительно главных осей при изгибе его в плоскости наибольшей жесткости может потерять устойчивость и выпучиться.

Первые задачи этого рода было рассмотрено выдающимся ученым профессором L. Prandtl [210] в его диссертационной работе.

Он обнаружил, что при изгибе в своей плоскости одинаковыми концевыми моментами, при некотором значении момента полоса может выпучиться и принять неплоскую форму (критическое значение момента).

При решении данной задачи L. Prandtl за основу принял основные соотношения, выведенные Л. Эйлером. Поэтому решения Л. Прандтля следует рассматривать как развитие теории устойчивости Л. Эйлера изгибаемых стержневых систем.

Добавим, что L. Prandtl [210] решил задачи устойчивости плоской формы изгиба для жестко защемленной консольной балки в бесконечных рядах. Нагрузки варьировались от сосредоточенной силы на конце с учетом собственного веса. Силы прикладывались как к центру тяжести концевое сечения, так ниже или выше главной центральной оси  $z$ .

Исследованию плоской формы изгиба посвящены много работ отечественных и зарубежных ученых. К ним следует отнести работы A.G.M. Michell [211], Timoshenko S. [91], Bryan G [212], А. Р. Ржаницына [42-47], А. С. Вольмира [147].

Известно, что для центрально сжатого стержня основное дифференциальное уравнение по форме совпадает с уравнением для полосы при чистом изгибе.

Объяснение этому феномену кроется в том, что вид уравнения равновесия полосы и, следовательно, критическое значение нагрузки зависят от многих факторов таких как положение точки приложения нагрузки по высоте сечения относительно центральной оси, концевые граничные условия, переменность поперечного сечения, конечность кривизны в плоскости изгиба и т.д.

Предложенный С.П.Тимошенко [91] решение энергетическим методом задач бокового выпучивания для стержней с различными граничными условиями и нагрузкой проиллюстрировало его высокую эффективность даже при малом числе приближений.

Интересную особенность было продемонстрировано С.П. Тимошенко в задаче об устойчивости внецентренно сжатой полосы. Она заключается в том, что вскрывает глубокую связь между задачами Л. Эйлера и Л. Прандтля, а именно: при стремлении эксцентриситета

приложения продольной силы к нулю - решение Л.Эйлера, а при стремлении к бесконечности получается решение Л. Прандтля.

Применение метода Бубнова-Галеркина и Ритца-Тимошенко к решению задач бокового выпучивания можно найти в работе Я.Л. Пратусевича.

Влияние  $b/h$  на величину критической нагрузки рассматривал Х. Рейснер, используя уточненное уравнение. Продолжил исследования в этом направлении А.Н. Динник [216] и показал, что минимальное значение критического параметра получается для балки, отмечая, что с увеличением отношения  $b/h$  значение параметра возрастает, а площадь сечения остается постоянным.

С. Scher, С. Laschinski и S.F. Szu в своих работах учли изгиб балок в двух плоскостях и предложили упрощенную методику расчета на устойчивость плоской формы изгиба высоких балок прямоугольного поперечного сечения.

Очень редко удается решить дифференциальные уравнения с переменными коэффициентами в замкнутом виде и поэтому задачи устойчивости полос при произвольных нагрузках обычно решаются численно и с приближенными методами расчета. Аналогичный известному способу Dannehl I. в теории колебаний необходимо отметить А.П. Коробова [218], в которой разработан собственный прием.

В этом направлении можно отнести работы П.И. Алексеева [231], где им для построения приближенного способа расчета используется аналогия между уравнением колебаний струны переменной плотности и уравнением выпучивания полосы при произвольной нагрузке и применяется приближенная формула квадрата первой частоты струны Kreuzinger H [232] для определения критических нагрузок. В этом направлении примыкают работу профессора К.Б. Аксентяна.

Работы П.Д. Мищенко показывают, что необходимо учитывать действия и сдвигающих сил при потере устойчивости полосы, так как оно может произойти в результате приложенных вдоль узких граней полосы касательных напряжений.

Стоит обратить внимание на книгу профессора Б.Г. Коренева, где приведены задачи выпучивания полос переменной жесткости, имеющие решения в Бесселевых функциях.

В работе В.П. Белоусов совместно с И. А. Бахтиным [234], приводится задача устойчивости плоской формы изгиба балок, работающих за пределом упругости, где из условия стационарности функционала энергии и с применением метода конечных элементов выполняется построение матрицы жесткости для элементов рассматриваемой системы.

В работах А. Я. Дривинга [235] имеются несколько примеров решения задач устойчивости плоской формы изгиба балок ломаного очертания.

К недостаткам решения А.Я. Дривинга можно отнести то, что полученные результаты применимы только к призматическим балкам и важные вопросы расчета на устойчивость одно- и двускатных балок остаются открытыми.

Сопротивление деревянных конструкций при длительных нагрузках рассматривается в работе профессора Пятикрестовского К.П. [236].

На основании произведенного анализа работ можно еще раз подчеркнуть, что вопрос об устойчивости непрямоугольных балок нельзя считать разработанным в полной мере.

#### **1.4 Выводы по главе**

1. Приведено современное состояние основополагающие базовые представления реологии как самостоятельной отрасли науки о материалах. Проведён краткий исторический обзор по вопросам экспериментального исследования механических свойств полимерных материалов строительного назначения.

2. В 1.1.1 и 1.1.2 приводятся основные теории ползучести конструкционных реономных материалов, где подробно рассматривается линейная и нелинейная вязкоупругость материалов, уделяется большое внимание конструкционным полимерам.

3. Во втором разделе приведены основные уравнения вязкоупругой среды в матричной форме, необходимые для решения задач в ниже приведенных главах, включающие в себя компоненты деформации ползучести, в частности, высокоэластической деформации полимера.

Здесь так же приведено определяющее уравнение состояния, где показано, что при описании механического поведения сшитых полимеров необходимо учитывать наличие спектра времен релаксации. В приведенных таблицах даны средние значения параметров, использованные ранее при расчете диаграмм растяжения полиэтилена с одним членом спектра времен релаксации и значения параметров первого и второго членов, использованные при расчете теоретических диаграмм растяжения. Обзор исследования ползучести кристаллических полимеров при плоском напряженном состояниях рассмотрен анализ экспериментальных данных профессора А.Я. Гольдмана на примере тонкостенных трубчатых образцов из ПЭВП при комнатной температуре.

4. В завершении первой главы приведены обзор исследований устойчивости на продольный изгиб и потери устойчивости стержней и балок плоской формы изгиба.

## 2 УСТОЙЧИВОСТЬ СТЕРЖНЕЙ В УПРУГОЙ И ВЯЗКОУПРУГОЙ ПОСТАНОВКАХ

### 2.1 Численно-аналитический расчет продольного изгиба призматических упругих стержней с учетом собственного веса при действии осевой нагрузки

Рассмотрим отсеченную часть однородного, шарнирно опертого, вертикально расположенного стержня, испытывающего указанную нагрузку.

Элемент нагрузки  $q d\zeta$  вызывает в сечении с абсциссой  $x$  изгибающий момент  $-q \cdot [v(x) - v(\zeta)] d\zeta$  (рисунок. 2.1).

Полный изгибающий момент в этом сечении равен сумме моментов всех сил, расположенных между верхним концом стойки и рассматриваемым сечением (рисунок. 2.1).

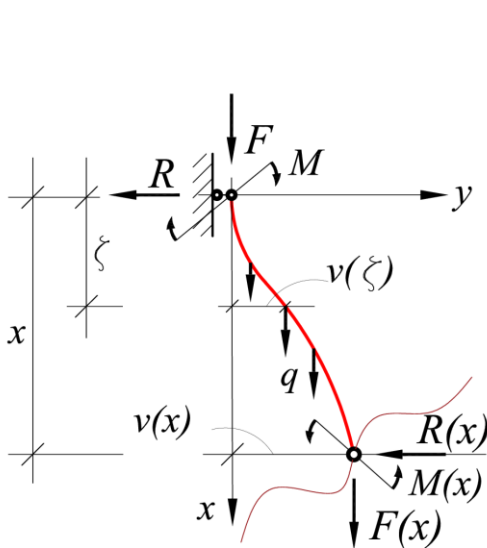


Рисунок 2.1 – Принятая схема сил для составления момента в сечении

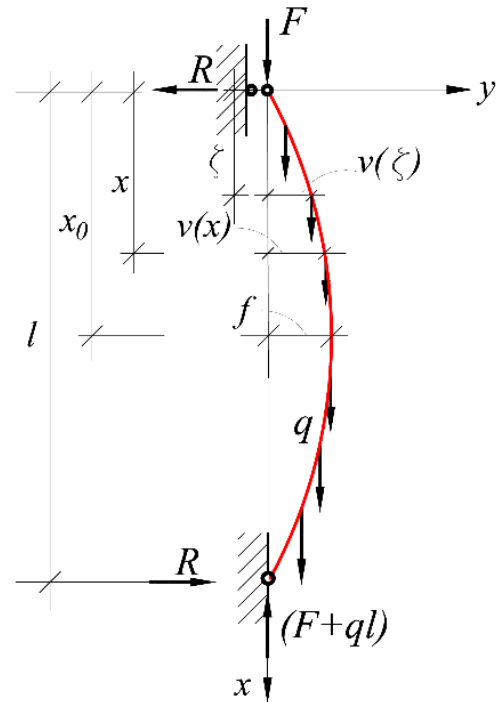


Рисунок 2.2 – Схема сил по Л. Эйлеру. Расчетная схема «Шарнир-Шарнир»

Запишем уравнение моментов для рассматриваемого сечения (рисунок 2.1):

$$M(x) = -F \cdot v(x) - \int_0^x q \cdot [v(x) - v(\zeta)] d\zeta - Rx + M \quad (2.1)$$

В случае малых деформаций связь между прогибом и моментом:

$$EI_z \frac{d^2 v}{dx^2} = M(x) \quad (2.2)$$

Тогда соотношение (2.1) с учетом (2.2.) принимает вид:

$$EI_z \frac{d^2 v}{dx^2} = -F \cdot v(x) - q \int_0^x [v(x) - v(\zeta)] d\zeta - Rx + M \quad (2.3)$$

Преобразуем интеграл, входящий в (2.3):

$$\int_0^x [v(x) - v(\zeta)] d\zeta = v(x)x - \int_0^x v(\zeta) d\zeta = v(x)x - \zeta v(\zeta)|_0^x + \int_0^x \zeta \frac{dv}{d\zeta} d\zeta = \int_0^x \zeta \frac{dv}{d\zeta} d\zeta, \quad (2.4)$$

то вместо уравнения (2.1) получится:

$$M(x) = -F \cdot v(x) - q \int_0^x \zeta \frac{dv}{d\zeta} d\zeta - Rx + M, \quad (2.5)$$

откуда

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{F \cdot v(x)}{EI_z} + \int_0^x \frac{q}{EI_z} \zeta \frac{dv}{d\zeta} d\zeta = \frac{M}{EI_z} - \frac{Rx}{EI_z} \quad (2.6)$$

Введем безразмерные величины для соотношения (2.6), сделав следующие замены:

$$x = \xi l; \quad \zeta = l\psi; \quad v(x) = lv(\xi) \quad (2.7)$$

Область определения для новой переменной:

при  $x = 0$ ;  $\xi = 0$ , а при  $x = l$ ;  $\xi = 1$ , следовательно  $0 \leq \xi \leq 1$

Тогда

$$\frac{d^2 v(\xi)}{d\xi^2} + \alpha^2 v(\xi) + \int_0^l \beta^3 \psi \frac{dv}{d\psi} d\psi = m - r\xi \quad (2.8)$$

Так как решение будет приведено и численно, для удобства интегрирования при различных граничных условиях, продифференцируем (2.8) дважды:

$$\frac{d^4 v(\xi)}{d\xi^4} + \alpha^2 \frac{d^2 v(\xi)}{d\xi^2} + \beta^3 \left[ \frac{dv(\xi)}{d\xi} + \xi \frac{d^2 v(\xi)}{d\xi^2} \right] = 0. \quad (2.8a)$$

Здесь

$$\alpha^2 = \frac{Fl^2}{EI_z}; \quad \beta^3 = \frac{ql^3}{EI_z}; \quad m = \frac{Ml}{EI_z}; \quad r = \frac{Rl^2}{EI_z}. \quad (2.9)$$

Решение (2.8) и (2.8a) будем искать в виде степенного ряда:

$$v(\xi) = \sum_{k=0}^n A_k \xi^k; \quad (2.10)$$

Ниже приведем с первой по четвертую производные  $v(\xi)$ :

$$\frac{dv(\xi)}{d\xi} = \sum_{k=1}^n k A_k \xi^{k-1}; \quad \frac{d^2 v(\xi)}{d\xi^2} = \sum_{k=2}^n k(k-1) A_k \xi^{k-2}; \quad (2.10a)$$

$$\frac{d^3 v(\xi)}{d\xi^3} = \sum_{k=3}^n k(k-1)(k-2)A_k \xi^{k-3};$$

$$\frac{d^4 v(\xi)}{d\xi^4} = \sum_{k=4}^n k(k-1)(k-2)(k-3)A_k \xi^{k-4}.$$

Для одинаковой степени при  $(\xi^{k-4})$ , как например, у 4-ой производной, запишем (2.10а) иначе:

$$\frac{dv(\xi)}{d\xi} = \sum_{k=4}^{n+3} A_{k-3}(k-3)\xi^{k-4};$$

$$\frac{d^2 v(\xi)}{d\xi^2} = \sum_{k=4}^{n+2} A_{k-2}(k-3)(k-2)\xi^{k-4};$$

$$\xi \frac{d^2 v(\xi)}{d\xi^2} = \sum_{k=2}^n A_k k(k-1)\xi^{k-1} = \sum_{k=5}^{n+3} A_{k-3}(k-4)(k-3)\xi^{k-4};$$

$$\frac{d^4 \xi(\varphi)}{d\xi^4} = \sum_{k=4}^n k(k-1)(k-2)(k-3)A_k \xi^{k-4};$$
(2.11)

После постановки соответствующих производных в уравнение (2.8а) и сократив на  $(k-3)$ , получим:

$$\sum_{k=4}^n k(k-1)(k-2)A_k \xi^{k-4}$$

$$= -\alpha^2 \sum_{k=4}^{n+2} (k-2)A_{k-2} \xi^{k-4} - \beta^3 \left[ \sum_{k=4}^{n+1} A_{k-3} \xi^{k-4} + \sum_{k=5}^{n+3} A_{k-3}(k-4)\xi^{k-4} \right] = 0$$

Или, приравнявая коэффициенты при  $\xi^{k-4}$ , получим:

$$A_k = \frac{-[\alpha^2 A_{k-2}(k-2) + \beta^3 A_{k-3}(k-3)]}{k(k-1)(k-2)}$$
(2.12)

Подставив первые и вторые производные из (2.10а) в (2.8), имеем:

$$\sum_{k=2}^n k(k-1)A_k \xi^{k-2} = -\alpha^2 \sum_{k=0}^n A_k \xi^k - \sum_{k=1}^n \frac{\beta^3 k}{(k+1)} A_k \xi^{k+1} + m - r\xi;$$
(2.13)

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях, получим:

$$1 \cdot 2 \cdot A_2 = -\alpha^2 A_0 + m;$$

отсюда

$$A_2 = \frac{-\alpha^2 A_0 + m}{2};$$
(2.14)

далее

$$2 \cdot 3 \cdot A_3 = -\alpha^2 A_1 - r;$$

тогда

$$A_3 = \frac{-\alpha^2 A_1 - r}{6} \quad (2.15)$$

Запишем для  $k = 4, 5, 6, 7, \dots, n$

$$k(k-1)A_k = -\alpha^2 A_{k-2} - \beta^3 \frac{(k-3)}{(k-2)} A_{k-3};$$

Откуда

$$A_k = \frac{\left[ -\alpha^2 A_{k-2} - \beta^3 \frac{(k-3)}{(k-2)} A_{k-3} \right]}{k(k-1)}; \quad k = 4, 5, 6, 7, \dots, n \quad (2.16)$$

Значение  $A_k$  в (2.16) и в (2.12) отличаются лишь множителем  $(k-2)$ . Перепишем решение (2.10) с учетом найденных коэффициентов:

$$= A_0 + A_1 \xi + A_2 \xi^2 + A_3 \xi^3 + \sum_{k=4}^n A_k \xi^k; \quad (2.17)$$

Согласно теореме Вейерштрасса о признаке равномерной сходимости рядов: если функциональный ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} A_k \xi^k$  на отрезке  $[0, 1]$  мажорируется сходящимся знакоположительным числовым рядом  $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ,  $a_k \geq 0$ , (т.е. начиная с некоторого  $N$  сразу для всех  $x \in [a, b]$ ,  $|f_n(x)| \leq a_n$ ), то функциональный ряд (2.17) равномерно сходится на этом отрезке  $[a, b]$ .

Из граничных условий определяются первые четыре коэффициента  $A_0, A_1, A_2, A_3$ , соответственно они ограничены. Представляет интерес поведение членов ряда (2.17), определению коэффициентов которых подлежат согласно (2.16). Прямая зависимость при определении коэффициентов  $A_k$  ( $k = 4, 5, 6, 7, \dots, n$ ) через  $A_0, A_1, A_2, A_3$  предопределило неравенства:

$$|A_{k-2}| \leq H, \quad |A_{k-3}| \leq H$$

где  $H$ —некоторая постоянная.

Для любого  $k = 4, 5, \dots, n$

$$\begin{aligned} |A_k \xi^k| &= \left| \left[ \left( \frac{\alpha^2}{(k-1)k} A_{k-2} \right) + \left( \beta^3 \frac{(k-3)}{(k-2)(k-1)k} A_{k-3} \right) \right] \xi^k \right| \\ &\leq \left| \left( \frac{\alpha^2}{(k-1)k} A_{k-2} \right) + \left( \beta^3 \frac{(k-3)}{(k-2)(k-1)k} A_{k-3} \right) \right| \\ &\leq \left| \left[ \left( \frac{\alpha^2}{(k-1)k} A_{k-2} \right) + \left( \beta^3 \frac{(k-3)}{(k-2)(k-1)k} A_{k-3} \right) \right] H \right| \leq \left| \frac{(\alpha^2 + \beta^3)H}{(k-1)^2} \right| < \frac{h}{(k-1)^2} \end{aligned}$$

Отметим,  $(\alpha^2 + \beta^3)H < h$

Ряд  $\sum_{k=4}^n A_k \xi^k$  в решение для прогиба  $v(\xi)$  (2.17) на отрезке  $[0, 1]$ , по абсолютной величине меньше членов знако-положительного числового ряда



$$\sum_{k=4}^n \frac{h}{(k-1)^2} = h \left( \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} \dots \dots \dots \frac{1}{(k-1)^2} \right); \quad (2.18)$$

Воспользовавшись интегральным признаком Маклорена-Коши, определим сходимость ряда (2.18):

$$\int_4^{+\infty} \frac{h}{(k-1)^2} dk = -\frac{h}{(k-1)} \Big|_4^{+\infty} = \frac{h}{3};$$

Согласно тому, что величина  $h$  конечная, то конечную величину имеет и определенный интеграл. Отсюда следует, что ряд (2.18) сходится, а как следствие и ряд (2.17) сходится равномерно, что собственно и требовалось доказать.

Приведем некоторые частные случаи закрепления стержня. Для представления модельных задач рассмотрим граничные условия для различных закреплений стержня:

1. Шарнир-шарнир

$$v(0) = 0; \frac{d^2 v(0)}{d\varphi^2} = 0; \quad v(1) = 0; \frac{d^2 v(1)}{d\varphi^2} = 0; \quad (2.19)$$

2. Шарнир-Защемление

$$v(0) = 0; \frac{d^2 v(0)}{d\varphi^2} = 0; \quad v(1) = 0; \frac{dv(1)}{d\varphi} = 0; \quad (2.20)$$

3. Защемление-шарнир

$$v(0) = 0; \frac{dv(0)}{d\varphi} = 0; \quad v(1) = 0; \frac{d^2 v(1)}{d\varphi^2} = 0; \quad (2.21)$$

4. Защемление-Защемление

$$v(0) = 0; \frac{dv(0)}{d\varphi} = 0; \quad v(1) = 0; \frac{dv(1)}{d\varphi} = 0; \quad (2.22)$$

### 2.1.1 Решение модельных задач численно-аналитическими методами

Ниже будут приведены схемы решаемых задач и в соответствии с ними графики. Более подробно рассмотрим задачу стержня с учетом собственного веса вариантом закрепления «шарнир - шарнир» рисунок 2.3.

#### Задача 1. Вариант закрепления стержня «шарнир-шарнир»

Согласно рисунка 2.3 внешний изгибающий момент отсутствует, стало быть  $m = 0$  в формуле (2.9).

Из первого граничного условия (2.19) следует что коэффициенты (2.17), в частности,  $A_0 = 0$ , а  $A_2$  и  $A_3$  определяется по формуле (2.14) и (2.15) соответственно. Из второго граничного условия при  $x = l, \xi = 1, v(1) = 0$  и  $\frac{dv(1)}{d\xi} = 0$  т.е.

$$v(1) = A_1 + A_3 + \sum_{k=4}^n A_k = A_1 \left( 1 - \frac{\alpha^2}{6} - \frac{\beta^3}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{\alpha^4}{4 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{\alpha^2 \beta^3}{6!} + \dots \right) \\ + r \left( -\frac{1}{6} - \frac{\alpha^2}{4 \cdot 5 \cdot 6} - \frac{\beta^3}{2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \dots \right) = A_1 k_1 + r k_r = 0;$$

Здесь  $k_1, k_r$  числовые ряды.

$$\frac{dv(1)}{d\xi} = 6A_3 + \sum_{k=4}^n (k-1) \cdot k \cdot A_k = A_1 \left( -\alpha^2 - \frac{\beta^3}{2} + \frac{\alpha^4}{6} + \frac{\alpha^2 \beta^3}{2 \cdot 3} + \dots \right) + r \left( -1 - \frac{\alpha^2}{6} - \frac{\beta^3}{8} + \dots \right) \\ = A_1 z_1 + r z_r = 0;$$

Здесь  $z_1, z_r$  числовые ряды.

Представим полученные соотношения в матричном виде:

$$\begin{bmatrix} k_1 & k_r \\ z_1 & z_r \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} A_1 \\ r \end{Bmatrix} = 0;$$

Отсюда следует условие существования ненулевых решений

$$D = \begin{vmatrix} k_1 & k_r \\ z_1 & z_r \end{vmatrix} = 0$$

Для вычисления рядов  $k_1, z_1$  при определённых значениях  $\alpha$  и  $\beta$ , необходимо принять  $A_1 = 1, r = 0$ .

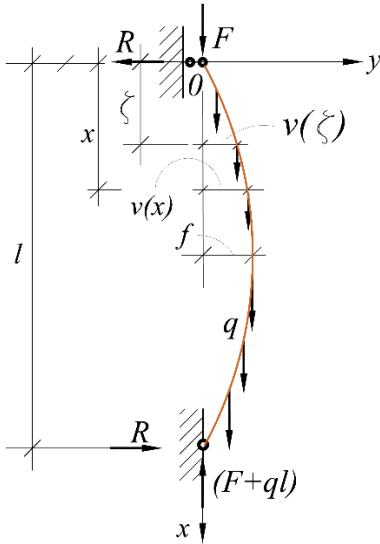


Рисунок 2.3 – Расчетная схема «Шарнир-Шарнир»

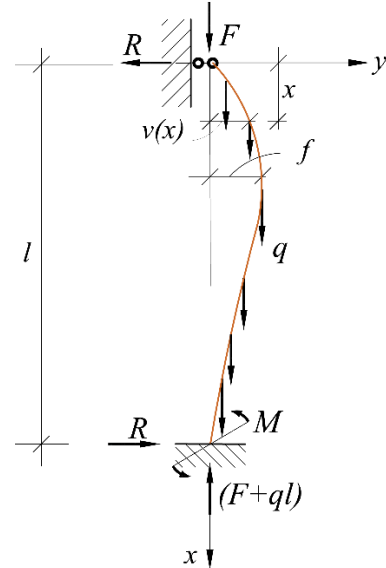


Рисунок 2.4 – Расчетная схема «Шарнир-Защемление»

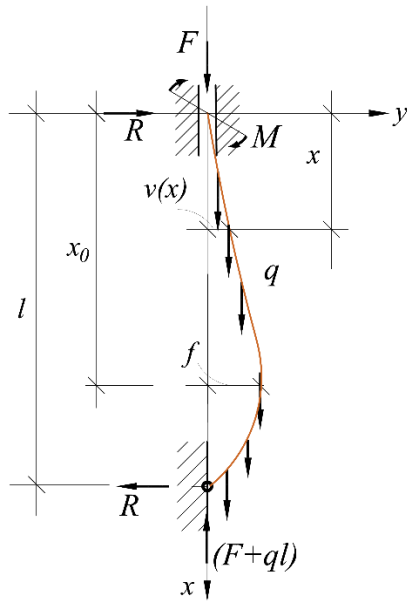


Рисунок 2.5 – Расчетная схема «Подвижная заделка – Шарнир»

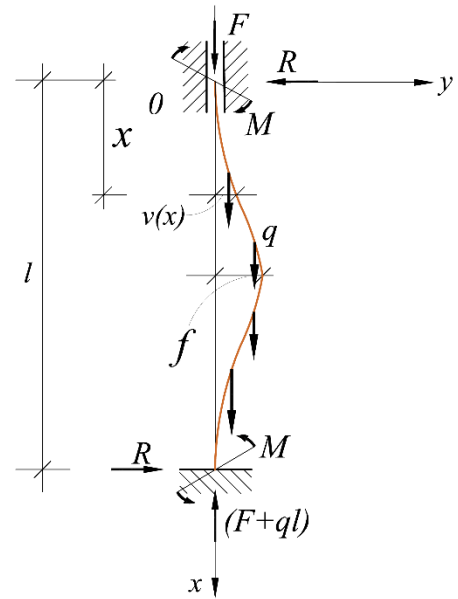


Рисунок 2.6 – Расчетная схема «Подвижная заделка – Защемление»

Аналогично, при  $A_1 = 0, r = 1$  можно посчитать ряды  $k_r, z_r$ .

Следовательно, при  $r = 0, m = 0 \rightarrow A_0 = 0, A_1 = 1, A_2 = 0, A_3 = -\frac{\alpha^2}{6}$ ,

$$k_1 = A_1 + A_3 + \sum_{k=4}^n A_k; \quad z_1 = 6A_3 + \sum_{k=4}^n (k-1) \cdot k \cdot A_k; \quad (2.23)$$

а при  $r = 1, m = 0 \rightarrow A_0 = 0, A_1 = 0, A_2 = 0, A_3 = -\frac{1}{6}$ ,

$$k_r = A_3 + \sum_{k=4}^n A_k; \quad z_r = 6A_3 + \sum_{k=4}^n (k-1) \cdot k \cdot A_k; \quad (2.24)$$

Последовательность численной реализации состоит в следующем:

Вначале задаемся значениями в диапазоне  $\alpha = 0; 0,1; 0,2 \dots \dots \pi$  из условия  $D = 10^{-7}$  т.е. из условия машинного нуля и соответственно определяем значения  $\beta$ . Созданная в пакете MatLab программа при условии ограничения последних членов в рядах  $k_1, z_1, k_r, z_r$  равных  $D = 10^{-7}$  выдаст число членов  $n$ . Для сходимости данной задачи достаточно 32-35 членов ряда.

Результаты сведем в таблицу 2.1. Графическая зависимость между  $\alpha, \beta$  представлена на рисунке 2.7.

При  $\alpha = \pi$  и  $\beta = 0$ , согласно (2.9) получим формулу Л. Эйлера [200], а при  $\alpha = 0$  и  $\beta = 2,648057$ , согласно (2.9) получим формулу А.Н. Динника [216]

$$l_{кр} = 2,65^3 \sqrt{\frac{EI_z}{q}}. \quad (2.25)$$

Зависимость (рисунок 2.7) приближённо можно аппроксимировать следующей кривой:

$$\alpha^2 + a\beta^3 = b. \quad (2.26)$$

Постоянные  $a$  и  $b$  можно определить при соответствующих значениях  $\alpha$  и  $\beta$  на осях:

$$\alpha^2 + 0,532\beta^3 = \pi^2, \quad (2.27)$$

Заменив из (2.9)  $\alpha$  и  $\beta$  получим:

$$F + 0,532ql = \frac{\pi^2 EI_z}{l^2}. \quad (2.28)$$

Таблица 2.1 — Зависимость коэффициентов  $\beta$  от  $\alpha$  «Шарнир-Шарнир»

$\alpha$	$\beta$	$\alpha$	$\beta$	$\alpha$	$\beta$
0	2.648057	1.1	2.540819	2.2	2.135201
0.1	2.647209	1.2	2.519243	2.3	2.071442
0.2	2.644669	1.3	2.495281	2.4	1.999977
0.3	2.640422	1.4	2.468781	2.5	1.919087
0.4	2.634448	1.5	2.439619	2.6	1.826341
0.5	2.626722	1.6	2.407531	2.7	1.71802
0.6	2.617205	1.7	2.372278	2.8	1.587946
0.7	2.605857	1.8	2.333558	2.9	1.424479
0.8	2.592618	1.9	2.291001	3.0	1.200214
0.9	2.577424	2.0	2.244158	3.1	0.803247
1.0	2.560195	2.1	2.196462	3.141593	0.0

Резюмируя, сделаем заключение что связь между значениями  $\alpha$  и  $\beta$ , определяемые по формуле (2.27), в частности:

$$\beta = \left( \frac{(\pi^2 - \alpha^2)}{0,532} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (2.29)$$

лежат внутри области устойчивости, что идет в запас устойчивости. На графике (рисунок 2.7) эта зависимость отражена пунктирной линией.

Определим при каком значении  $x_0$  в сечении прогиб принимает экстремальное значение. Напомним, что мы рассматриваем случай «шарнир-шарнир» с учетом собственного веса.

Граничные условия:

При  $x = l, \xi = 1, v(1) = 0$ , а при  $x = \mu l \quad \xi = \mu \quad \frac{dv}{d\xi}(\mu) = 0$  т.е.

$$v(1) = A_1 + A_3 + \sum_{k=4}^n A_k = A_1 k_1 + r k_r = 0;$$

$$\frac{dv(\mu)}{d\xi} = A_1 + 3A_3 + \sum_{k=4}^n k \cdot A_k \cdot (\mu)^{k-1} = A_1 a_1 + r a_r = 0;$$

Откуда,

$$D_1 = \begin{vmatrix} k_1 & k_r \\ a_1 & a_r \end{vmatrix} = 0$$

или

$$D_1 = k_1 a_r - k_r a_1$$

где

$$\text{при } r = 0 \quad m = 0 \rightarrow A_0 = 0, A_1 = 1, A_2 = 0, A_3 = -\frac{\alpha^2}{6},$$

$$k_1 = A_1 + A_3 + \sum_{k=4}^n A_k; \quad a_1 = A_1 + 3A_3 + \sum_{k=4}^n k \cdot A_k \cdot (\mu)^{k-1};$$

а при  $r = 1 \quad m = 0 \rightarrow A_0 = 0, \quad A_1 = 0, \quad A_2 = 0, \quad A_3 = -\frac{1}{6},$

$$k_r = A_3 + \sum_{k=4}^n A_k; \quad a_r = A_1 + 3A_3 + \sum_{k=4}^n k \cdot A_k \cdot (\mu)^{k-1};$$

Используя ранее найденную зависимость между  $\alpha$  и  $\beta$  (рисунок 2.7), т.е. при  $\alpha = 0$  и  $\beta = 2,648057$  определяем  $\mu = 0,542750$ .

Если же не учитывается собственный вес, то есть  $\beta = 0$  то  $\rightarrow \mu = 0,5$

Заключаем, что максимальный прогиб лежит в пределах:

$$0,5l < x_0 < 0,542750l \quad (2.30)$$

где  $x_0 = 0,542750l$  при  $F = 0$ , а  $x_0 = 0,5l$  получится при  $q = 0$

Для рассматриваемой задачи напомним,  $m = 0$ . Определяя  $r$  и совместно с уравнением (2.8), получим следующий вид:

$$\frac{d^2 v}{d\xi^2} + \alpha^2 v(\xi) + \int_0^\xi \beta^3 \psi \frac{dv}{d\psi} d\psi = - \left( \beta^3 \int_0^\xi v(\psi) d\psi \right) \xi \quad (2.31)$$

Решая данное уравнение аналогично предыдущему, то обнаружим, что числовая зависимость между  $\alpha$  и  $\beta$  останется прежняя, т.е. значения, сведенные в таблицу 2.1.

Отметим, что задача решалась в упругой постановке, то есть в предположении, что найденные напряжения при критических нагрузках меньше предела пропорциональности. Стало быть, материал стержня при сжатии упругий и пластические деформации не возникают.

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda} \leq \sigma_{пр} \quad \rightarrow \quad \lambda \geq \frac{\pi^2 E}{\sigma_{пр}} ;$$

Отсюда следует, что при гибкости стержня  $\lambda$  большей  $\lambda_{пр}$  применима формула (2.28) и наоборот. В случае пластических деформаций, формула принимает (2.28) принимает следующий вид:

$$F + 0,532ql = \frac{\pi^2 E_{пр} I_z}{l^2}, \quad (2.32)$$

где

$$E_{пр} = \frac{I_1 E_k + I_2 E}{I_z}. \quad (2.33)$$

Нулевая линия делит сечение на две зоны, и тогда  $I_1$  – момент инерции зоны догрузки, а  $I_2$  – соответственно момент инерции разгрузки. Далее  $E_k$  — касательный модуль и  $I_z$  – момент инерции всего сечения.

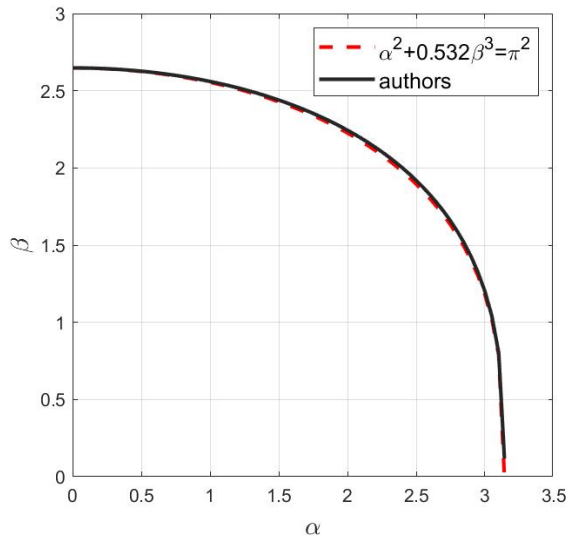


Рисунок 2.7 – Область устойчивости стержня, шарнирно закрепленного на концах

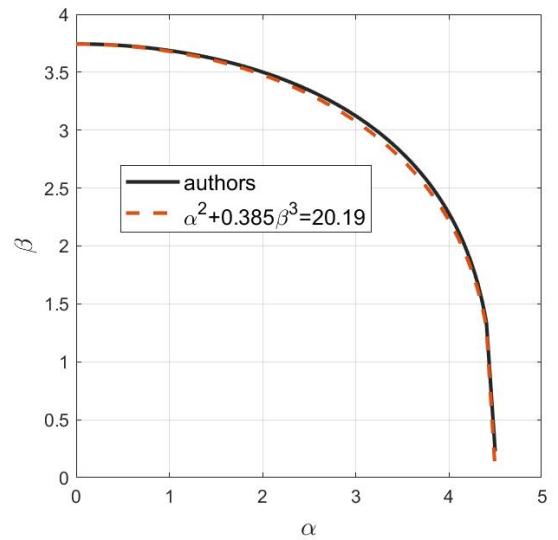


Рисунок 2.8 – Область устойчивости для стержня, верхний конец которого шарнирно подвижен, а нижний - жестко зажат.

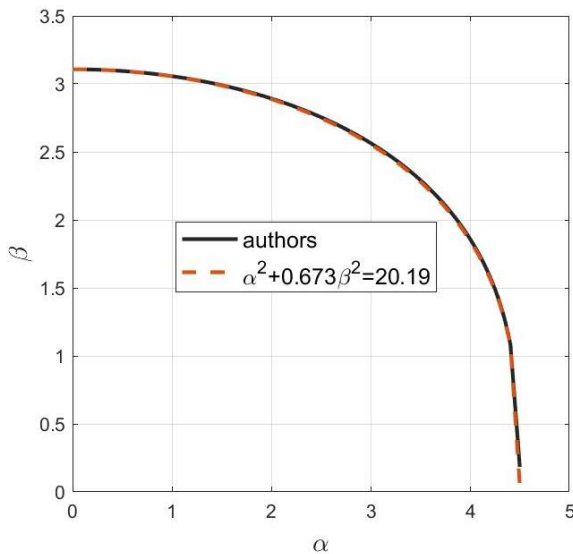


Рисунок 2.9 – Область устойчивости стержня, верхний конец которого подвижная заделка, а нижний - шарнирно закреплен.

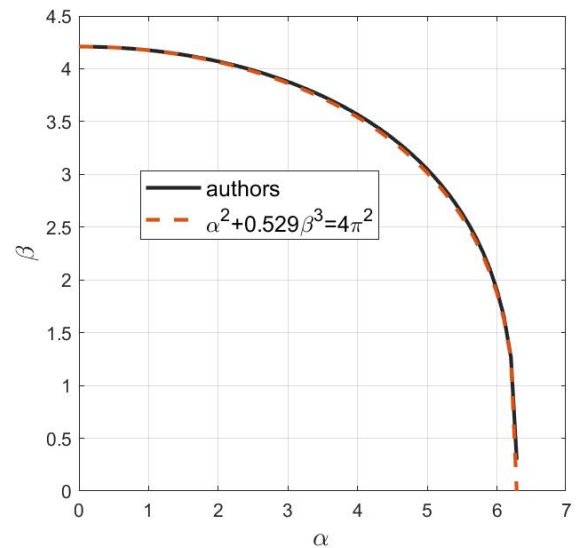


Рисунок 2.10 – Область устойчивости стержня сверху – подвижная заделка, нижняя – жесткая заделка

Задача 2. Вариант закрепления стержня «шарнир-защемление»

Рассмотрим схему закрепления стержня, у которого верхний конец шарнирный, а нижний конец заземлен (рисунок 2.4). Согласно граничным условиям 2.20, определяем коэффициенты  $A_0, A_2$ , а числовой поиск аналогичен предыдущему. Для данной задачи потребовалось 45 членов ряда. Полученные данные сведены в таблицу 2.2.

Зависимость между  $\alpha$  и  $\beta$  приведен на рисунке 2.8.

При  $\alpha = 4,493407$  и  $\beta = 0$ , учитывая (2.9), получаем формулу Ф.С. Ясинского [204],

$$F_{кр} = \frac{20,19EI_z}{l^2} \quad (2.34)$$

При  $\alpha = 0$  и  $\beta = 3,744452$ , учитывая (2.9), получаем формулу А.Н. Динника [216],

$$l_{кр} = 3,74 \sqrt[3]{\frac{EI_z}{q}} \quad (2.35)$$

Таблица 2.2 — Зависимость коэффициентов  $\beta$  от  $\alpha$  «Шарнир-Заземление»

$\alpha$	$\beta$	$\alpha$	$\beta$	$\alpha$	$\beta$	$\alpha$	$\beta$
0	3.744450	1.2	3.661744	2.4	3.379827	3.6	2.718290
0.1	3.743880	1.3	3.646884	2.5	3.343910	3.7	2.627059
0.2	3.742209	1.4	3.630657	2.6	3.3055495	3.8	2.525292
0.3	3.739418	1.5	3.613014	2.7	3.264344	3.9	2.410497
0.4	3.735490	1.6	3.593919	2.8	3.220362	4.0	2.278917
0.5	3.730428	1.7	3.573296	2.9	3.173170	4.1	2.124601
0.6	3.724213	1.8	3.551081	3.0	3.122479	4.2	1.937106
0.7	3.716840	1.9	3.527226	3.1	3.067943	4.3	1.694966
0.8	3.708279	2.0	3.501624	3.2	3.009102	4.4	1.336619
0.9	3.698518	2.1	3.474190	3.3	2.945486	4.493407	0
1.0	3.687515	2.2	3.444825	3.4	2.876387		
1.1	3.675277	2.3	3.413418	3.5	2.801033		

При фиксированных значениях  $\alpha$  и  $\beta$ , определяются константы  $a$  и  $b$  (рисунок 2.8). Аппроксимирующее уравнение можно представить:

$$\alpha^2 + 0,385\beta^3 = 20,19,$$

Согласно зависимости (2.9) подставив вместо  $\alpha^2$  и  $\beta^3$  в вышеуказанное равенство, получим:

$$F + 0,385ql = \frac{20,19EI_z}{l^2} \quad (2.36)$$

Как и ранее значения  $\alpha$  и  $\beta$ , также лежат внутри области устойчивости (рисунок 2.8). Максимальный прогиб возникает в интервале:

$$0,4l < x_0 < 0,46l, \quad (2.37)$$

При действии только продольной силы (без учета собственного веса  $q = 0$ ) –  $x_0 = 0,4l$  а при отсутствии внешней силы  $F = 0$  при учете только собственного веса –  $x_0 = 0,46l$ .

### Задача 3. Вариант закрепления стержня «Подвижная заделка - Шарнир»

Рассмотрим схему закрепления стержня, у которого верхний конец подвижно защемлен, а нижний конец шарнирный (рисунок 2.5). Согласно граничным условиям 2.21, определяем коэффициенты  $A_0, A_2$ , а численное решение по образцу и подобию ранее рассмотренному.

Результаты решения представлены в таблице 2.3. Зависимость между  $\alpha$  и  $\beta$  приведен на рисунке 2.9.

Зависимость между  $\alpha$  и  $\beta$  графически приведена на рисунке 2.9. При  $\alpha = 4,4934070$  и  $\beta = 0$ , учитывая (рисунок 2.9), получаем формулу (2.28) Ф.С. Ясинского [204],

Таблица 2.3 — Зависимость коэффициентов  $\beta$  от  $\alpha$  «Защемление-Шарнир»

$\alpha$	$\beta$	$\alpha$	$\beta$	$\alpha$	$\beta$	$\alpha$	$\beta$
0	3,107555	1.2	3,033686	2.4	2,785326	3.6	2,219664
0.1	3,107056	1.3	3,020462	2.5	2,754043	3.7	2,143056
0.2	3,105556	1.4	3,006042	2.6	2,720662	3.8	2,057973
0.3	3,103046	1.5	2,990395	2.7	2,685025	3.9	1,962455
0.4	3,099524	1.6	2,973423	2.8	2,646979	4.0	1,853401
0.5	3,095001	1.7	2,955218	2.9	2,606294	4.1	1,726042
0.6	3,089442	1.8	2,935593	3.0	2,562729	4.2	1,571975
0.7	3,082845	1.9	2,914546	3.1	2,516005	4.3	1,373918
0.8	3,075191	2.0	2,892000	3.2	2,465767	4.4	1,082440
0.9	3,066475	2.1	2,867889	3.3	2,411595	4.493407	0
1.0	3,056663	2.2	2,842147	3.4	2,352978		
1.1	3,045744	2.3	2,814654	3.5	2,289281		

При отсутствии продольной нагрузки, т.е.  $\alpha = 0$  и 3,107555, вводим корректировку в формулу А.Н. Динника [216], у которого коэффициент  $\beta = 3.09$ . Тогда критическая длина равна:

$$l_{кр} = 3,11 \sqrt[3]{\frac{EI_z}{q}} \quad (2.38)$$

Аппроксимирующая зависимость (2.26) при таких граничных условиях можно представить:

$$\alpha^2 + 0,673\beta^3 = 20,19$$

Согласно зависимости (2.9) подставив вместо  $\alpha^2$  и  $\beta^3$  в вышеуказанное равенство, получим:

$$F + 0,673ql = \frac{20,19EI_z}{l^2} \quad (2.39)$$

Как и ранее, значения  $\alpha$  и  $\beta$ , лежат в внутренних пределах области устойчивости (рисунок 2.9). Максимальный прогиб возникает в интервале:

$$0,6l < x_0 < 0,63l, \quad (2.40)$$

При действии только продольной силы (без учета собственного веса  $q = 0$ ) –  $x_0 = 0,6l$



а при отсутствии внешней силы  $F = 0$ , когда учитываем только собственный вес  $-x_0 = 0,63l$ .

Задача 4. Вариант закрепления стержня «подвижная заделка, нижняя – жесткая заделка»

Рассмотрим стержень, у которых верхний и нижний конец зашпемлен (рисунок 2.6).

Согласно граничным условиям 2.22, определяем коэффициенты  $A_0, A_2$ , а численное решение по образу и подобию ранее рассмотренному. Результаты решения представлены в таблице 2.4. Зависимость между  $\alpha$  и  $\beta$  приведен на рисунке 2.10.

При  $\alpha = 6,283186$  и  $\beta = 0$ , учитывая (2.9), получаем формулу Ф.С. Ясинского [204],

$$F_{кр} = \frac{4\pi^2 EI_z}{l^2}. \quad (2.41)$$

При  $\alpha = 0$  и  $\beta = 4,210175$ , учитывая (2.9), корректируем формулу А.Н. Динника [216], у которого коэффициент 4,19.

$$l_{кр} = 4,21 \sqrt[3]{\frac{EI_z}{q}}. \quad (2.42)$$

Таблица 2.4 — Зависимость коэффициентов  $\beta$  от  $\alpha$  «Зашпемление-Зашпемление»

$\alpha$	$\beta$	$\alpha$	$\beta$	$\alpha$	$\beta$	$\alpha$	$\beta$	$\alpha$	$\beta$
0.0	4,210175	1.3	4,152171	2.6	2,966289	3.9	3,604122	5.1	2,977140
0.1	4,209836	1.4	4,142794	2.7	3,945712	4.0	3,565873	5.2	2,900685
0.2	4,208825	1.5	4,132569	2.8	3,924053	4.1	3,525663	5.3	2,818138
0.3	4,207139	1.6	4,121660	2.9	3,901330	4.2	3,483540	5.4	2,728394
0.4	4,204716	1.7	4,109915	3.0	3,877518	4.3	3,438917	5.5	2,629851
0.5	4,201700	1.8	4,097404	3.1	3,852535	4.4	3,392320	5.6	2,521021
0.6	4,197982	1.9	4,084072	3.2	3,826332	4.4	3,342964	5.7	2,400074
0.7	4,193514	2.0	4,069910	3.3	3,798891	4.5	3,290807	5.8	2,259517
0.8	4,187435	2.1	4,054897	3.4	3,770125	4.6	3,235396	5.9	2,098407
0.9	4,182579	2.2	4,039011	3.5	3,739765	4.7	3,483540	6.0	1,905478
1.0	4,176101	2.3	4,021277	3.6	3,708379	4.8	3,176944	6.1	1,653392
1.1	4,168852	2.4	4,004525	3.7	3,675248	4.9	3,114700	6.2	1,274849
1.2	4,160869	2.5	3,985919	3.8	3,640535	5.0	3,048210	6.283186	2,629851

Аппроксимирующая зависимость (2.26) при таких граничных условиях можно представить:

$$\alpha^2 + 0,529\beta^3 = 4\pi^2,$$

Согласно зависимости (2.9) подставив вместо  $\alpha^2$  и  $\beta^3$  в вышеуказанное равенство, получим:

$$F + 0,529ql = \frac{4\pi^2 EI_z}{l^2}. \quad (2.43)$$

Как и ранее значения  $\alpha$  и  $\beta$ , также лежат внутри области устойчивости (рисунок 2.9). Максимальный прогиб возникает в интервале:

$$0,6l < x_0 < 0,63l, \quad (2.44)$$

При действии только продольной силы (без учета собственного веса  $q = 0$ ) –  $x_0 = 0,6l$  а при отсутствии внешней силы  $F = 0$ , когда учитываем только собственный вес –  $x_0 = 0,63l$ .

Приближенная зависимость (2.21) в такой последовательности закрепления имеет следующий вид:

$$\alpha^2 + 0,529\beta^3 = 4\pi^2,$$

или, учитывая (2.9)

$$F + 0,529ql = \frac{4\pi^2 EI_z}{l^2}. \quad (2.45)$$

Значения  $\alpha$  и  $\beta$ , определяемые по приближенной зависимости, также лежат внутри области устойчивости (рисунок. 2.10). Максимальный прогиб возникает в интервале:

$$0,5l < x_0 < 0,545l, \quad (2.46)$$

где  $x_0 = 0,5l$  получится при  $q = 0$ , и действует только сила  $F$ , а при  $x_0 = 0,545l$  получается от действия собственного веса.

#### Задача 5. Вариант крепления стержня «свободный край-защемление»

Рассмотрим жестко защемленный стержень со свободным концом (рисунок. 2.11). Согласно граничным условиям (2.47):

$$v(0) = f; \quad \frac{d^2 v(0)}{d\varphi^2} = 0; \quad \frac{d^3 v(0)}{d\varphi^3} = 0 \quad v(1) = 0; \quad \frac{dv(1)}{d\varphi} = 0. \quad (2.47)$$

определяем коэффициенты  $A_0, A_2$ , а численное решение по образу и подобию ранее рассмотренному.

Полученные данные сведены в таблицу 2.5. Зависимость между  $\alpha$  и  $\beta$  приведен на рисунке 2.12. При  $\alpha = 1,570796$  и  $\beta = 0$ , учитывая (2.9), получаем формулу Ф.С. Ясинского [204].

$$F_{кр} = \frac{4\pi^2 EI_z}{l^2}. \quad (2.48)$$

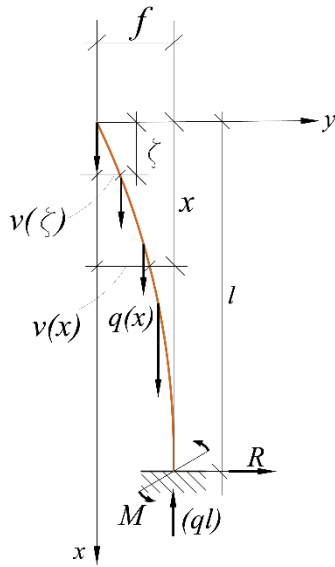


Рисунок 2.11 – Расчетные схема «Свободный край-Защемление»

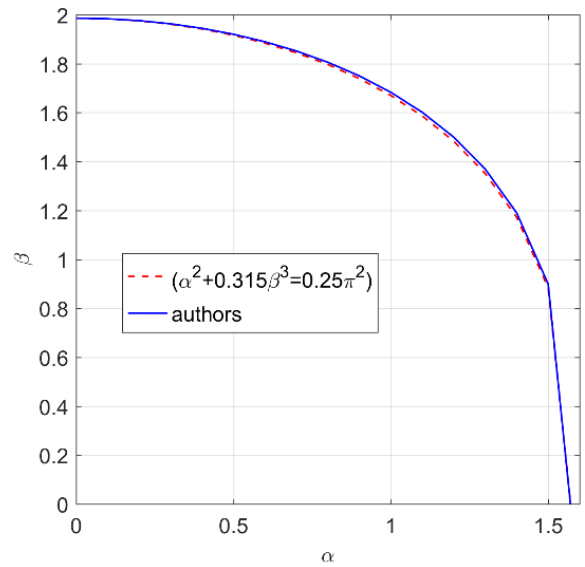


Рисунок 2.12 – Зависимость между  $\alpha, \beta$  «Свободный край-Защемление»

При  $\alpha = 0$  и  $\beta = 1,986353$ , получаем формулу Л. Эйлера [201]:

$$l_{кр} = 1,98 \sqrt[3]{\frac{EI_z}{q}} \quad (2.49)$$

Аппроксимирующая зависимость (2.21) с такими граничными условиями представляет:

$$\alpha^2 + 0,315\beta^3 = 0,25\pi^2,$$

или заменяя  $\alpha^2$  и  $\beta^3$  из (2.9), получим:

$$F + 0,315ql = \frac{4\pi^2 EI_z}{l^2}. \quad (2.50)$$

Здесь надо добавить одно замечание. Дело в том, что полученная А.Н. Динником [216] зависимость между силой  $F$  и  $ql$  (собственным весом) для консольного стержня (рисунок 2.11), не совсем удобна для инженерных расчетов, так как им использовалась функции Бесселя.

Равномерно распределенная нагрузка  $ql$  уменьшает критическое значение нагрузки  $F_{кр}$  определяемым (2.50), и можно принять:

$$F_{кр} = \frac{\varpi \pi^2 EI_z}{l^2}, \quad (2.51)$$

где множитель  $\varpi$ , меньший  $\frac{\pi^2}{4}$ , постепенно уменьшается, когда увеличивается нагрузка  $ql$ ; он приближается к нулю, когда  $ql$  приближается к значению, данному уравнением

$$(ql)_{кр} = \frac{\pi^2 EI_z}{(1,122l)^2} = \frac{7,83 EI_z}{l^2}. \quad (2.52)$$

Оценивая влияние  $ql$  на величину  $F_{кр}$ , мы получаем удовлетворительное приближение при допущении, что действие равномерной нагрузки  $ql$  эквивалентно нагрузке  $0,3ql$ , приложенной к вершине стержня. Если равномерно распределенная нагрузка больше величины  $(ql)_{кр}$ , то  $F_{кр} < 0$ . В таком случае для предотвращения выпучивания стержня, необходимо приложить растягивающую силу  $F$ .

Таблица 2.5 — Зависимость коэффициентов  $\beta$  от  $\alpha$  «Заземление-свободный край»

$\alpha$	$\beta$	$\alpha$	$\beta$	$\alpha$	$\beta$
0	1,986352	0.6	1,889746	1.2	1,499668
0.1	1,983814	0.7	1,851885	1.3	1,369223
0.2	1,976153	0.8	1,805881	1.4	1,190215
0.3	1,963228	0.9	1,750319	1.5	0,899327
0.4	1,944792	1.0	1,683150	1.570796	0
0.5	1,920458	1.1	1,601280		

### 2.1.2 Решение модельных задач методом конечных разностей

Все представленные задачи выше решены также численно, в частности, методом конечных разностей. Для реализации метода сеток интервал  $\xi \in [0; 1]$  разбивается на  $N_\xi$  частей с шагом  $\Delta\xi$ , а производные в уравнении (2.8а) и в граничных условиях заменяются сеточными.

Решение для стержней с различными граничными условиями сводятся к системе линейных алгебраических уравнений:

$$([A] + \alpha^2[B] + \beta^3[C])\{X\} = 0, \quad (2.45)$$

Здесь  $\{X\} = \{v_1 v_2 v_3 \dots v_{n-1} v_n\}$  — вектор перемещений.

Здесь соответствующие матрицы  $[A]$ ,  $[B]$ ,  $[C]$  имеют формы:

$$[A] = \frac{1}{\Delta\varphi^4} \begin{bmatrix} a_{22} & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$[B] = \frac{1}{\Delta\varphi^2} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix},$$

[C]

$$= \frac{1}{\Delta\varphi^2} \begin{bmatrix} -2\varphi_2 & \varphi_2 + \frac{\Delta\varphi}{2} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \varphi_3 - \frac{\Delta\varphi}{2} & -2\varphi_3 & \varphi_3 + \frac{\Delta\varphi}{2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \varphi_4 - \frac{\Delta\varphi}{2} & -2\varphi_4 & \varphi_4 + \frac{\Delta\varphi}{2} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -2\varphi_{n-2} & \varphi_{n-2} - \frac{\Delta\varphi}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \varphi_{n-2} - \frac{\Delta\varphi}{2} & \varphi_{n-1} - \frac{\Delta\varphi}{2} & -2\varphi_{n-1} & \varphi_n + \frac{\Delta\varphi}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \varphi_n - \frac{\Delta\varphi}{2} & -2\varphi_n \end{bmatrix}$$

где  $\varphi_i = (i - 1)\Delta\varphi$ .

Коэффициент  $a_{22}$  в матрице [A] равен 5, если верхний конец шарнирно закреплен и 7, если он подвижная заделка. Аналогичным образом определяется коэффициент для  $a_{nn}$  для нижнего конца.

Система (2.43) однородна и имеет ненулевое решение, если ее определитель равен нулю:

$$|[A] + \alpha^2[B] + \beta^3[C]| = 0.$$

В результате для известных  $\alpha$ , проблема нахождения  $\lambda = \beta^3$  была сведена к обобщенной задаче на собственные значения посредством встроеной функции *Eigenvalue*.

Точно так же, зная  $\beta$ , найти не сложно  $\alpha$ . Расхождение с численно аналитическим решением составляет менее 0.01%.

Предлагаемая методика, в отличие от аналитических решений, позволяет решить задачу с произвольной фиксацией концов стержня. Также можно учитывать изменяющуюся по длине жесткость и неоднородность стержня. Тестовые задачи показали хорошее согласие с литературными данными. В следующем разделе будет представлена методика расчета с учетом с учетом переменной жесткости.

## 2.2 Вывод разрешающих уравнений для упруго стержня переменной жесткости с учетом собственного веса

Рассмотрим жестко защемленный прямолинейный стержень, расположенный вертикально (рисунок 2.13). В качестве параметра переменной жесткости будет выступать сечение стержня, в частности, момент инерции  $I_z(x)$ . Тогда, в малых деформаций, уравнение (2.2) примет вид:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI_z(x)}. \quad (2.46)$$

Пусть момент инерции сечения меняется по степенному закону

$$I_z(x) = a_1 x^m. \quad (2.47)$$

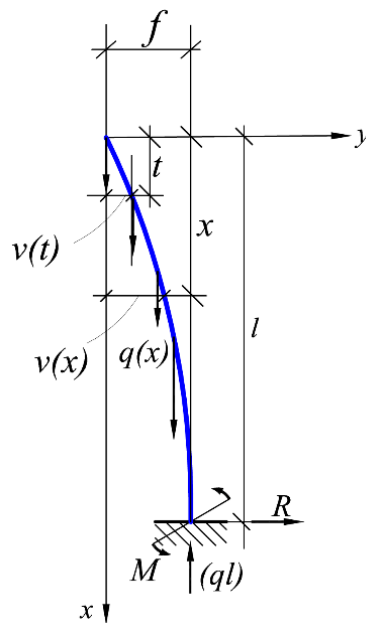


Рисунок 2.13 – Расчетная схема

Интенсивность распределенной нагрузки (собственный вес)

$$q(t) = a_2 t^n. \quad (2.48)$$

Здесь  $a_1, a_2, m > 0, n > 0$  — некоторые константы.

Элемент нагрузки  $qdt$  вызывает в сечении с абсциссой  $x$  изгибающий момент —  $-q \cdot [v(x) - v(t)]dt$ . Полный изгибающий момент в этом сечении равен (рисунок 2.13):

$$M(x) = - \int_0^x q(t) \cdot [v(x) - v(t)]dt, \quad (2.49)$$

Или, как и ранее, преобразуем интеграл (интегрируем по частям) с учетом (2.48)

$$M(x) = - \int_0^x \frac{a_2}{(n+1)} t^{n+1} \frac{dv(t)}{dt} dt \quad (2.50)$$

С учетом (2.50) и выражением для момента инерции (2.47) соотношение (2.46) примет вид:

$$Ea_1x^m \frac{d^2v}{dx^2} + \int_0^x \frac{a_2}{(n+1)} t^{n+1} \frac{dv(t)}{dt} dt = 0 \quad (2.51)$$

или

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \int_0^x \frac{a_2}{(n+1)Ea_1} \frac{t^{n+1}}{x^m} \frac{dv(t)}{dt} dt = 0. \quad (2.52)$$

Перейдем к безразмерному виду разрешающего уравнения сделав замену переменных:

$$x = \xi a; t = a\psi; v(x) = av(\psi). \quad (2.53)$$

Тогда

$$\frac{d^2v}{d\xi^2} + \int_0^l \frac{a_2 a^{n+3-m}}{(n+1)a_1 E} \frac{\psi^{n+1}}{\xi^m} \frac{dv}{d\psi} d\psi = 0. \quad (2.54)$$

Примем следующее обозначение:

$$a = \alpha \sqrt{\frac{(n+1)a_1 E}{a^2}}, \quad (2.55)$$

где

$$\alpha = n + 3 - m, \text{ при этом } \alpha \geq 1, \quad (2.56)$$

так как иначе соотношения (2.55) и (2.53) теряют смысл.

Подставим значение соотношения (2.55) в (2.54) получим интегро-дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2v}{d\xi^2} + \int_0^\xi \frac{\psi^{n+1}}{\xi^m} \frac{dv}{d\psi} d\psi = 0. \quad (2.57)$$

Методику решения уравнения (2.57) приведем ниже энергетическим методом.

### 2.2.1 Решение энергетическим методом задачи устойчивости упруго стержня переменной жесткости с учетом собственного веса

Для определения критического значения распределенных сжимающих нагрузок с успехом может быть использован энергетический метод. Сущность этого метода заключается в исследовании изменения полной энергии системы при переходе от исходной формы равновесия к смежной, т.е. возмущенном состоянии.

Здесь очень важно выбрать уравнение изогнутой оси. Оно может быть многопараметрическим.

Например, С.П. Тимошенко предлагает для нашего случая рисунок 2.13 следующее выражение:

$$v = \delta_1 \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2l}\right) + \delta_2 \left(1 - \cos \frac{3\pi x}{2l}\right). \quad (2.58)$$

Критическая длина и критическое значение внешней нагрузки определяется из условия равенства потенциальной энергии и работы собственного веса стержня:

$$U = A, \quad (2.59)$$

где потенциальная энергия системы

$$U = \int_0^l \frac{M^2(x)}{2EI_z(x)} dx \quad (2.60)$$

или учитывая (2.47) и (2.50)

$$U = \int_0^l \frac{1}{2a_1 E x^m} \left( \int_0^t \frac{a_2}{(n+1)} t^{n+1} \frac{dv(t)}{dt} dt \right)^2 dx. \quad (2.61)$$

Работа равномерно распределенной нагрузки (собственный вес)

$$A = \int_0^l \frac{R}{2} \left( \frac{dv}{dx} \right)^2 dx. \quad (2.62)$$

Здесь

$$R = \int_0^t q(t) dt. \quad (2.63)$$

Согласно формуле (2.48) последнее выражение (2.63) имеет вид:

$$R = \frac{a_2}{(n+1)} x^{n+1}.$$

Окончательно, работа от собственного веса:

$$A = \int_0^l \frac{a_2}{2(n+1)} x^{n+1} \left( \frac{dv}{dx} \right)^2 dx. \quad (2.64)$$

В качестве уравнения изогнутой оси стержня примем следующее соотношение:

$$v(x) = \frac{k \cdot f}{(k-1)l^k} \left( l^{k-1}x - \frac{x^k}{k} \right), \quad (2.65)$$

где  $f$  максимальное значение прогиба (рисунок 2.13).

Уравнение (2.65) удовлетворяет всем граничным условиям при  $k > 1$ . Введем обозначения:

$$C = \frac{k \cdot f}{(k-1)l^k}. \quad (2.66)$$

Соотношение (2.65) примет вид:

$$v(x) = C \left( l^{k-1}x - \frac{x^k}{k} \right). \quad (2.67)$$

Продифференцируем по  $x$  (2.67)

$$\frac{dv(x)}{dx} = C(l^{k-1} - x^{k-1}). \quad (2.68)$$

Подставив (2.68) в соотношения (2.61) и (2.64), с учетом (2.59) получим:



$$\frac{a_2 l^{n+3-m}}{a_1(n+1)E} \left[ \frac{1}{(n+k+1)^2(2n+2k+3-m)} - \frac{2}{(n+k+1)(n+2)(2n+k+4-m)} + \frac{1}{(n+2)^2(2n+5-m)} \right] = \left[ \frac{1}{(n+2)} - \frac{2}{(n+k+1)} + \frac{1}{(n+2k)} \right]. \quad (2.69)$$

Приведем модельные задачи, соответствующему условию  $n+3-m=0$

Задача 1.  $n=3$  и  $m=6$

Поперечные размеры сечения соответствуют стержню рисунок 2.14

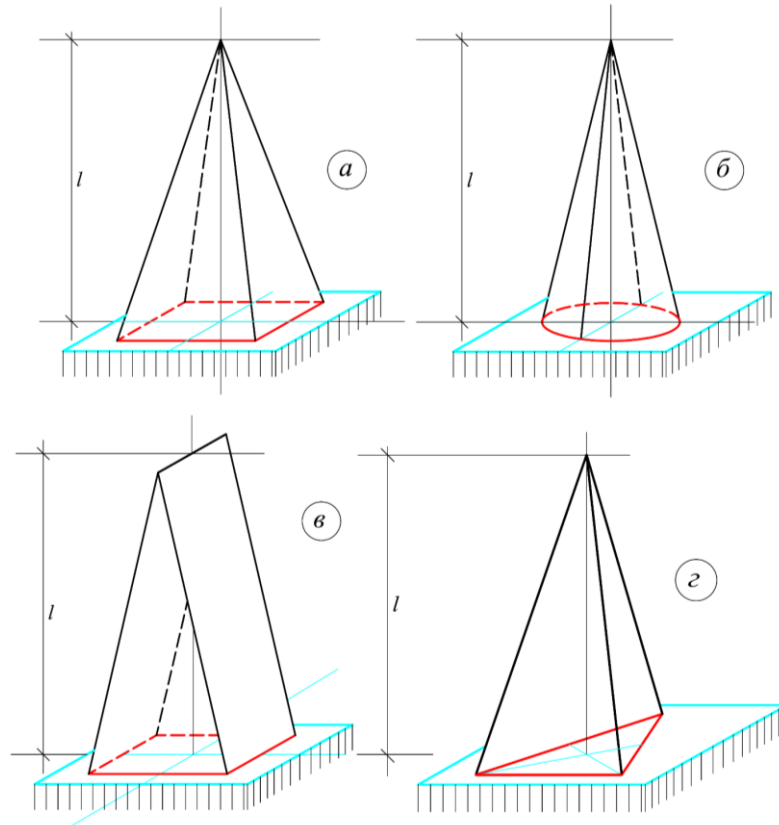


Рисунок 2.14 – Варианты сечений стержня переменной жесткости

Тогда разрешающее уравнение (2.69) упрощается до вида:

$$\frac{a_2}{4Ea_1} \left( \frac{1}{(k+4)^2(2k+3)} - \frac{2}{(k+4)^2 \cdot 5} + \frac{1}{125} \right) = \left( \frac{1}{5} - \frac{2}{(k+4)} + \frac{1}{(2k+3)} \right). \quad (2.70)$$

Варьируя значениями от  $k=3$  до  $k \rightarrow 1$  в уравнении (2.70) получим, таблица 2.6. Т.е. при  $k \rightarrow 1$  отношение  $a_2/a_1$  стремиться к  $40,0E$ .

а) для стержня с квадратным сечением рисунок 2.14а.

$$b(x) = b \sqrt{\left(\frac{x}{l}\right)^3}. \quad (2.71)$$

Таблица 2.6. Зависимость коэффициента  $k$  от отношения коэффициентов при степенных законах собственного веса и момента инерции.

№	$k$	$a_2/a_1$
1	$k = 3$	$a_2/a_1 = 48,28E$
2	$k = 2$	$a_2/a_1 = 44,44E$
3	$k = 1,5$	$a_2/a_1 = 42,31E$
4	$k = 1,1$	$a_2/a_1 = 40,48E$
5	$k = 1,01$	$a_2/a_1 = 40,05E$

Тогда, момент инерции  $I_z(x)$  и интенсивность распределенной нагрузки  $q(x)$

$$I_z(x) = a_1 x^n \rightarrow a_1 = \frac{b^4}{12l^6}; \quad q(x) = A_{\text{сеч}}\gamma = a_2 x^n \rightarrow a_2 = \frac{\gamma b^2}{l^3}. \quad (2.72)$$

Критическое значение суммарной нагрузки определяются по формуле:

$$N_{\text{кр}} = \int_0^l q(t) dt. \quad (2.73)$$

С учетом (2.48) соотношение (2.73) для  $N_{\text{кр}}$ :

$$N_{\text{кр}} = \frac{a_2}{(n+1)} l^{n+1}. \quad (2.74)$$

В соотношении (2.74)  $l = l_{\text{кр}}$  определяется:

$$l_{\text{кр}} = x \sqrt{\frac{a_1 E (n+1)}{a_2}}. \quad (2.75)$$

Тогда, подставляя коэффициенты (2.72) в отношение  $a_2/a_1 =$

$$\frac{\gamma b^2 12 l^6}{l^3 b^4} = 40,0E \rightarrow l_{\text{кр}} = 1,49 \sqrt[3]{\frac{b^2 E}{\gamma}};$$

$$N_{\text{кр}} = \frac{a_2}{(n+1)} l^{n+1} = \frac{\gamma b^2}{l_{\text{кр}}^3 4} l_{\text{кр}}^4 = \frac{\gamma b^2}{4} \left( 1,49 \sqrt[3]{\frac{b^2 E}{\gamma}} \right) \rightarrow 0,37 b^2 \sqrt[3]{b^2 E \gamma^2}; \quad (2.76)$$

$$\sigma_{\text{кр}} = \frac{N_{\text{кр}}}{A_{\text{сеч}}} = \frac{0,37 b^2 \sqrt[3]{b^2 E \gamma^2}}{b^2} = 0,37 \sqrt[3]{b^2 E \gamma^2}.$$

б) для стержня с круглым сечением диаметра  $d$  рисунок 2.28б.

$$I_z(x) = a_1 x^n \rightarrow a_1 = \frac{\pi d^4}{64l^6}; \quad q(x) = A_{\text{сеч}} \gamma = a_2 x^n \rightarrow a_2 = \frac{\gamma \pi d^2}{4l^3}. \quad (2.77)$$

Тогда, подставляя коэффициенты (2.77) в отношение  $a_2/a_1 = 40,0E$

$$l_{kp} = 1,36 \sqrt[3]{\frac{d^2 E}{\gamma}}; \quad N_{kp} = 0,28 d^2 \sqrt[3]{d^2 E \gamma^2}; \quad \sigma_{kp} = 0,34 \sqrt[3]{d^2 E \gamma^2}. \quad (2.78)$$

в) для стержня с поперечным сечением в виде равностороннего треугольника стороной  $b$  рисунок 2.28в.

$$I_z(x) = a_1 x^n \rightarrow a_1 = \frac{\sqrt{3} b^4}{96l^6}; \quad q(x) = A_{\text{сеч}} \gamma = a_2 x^n \rightarrow a_2 = \frac{\gamma \sqrt{3} b^2}{4l^3}. \quad (2.79)$$

Тогда, подставляя коэффициенты (2.79) в отношение  $a_2/a_1 = 40,0E$

$$l_{kp} = 1,18 \sqrt[3]{\frac{b^2 E}{\gamma}}; \quad N_{kp} = 0,13 b^2 \sqrt[3]{b^2 E \gamma^2}; \quad \sigma_{kp} = 0,30 \sqrt[3]{b^2 E \gamma^2}. \quad (2.80)$$

*Задача 2.*  $n = 1,5$  и  $m = 4,5$

При таких значениях  $n$  и  $m$  одна сторона прямоугольного поперечного сечения равна  $b = \text{const}$ , а другая сторона определяется по (2.71) и соответствует рисунку (2.28 г). Уравнение (2.69) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{a_2}{a_1} \frac{1}{2,5E} \left( \frac{1}{(k+2,5)^2(2k+1,5)} - \frac{2}{(k+2,5)^2 \cdot 3,5} + \frac{1}{42,875} \right) \\ = \left( \frac{1}{3,5} - \frac{2}{(k+2,5)} + \frac{1}{(2k+1,5)} \right). \end{aligned} \quad (2.81)$$

Так при  $k \rightarrow 1$  отношение  $a_2/a_1$  стремиться к  $12,25E$

$$\frac{a_2}{a_1} = 12,25E. \quad (2.82)$$

При этом

$$I_z(x) = a_1 x^n \rightarrow a_1 = \frac{b^4}{12\sqrt{l^9}}; \quad q(x) = A_{\text{сеч}} \gamma = a_2 x^n \rightarrow a_2 = \frac{\gamma b^2}{4\sqrt{l^3}}. \quad (2.83)$$

Подставив (2.83) в (2.82)

$$l_{kp} = \sqrt[3]{\frac{b^2 E}{\gamma}}; \quad N_{kp} = 0,4 b^2 \sqrt[3]{b^2 E \gamma^2}; \quad \sigma_{kp} = 0,4 \sqrt[3]{b^2 E \gamma^2}. \quad (2.84)$$

Не сложно доказать, что при  $k \rightarrow 1$  отношение  $a_2/a_1$  стремиться к точному значению. Рассмотрим, в качестве примера, стержень рисунка 2.14. Здесь  $n = 2$  и  $m = 4$ . Тогда соотношения (2.69) принимают вид:

$$\frac{a_2}{a_1} \frac{l}{3E} \left( \frac{1}{(k+3)^2(2k+3)} - \frac{2}{(k+4) \cdot 3,0 \cdot (k+3)} + \frac{1}{80} \right) = \left( \frac{1}{4} - \frac{2}{(k+3)} + \frac{1}{(2k+2)} \right). \quad (2.85)$$

Приближения занесем в таблицу 2.7.

Таблица 2.7. Зависимость коэффициента  $k$  от отношения коэффициентов при степенных законах собственного веса и момента инерции.

№	$k$	$a_2/a_1$
1	$k = 3$	$a_2/a_1 = 33,95 E/l$
2	$k = 2$	$a_2/a_1 = 32,31 E/l$
3	$k = 1,1$	$a_2/a_1 = 31,03 E/l$
4	$k \rightarrow 1$	$a_2/a_1 = 30,54 E/l$

В заключении и резюмируя раздел, можно сказать, найден способ использования энергетического метода. Можно при вариации коэффициента  $k$  получить соотношение (2.65), которое точно будет соотноситься реальному уравнению изогнутой оси стержня. Отсюда следует, что без особого усилия можно определить точное значение критической силы используя энергетический метод.

### 2.3 Вывод разрешающих уравнений для стержня с учетом реологических свойств материала.

Вывод уравнений устойчивости стержней любого сечения с учетом деформаций ползучести рассмотрим ставший «классикой» вариант закрепления «шарнир-шарнир» (рисунок 2.15). Рассматриваемый стержень имеет начальные несовершенства. Внешняя сила  $F$  действует с некоторым эксцентриситетом  $e$ . Стержень так же может иметь начальную погибь  $v_0 = f(x)$ .

Отметим, что в общем виде все механические характеристики материала являются непрерывными функциями координат и времени, то есть, материал имеет косвенную неоднородность (наведенную от действия температуры)  $E = f(T(x, t))$ .

Сечение стержня могут быть прямоугольными или круглыми, где:  $b$  – ширина;  $h$  – высота сечения;  $d$  – диаметр сечения,  $l$  – длина стержня.

Рассматриваемая модель из вязкоупругого материала для одноосного случая. Как и ранее полная деформация равная сумме составляющих:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x^{el} + \varepsilon_T + \varepsilon_{x,s}^* \quad (2.86)$$

или

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} + \alpha \Delta T + \frac{f^*}{\eta^*}, \quad (2.87)$$

Здесь  $\sigma_x$  и  $\varepsilon_x$  – напряжения и деформации вдоль оси  $x$ ;

Числитель и знаменатель третьего слагаемого (2.87), как и ранее имеют вид:

$$f^* = \left(1 + \frac{E_\infty}{E}\right) \sigma - E_\infty \varepsilon; \quad (2.88)$$

$$\frac{1}{\eta^*} = \frac{1}{\eta_0^*} e^{|f^*|}. \quad (2.89)$$

Здесь  $\eta_0^*$  – коэффициент начальной релаксационной вязкости;  $E_\infty$  – модуль высокоэластичности;  $m^*$  – модуль скорости,  $E$  – модуль упругости.

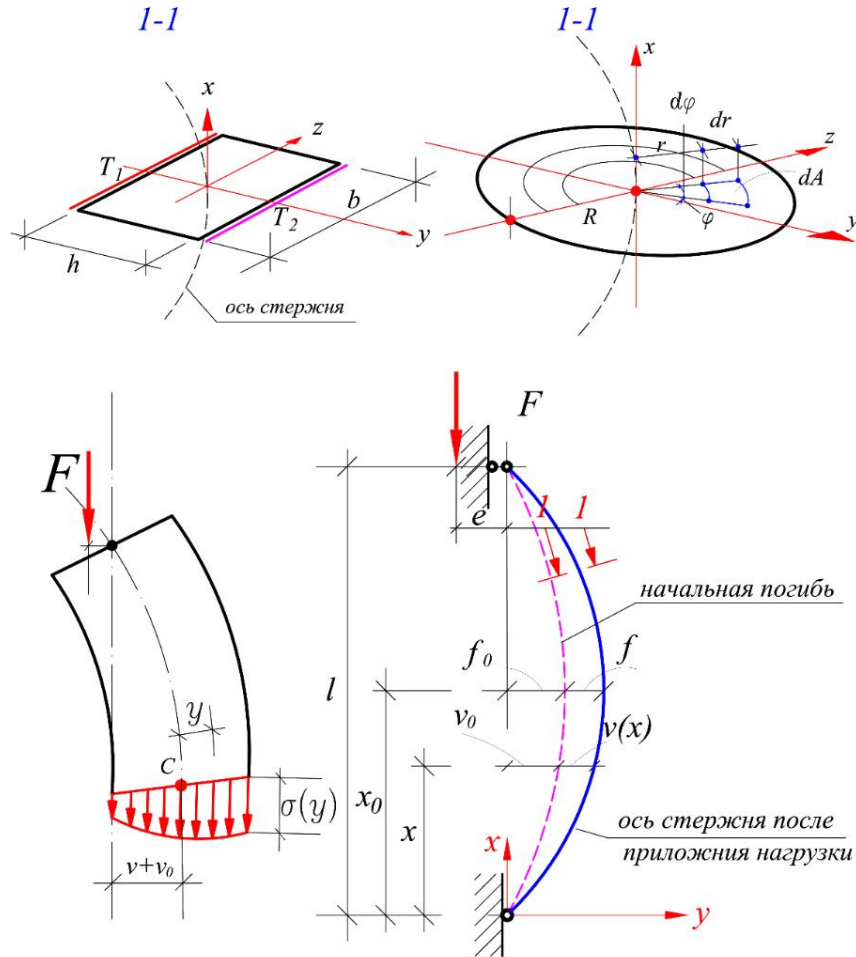


Рисунок 2.15 – Расчетная схема задачи при варианте закрепления «шарнир-шарнир»

Высокоэластические деформации  $\varepsilon_x^*$  (деформации ползучести) приведем в виде суммы двух членов спектра времен запаздывания для полимера:

$$\varepsilon_x^* = \varepsilon_{x1}^* + \varepsilon_{x2}^*. \quad (2.90)$$

Так как рассматриваемые деформации малы, с геометрической стороны задачи, можно записать полную деформацию в виде:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 - \varepsilon u, \quad (2.91)$$

Здесь:  $\varepsilon_0$  – деформация средней оси стержня, зависящая только от времени  $t$ ;

$\varepsilon(x, t) = 1/\rho$  – кривизна стержня;  $\rho$  – радиус кривизны,  $y$  – координата для прямоугольного сечения для и  $y = r \sin \varphi$  – для круглого сечения.

Считая углы поворота сечения стержня сравнительно малыми, то согласно принятому направлению осей (рисунок 2.15):

$$\varkappa \approx \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}. \quad (2.92)$$

Соотношения (2.91) с учетом (2.92):

$$\varepsilon = \varepsilon_0 - y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad \varepsilon = \varepsilon_0 - r \sin \varphi \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \quad \text{сечение прямоугольное и круглое} \quad (2.93)$$

Выразим напряжение из уравнения (2.87) с учетом (2.93):

$$\sigma = E \left( \varepsilon_0 - y \frac{d^2 v}{dx^2} - \varepsilon_T - \varepsilon^* \right) \quad \text{сечение прямоугольное} \quad (0.94)$$

$$\sigma = E \left( \varepsilon_0 - r \sin \varphi \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \varepsilon_T - \varepsilon^* \right) \quad \text{сечение круглое} \quad (0.95)$$

С учетом предопределяющего изгиба (начальные несовершенства)  $M_0 = Fv_0$ , приведем статические интегральные условия:

$$1). F = -b \int_{-h/2}^{h/2} \sigma dy, \quad 2). M_0 + Fv = -b \int_{-h/2}^{h/2} \sigma y dy \quad \begin{array}{l} \text{сечение} \\ \text{прямоугольное} \end{array} \quad (2.96)$$

$$1). F = - \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \sigma r dr, \quad 2). M_0 + Fv = - \int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi \int_0^R \sigma r^2 dr \quad \text{сечение круглое} \quad (2.97)$$

Здесь  $v = v(x, t)$  – прогиб в сечении стержня.

Уравнение (2.86) с учетом (2.88), (2.89), а также уравнений (2.94), (2.95), (2.96), (2.97), составляет систему уравнений для пяти неизвестных  $f^*$ ,  $\sigma$ ,  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon_0$  и  $v$ .

Приведенную выше перечисленную систему из пяти уравнений академик РААСН, проф. В.И. Андреев для прямоугольного сечения свел к двум уравнениям относительно двух функций  $f^*$  и  $v$  [79]:

$$\frac{\partial f_x^*}{\partial t} = - \frac{E + E_\infty}{\eta_0^*} f_x^* e^{\frac{|f_x^*|}{m^*}} + \frac{E}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{f_x^*}{\eta_0^*} e^{\frac{|f_x^*|}{m^*}} dy + \frac{Eb}{I} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{f_x^*}{\eta_0^*} e^{\frac{|f_x^*|}{m^*}} y dy + y \frac{F}{I} \frac{\partial v}{\partial t}; \quad (2.98)$$

$$\frac{\partial^3 v}{\partial v^2 \partial t} + \frac{F}{EI} \frac{\partial v}{\partial t} = - \frac{b}{I} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{f_x^*}{\eta_0^*} e^{\frac{|f_x^*|}{m^*}} y dy. \quad (2.99)$$

Но есть одно обстоятельство, которое заключается в следующем. Система уравнений (2.98) и (2.99) ограничены и могут быть использованы только для уравнения состояния Максвелла-Гуревича.

Поставим задачу вывода разрешающих уравнений для любого уравнения связи между деформациями и напряжениями.

#### А. Прямоугольное сечение

Подставив выражение для напряжений (2.94) в первое уравнение (2.96) получим:

$$\begin{aligned}
 F &= -b \int_{-h/2}^{h/2} \sigma dy = -b \int_{-h/2}^{h/2} E(\varepsilon_0 - \alpha y - \varepsilon_T - \varepsilon^*) dy = -bE \int_{-h/2}^{h/2} \varepsilon_0 dy + \\
 &+ bE \int_{-h/2}^{h/2} \alpha y dy + bE \varepsilon_T \int_{-h/2}^{h/2} dy + bE \int_{-h/2}^{h/2} \varepsilon^* dy; \\
 F &= -EA\varepsilon_0 + EA\varepsilon_T + bE \int_{-h/2}^{h/2} \varepsilon^* dy.
 \end{aligned}$$

Окончательно

$$\varepsilon_0 = -\frac{F}{EA} + \varepsilon_T + \frac{1}{A} \int_A \varepsilon^* dA = \frac{N + N^*}{EA} + \varepsilon_T, \quad (2.100)$$

где

$$N = -F, \quad N^* = E \int_A \varepsilon^* dA.$$

Подставим (2.100) в первое уравнение (2.94) для напряжения, получим:

$$\sigma = -\frac{F}{A} + E \left( \frac{1}{A} \int_A \varepsilon^* dA - y \frac{d^2 v}{dx^2} - \varepsilon^* \right). \quad (2.101)$$

Что интересно, в (2.101) после подстановки, сократились температурные деформации, то есть, температура выступает как фактор, вызывающий косвенную неоднородность для материала стержня.

Подставив выражение для напряжений (2.94) в первое уравнение (2.96) получим:

$$\begin{aligned}
 Fv_0 + Fv &= b \int_{-h/2}^{h/2} \sigma y dy = b \int_{-h/2}^{h/2} E(\varepsilon_0 - \alpha y - \varepsilon_T - \varepsilon^*) y dy = \\
 &= bE\varepsilon_0 \int_{-h/2}^{h/2} y dy - bE\alpha \int_{-h/2}^{h/2} y^2 dy - bE\varepsilon_T \int_{-h/2}^{h/2} y dy - bE \int_{-h/2}^{h/2} \varepsilon^* y dy; \\
 Fv_0 + Fv &= bE\varepsilon_0 \cdot 0 + bE\alpha \cdot \frac{h^3}{12} + bE\varepsilon_T \cdot 0 + bE \int_{-h/2}^{h/2} \varepsilon^* y dy.
 \end{aligned}$$

Окончательно

$$M_0 + Fv = E\alpha I(x) + bE \int_{-h/2}^{h/2} \varepsilon^* y dy. \quad (2.102)$$

Учитывая равенство второй производной прогиба и обратной величины радиуса кривизны, окончательно имеем разрешающее уравнение для оси стержня:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{F}{E(x)I(x)} v = -\frac{M_0}{E(x)I(x)} + \frac{b}{I(x)} \int_{-h/2}^{h/2} \varepsilon^* y dy \quad (2.103)$$

$M_0$  – выступает в качестве начальных несовершенств;

$$M^* = E(x) \int_A \varepsilon^* y dA.$$

Проведя те же процедуры для круглого сечения, имеем:

В. Круглое сечение

$$\begin{aligned} F &= \int_0^R \sigma r dr \int_0^{2\pi} d\varphi = \int_0^R E(\varepsilon_0 - \alpha y - \varepsilon_T - \varepsilon^*) r dr \int_0^{2\pi} d\varphi; \\ F &= EA\varepsilon_0 - EA\varepsilon_T - E\alpha \int_0^R r^2 dr \cdot 0 - E \int_0^R \varepsilon^* r dr \int_0^{2\pi} d\varphi; \\ \varepsilon_0 &= \frac{F}{EA} + EA\varepsilon_T + \frac{1}{A} \int_0^R \varepsilon^* r dr \int_0^{2\pi} d\varphi. \end{aligned} \quad (2.104)$$

Подставим (2.95) во второе уравнение (2.97), получим:

$$\begin{aligned} M_0 + Fv &= - \int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi \int_0^R \sigma r^2 dr = \\ &= -E\varepsilon_0 \int_0^R \int_0^{2\pi} y r d\varphi dr + E\varepsilon_T \int_0^R \int_0^{2\pi} y r d\varphi dr + E\alpha \int_0^R \int_0^{2\pi} y^2 r d\varphi dr + E \int_A \varepsilon^* y dA; \\ \int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi &= 0; \quad \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{1}{2} 2\pi - \frac{1}{4} \sin(2 \cdot 2\pi) = \pi; \quad \int_0^R r^3 dr = \frac{R^4}{4}; \\ M_0 + Fv &= E\alpha I(x) + E \int_A \varepsilon^* r \sin \varphi dA. \end{aligned}$$

Окончательно разрешающее уравнение относительно прогиба, с учетом функциональной зависимости  $E = E(x), I(x)$ :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{F}{E(x)I(x)} v = -\frac{M_0}{E(x)I(x)} + \frac{1}{I(x)} \int_A \varepsilon^* r \sin \varphi dA \quad (2.105)$$

Общее разрешающее уравнение для шарнирно опертого стержня переменной жесткости для любого сечения имеет вид:



$$E(x)I(x) \frac{d^2 v}{dx^2} + Fv = -M_0 + M^*, \quad (2.106)$$

Интерпретация величин  $M^*$  и  $N^*$  можно сопоставить с аналогией как приложения дополнительной нагрузки к упругому стержню, чтобы его прогиб и осевая деформация были такими же, как у вязкоупругого стержня [174].

Для удовлетворения граничных условий для других закреплений стержня, уравнение (2.106) необходимо дважды продифференцировать. Тогда разрешающее уравнение:

$$\frac{d^4 v}{dx^4} + F \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{v}{E(x)I(x)} \right) = - \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{M_0}{E(x)I(x)} \right) + \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{M^*}{E(x)I(x)} \right). \quad (2.107)$$

### 2.3.1 Конечно-разностная аппроксимация разрешающих уравнений

В разделе 2.1.2 была показана конечно-разностная аппроксимация дифференциальных уравнений, где задача была сведена к системе алгебраических уравнений, но в упругой постановке. Так как в разрешающее уравнение входит деформации ползучести, остановимся на аппроксимации скорости этой деформации.

Процесс ползучести на исследуемом интервале времени  $t$ , разбивается на  $n$  шагов  $\Delta t$ . Многие исследователи используют простейшую конечно-разностную аппроксимацию по времени (по Эйлера) для определения скорости деформации ползучести:

$$\frac{\partial \varepsilon^*}{\partial t} \approx \frac{\varepsilon_{t+\Delta t}^* - \varepsilon_t^*}{\Delta t} \Rightarrow \varepsilon_{t+\Delta t}^* = \varepsilon_t^* + \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial t} \Delta t. \quad (2.108)$$

Данный вариант аппроксимации является малоэффективным. Его использовали в своих работах [106,107,111]. Рассмотрим вариант аппроксимации по методу Рунге-Кутты.

Предположим, что скорость высокоэластической деформации имеет вид:

$$\frac{\partial \varepsilon^*}{\partial t} = f(t, \varepsilon^*), \quad \varepsilon^*|_{t=0} = 0. \quad (2.109)$$

Аналогично запишем и уравнение Максвелла-Гуревича согласно (2.109).

Приближенное значение скорости деформации ползучести в момент времени  $t + \Delta t$  можно вычислить по итерационной зависимости:

$$\varepsilon_{t+\Delta t}^* = \varepsilon_t^* + \frac{\Delta t}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4). \quad (2.110)$$

Для последующего момента времени значения высокоэластических деформаций  $\varepsilon_{t+\Delta t}^*$  вычисляются в четыре этапа:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t, \varepsilon_t^*); \\ k_2 &= f\left(t + \frac{\Delta t}{2}, \varepsilon_t^* + \frac{\Delta t}{2} k_1\right); \\ k_3 &= f\left(t + \frac{\Delta t}{2}, \varepsilon_t^* + \frac{\Delta t}{2} k_2\right); \end{aligned} \quad (2.111)$$

$$k_4 = f(t + \Delta t, \varepsilon_t^* + \Delta t k_3).$$

На очередном шаге по времени в сначала подставляются величины  $\varepsilon_t^*(x, y)$  в уравнение (2.110). Затем вычисляется значение  $k_1(x, y)$  в каждом узле.

Далее в уравнение (2.111) вместо  $\varepsilon^*$  последовательно подставляются величины  $\varepsilon_t^* + \frac{\Delta t}{2} k_1$ ,  $\varepsilon_t^* + \frac{\Delta t}{2} k_2$  и  $\varepsilon_t^* + \Delta t k_3$ . Процедуру необходимо повторить четыре раза, решая систему уравнений алгебраических уравнений на каждом шаге по времени.

Для прямоугольно и круглого сечений стержня, интегралы по площади, входящие (2.103) и (2.105) сводятся к определенным интегралам и определяются как:

$$\int_A \varepsilon^* dA = b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \varepsilon^* dy; \quad \int_A \varepsilon^* y dA = b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \varepsilon^* y dy; \quad (2.112)$$

$$\int_A \varepsilon^* y dA = \int_{-R}^R \varepsilon^* y b(y) dy = 2 \int_{-R}^R \varepsilon^* y \sqrt{R^2 - y^2} dy;$$

и далее интегралы с содержанием высокоэластической деформации вычисляются численно:

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \varepsilon^* y dy = \Delta y \left( \frac{\varepsilon_1^* y_1}{2} + \sum_{i=2}^{Ny} \varepsilon_i^* y_i + \frac{\varepsilon_{Ny+1}^* y_{Ny+1}}{2} \right). \quad (2.113)$$

### **Вариант закрепления «защемление -защемление»**

Схема задачи представлено на рисунке 2.16.

При решении уравнения (2.107) методом сеток с учетом переменной жесткости необходимо четвертую производную прогиба аппроксимировать по ниже приведенной схеме:

$$\left. \frac{d^4 v}{dx^4} \right|_i = \frac{v_{i+2} - 4v_{i+1} + 6v_i - 4v_{i-1} + v_{i-2}}{\Delta x^4}. \quad (2.114)$$

Второе слагаемое уравнения (2.107) аппроксимируется сеточным и имеет следующий вид:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{v}{E(x)I(x)} \right) = \frac{1}{\Delta x^2} \left( \frac{v_{i+1}}{E_{i+1}I_{i+1}} - \frac{2v_i}{E_i I_i} + \frac{v_{i-1}}{E_{i-1}I_{i-1}} \right). \quad (2.115)$$

Общее уравнение метода конечных разностей для  $i$  – го узла:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta x^4} v_{i+2} + \left( \frac{F}{\Delta x^2 E_{i+1} I_{i+1}} - \frac{4}{\Delta x^4} \right) v_{i+1} + \left( \frac{6}{\Delta x^4} - \frac{2F}{\Delta x^2 E_i I_i} \right) v_i \\ + \left( \frac{F}{\Delta x^2 E_{i-1} I_{i-1}} - \frac{4}{\Delta x^4} \right) v_{i-1} + \frac{1}{\Delta x^4} v_{i-2} = f_i, \end{aligned} \quad (2.116)$$

где

$$f_i = - \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{M_0 + M^*}{E(x)I(x)} \right) \Big|_i.$$

Граничные условия для уравнения (2.116). Здесь необходимо прибегнуть к законтурным точкам. Сеточный вариант показана на рисунке 2.17.

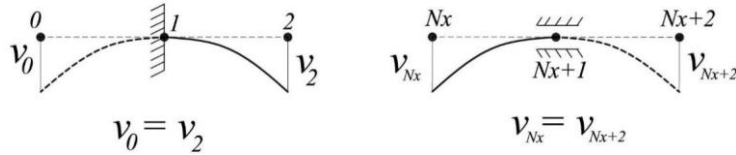


Рисунок 2.17 – Аппроксимация граничных условий в узлах стержня

Для узлов с номерами  $i = 2$  и  $i = Nx$  с учетом этой аппроксимации уравнение (2.116) переписывается в виде:

$$\frac{1}{\Delta x^4} v_4 + \left( \frac{F}{\Delta x^2 E_3 I_3} - \frac{4}{\Delta x^4} \right) v_3 + \left( \frac{7}{\Delta x^4} - \frac{2F}{\Delta x^2 E_2 I_2} \right) v_2 = f_2; \quad (2.117)$$

$$\left( \frac{7}{\Delta x^4} - \frac{2F}{\Delta x^2 E_{Nx} I_{Nx}} \right) v_{Nx} + \left( \frac{F}{\Delta x^2 E_{Nx-1} I_{Nx-1}} - \frac{4}{\Delta x^4} \right) v_{Nx-1} + \frac{1}{\Delta x^4} v_{Nx-2} = f_{Nx}. \quad (2.118)$$

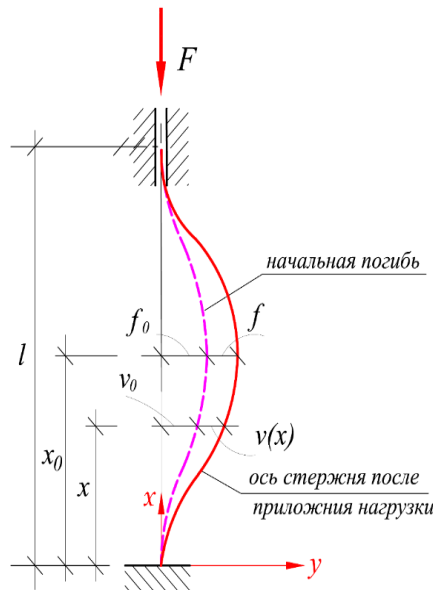


Рисунок 2.16 – Расчётная схема задачи при закреплении «защемление-защемление»

Задача приводится к системе линейных алгебраических уравнений:

$$([A] + F[B])\{X\} = \{C\}, \quad (2.119)$$

где  $[A] = \frac{1}{\Delta x^4} \begin{bmatrix} 7 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & -4 & 7 \end{bmatrix};$

$$[B] = \frac{1}{\Delta x^2} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{E_2 I_2} & \frac{1}{E_3 I_3} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{E_2 I_2} & \frac{1}{E_3 I_3} & \frac{1}{E_4 I_4} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{E_{Nx-2} I_{Nx-2}} & \frac{-2}{E_{Nx-1} I_{Nx-1}} & \frac{1}{E_{Nx} I_{Nx}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{E_{Nx-1} I_{Nx-1}} & \frac{-2}{E_{Nx} I_{Nx}} \end{bmatrix};$$

$$\{X\} = \{v_2 \ v_3 \ \dots \ v_{Nx}\}^T; \{C\} = \{f_2 \ f_3 \ \dots \ f_{Nx}\}^T.$$

Если умножить систему (2.119) на обратную матрицу жесткости  $[B]^{-1}$ , то получим:

$$([B]^{-1}[A] + F[E])\{X\} = [B]^{-1}\{C\}. \quad (2.121)$$

Для определения мгновенной критической силы необходимо приравнять нулю определитель уравнения (2.121):

$$\det([B]^{-1}[A] + F[E]) = 0. \quad (2.122)$$

Задача свелась к определению собственных значений матрицы  $[B]^{-1}[A]$ , минимальное по абсолютной величине которой будет соответствовать первой критической силе.

### Схема закрепления «защемление - свободный край»

На рисунке 2.17 представлена расчетная схема задачи. Аппроксимация граничных условий в заделке аналогичны предыдущей задаче.

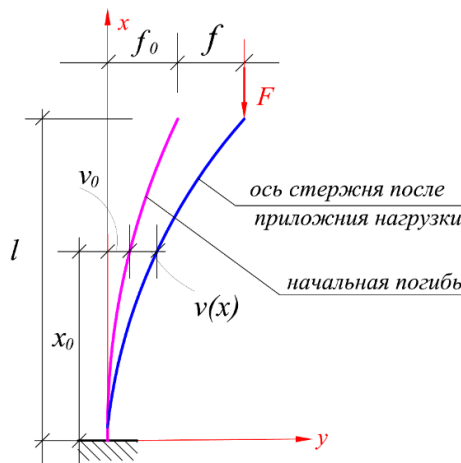


Рисунок 2.17 – Расчётная схема задачи при закреплении «защемление-свободный край»

Граничное условие при  $x = l$  записывается:

$$M|_{x=l} = 0 \Rightarrow \left. \frac{d^2 v}{dx^2} \right|_{x=l} = 0. \quad (2.123)$$

В любом сечении при  $x = x_0$  стержня изгибающий момент имеет вид:

$$M(x) = -F(f - v - v_0) \quad (2.124)$$

Продифференцировав изгибающий момент (2.124), запишем для поперечной силы соотношение:

$$Q = \frac{dM}{dx} = F \left( \frac{dv}{dx} + \frac{dv_0}{dx} \right). \quad (2.125)$$

Известно, что изгибающий момент через напряжения связан соотношением:

$$M = \int_A \sigma y dA = E \left( \varepsilon_0 \int_A y dA - \frac{d^2 v}{dx^2} \int_A y^2 dA - \int_A \varepsilon^* y dA \right) = -EI \frac{d^2 v}{dx^2} - M^*. \quad (2.126)$$

Чтоб связать поперечную силу с моментом, продифференцируем (2.126):

$$\begin{aligned} Q = \frac{dM}{dx} &= -\frac{d}{dx} \left( E(x)I(x) \frac{d^2 v}{dx^2} \right) - \frac{dM^*}{dx} = \\ &= -\frac{d(E(x)I(x))}{dx} \frac{d^2 v}{dx^2} - E(x)I(x) \frac{d^3 v}{dx^3} - \frac{dM^*}{dx}. \end{aligned} \quad (2.127)$$

Учитывая равенство (2.125) и связывая с (2.127), получим недостающее граничное условие при  $x = l$ :

$$\begin{aligned} F \left( \frac{dv}{dx} + \frac{dv_0}{dx} \right) + \frac{d(E(x)I(x))}{dx} \frac{d^2 v}{dx^2} + E(x)I(x) \frac{d^3 v}{dx^3} + \frac{dM^*}{dx} = \\ = F \left( \frac{dv}{dx} + \frac{\pi f_0}{2l} \right) + EI \frac{d^3 v}{dx^3} + \frac{dM^*}{dx} = 0. \end{aligned} \quad (2.128)$$

Для соответствия условиям (2.123) и (2.128) введем две законтурные точки с  $i = Nx + 2$  и  $i = Nx + 3$ . Разностная схема аппроксимация граничного условия (2.123) примет вид:

$$\left. \frac{d^2 v}{dx^2} \right|_{x=l} = \frac{v_{Nx+2} - v_{Nx+1} + v_{Nx}}{\Delta x^2} = 0. \quad (2.129)$$

Второе граничное условие (2.128) в сеточной схеме будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \frac{E_{Nx+1} I_{Nx+1}}{2\Delta x^3} (v_{Nx+3} - 2v_{Nx+2} + 2v_{Nx} - v_{Nx-1}) + F \frac{v_{Nx+2} - v_{Nx}}{2\Delta x} \\ = -\frac{1}{2\Delta x} (M_{Nx-1}^* - 4M_{Nx}^* + 3M_{Nx+1}^*) - \frac{F\pi f_0}{2l}. \end{aligned} \quad (2.130)$$

Отметим, что порядок сведенной задачи к системе алгебраических уравнений (2.119) станет  $Nx + 2$ .

### **Схема закрепления «защемление - шарнир»**

Схема задачи приведена на рисунке 2.18. Условия на краях имеют вид:

при  $x = l$ :

$$v = 0|_{x=l}; \quad M = 0 \Rightarrow \frac{d^2v}{dx^2}\Big|_{x=l} = 0. \quad (2.131)$$

при  $x = 0$  граничные условия представляют собой:

$$v = 0; \quad \frac{dv}{dx}\Big|_{x=0} = 0. \quad (2.132)$$

На рисунке 2.19. показана аппроксимация граничного условия при  $x = l$ .

При  $i = Nx$  уравнение (2.116) примет вид:

$$\left(\frac{5}{\Delta x^4} - \frac{2F}{\Delta x^2 E_{Nx} I_{Nx}}\right) v_{Nx} + \left(\frac{F}{\Delta x^2 E_{Nx-1} I_{Nx-1}} - \frac{4}{\Delta x^4}\right) v_{Nx-1} + \frac{1}{\Delta x^4} v_{Nx-2} = f_{Nx}. \quad (2.133)$$

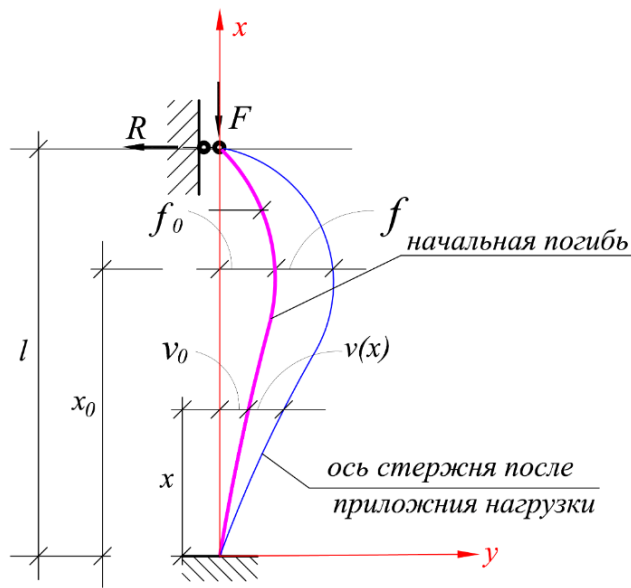


Рисунок 2.18 – Расчетная схема закрепления стержня «защемление-шарнир»

Коэффициент  $a_{22}$  в матрице  $[A]$  равен 5, если верхний конец шарнирно закреплен и 7, если он жестко защемлен. Аналогичным образом определяется коэффициент для  $a_{nn}$  для нижнего конца. Матрица  $[B]$  и вектор  $[C]$  а также остальные коэффициенты, остаются неизменными.

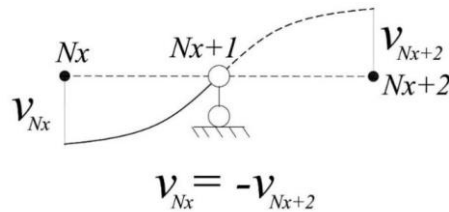


Рисунок 2.19 – Аппроксимация при  $x = l$  граничных условий.

В заключении приведем некоторый анализ решения задач ползучести. Из многочисленных исследований известно, что зачастую, при времени, стремящемся к бесконечности, прогиб стремится к конечному значению.

Тогда в нашем случае, в конце процесса ползучести будут равны нулю скорости роста каждой составляющей высокоэластической деформации  $\varepsilon_s^*$ . Отсюда следует, что тогда можно получить предельные величины для каждой составляющей высокоэластической деформации с учетом спектра времен релаксации:

$$\frac{\partial \varepsilon_s^*}{\partial t} = 0 \Rightarrow f_s^* = 0 \Rightarrow \sigma - E_{\infty s} \varepsilon_s^* = 0 \Rightarrow \varepsilon_{s, \text{пред}}^* = \frac{\sigma}{E_{\infty s}}. \quad (2.134)$$

Подставим (2.134) в (1.49):

$$\begin{aligned} \sigma_x &= E \left( \varepsilon_x - \sum_{s=1}^n \varepsilon_{x,s}^* \right); \\ \varepsilon &= \sigma \left( \frac{1}{E} + \frac{1}{E_{\infty 1}} + \frac{1}{E_{\infty 2}} + \dots \right) = \sigma \left( \frac{1}{E} + \sum_{s=1}^n \frac{1}{E_{\infty s}} \right). \end{aligned} \quad (2.135)$$

Введем понятие обратной величины длительного модуля  $H$  как:

$$\frac{1}{H} = \frac{1}{E} + \sum_{s=1}^n \frac{1}{E_{\infty s}}. \quad (2.136)$$

Уравнение (2.106) при времени, стремящемся к бесконечности, будет иметь вид:

$$H(x)I(x) \frac{d^2 v}{dx^2} + Fv = -M_0. \quad (2.137)$$

Разница уравнения (2.137) и уравнения (2.106) в том, что мгновенный модуль заменен длительным. Это дает возможность исследователю, пренебечь долговременным расчетом на устойчивость при ползучести, а свести к упругой задаче, заменив мгновенный модуль упругости на длительный [174].

Длительную критическую силу при  $HI = \text{const}$  представим как:

$$F_{\text{дл}} = \frac{\pi^2 HI}{l^2}. \quad (2.138)$$

Условие  $F < F_{\text{дл}}$  является необходимым, но не достаточным для прекращения роста прогиба. Иначе, можно утверждать, что при  $F \geq F_{\text{дл}}$  стержень гарантированно потеряет устойчивость, но нельзя утверждать обратного.

Для определения длительной критической силы необходимо в матрице  $[B]$  соотношения (2.120) заменить  $E_i$  на  $H_i$ .

Тогда для однородного стержня переменного сечения существует однозначная связь между длительной критической силой и мгновенной:

$$F_{\text{дл}} = \frac{H}{E} F_{\text{мгн}}. \quad (2.139)$$

Из (2.139) следует, что однородный стержень переменного сечения, для которого мгновенная критическая сила при заданной массе минимальна, будет оптимальным и при длительном действии нагрузок.

Из уравнения (2.138) можно также определить стрелу прогиба в конце процесса ползучести, если она стремится к конечному значению [174]. Решение уравнения (2.138) имеет вид:

$$v(x) = f \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right). \quad (2.140)$$

Или подставив прогиб из (2.140) в (2.137), имеем:

$$-\frac{\pi^2 H I}{l^2} f_{\infty} \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) + F f_{\infty} \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) = -F f_0 \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right); \quad (2.141)$$

$$f_{\infty} = \frac{f_0}{\frac{F_{дл}}{F} - 1}$$

### 2.3.2 Решение модельных задач

#### *Задача 1. Вариант закрепления «защемление-защемление»*

Пусть на стержень длинную  $l = 157$  мм и круглым сечением  $d = 10$  мм материал которого эпоксидный олигомера (ЭДТ-10) рисунок (2.16), действует продольная сила  $F = 2,2$  Кн.

Начальные несовершенства зададим как:  $v_0(x) = f_0 \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right)$ ,  $f_0 = 0.16$ . Условия на границе стержня примем в соответствии (2.22). В качестве уравнения связи примем приведенное ранее уравнение Максвелл-Гуревича с учетом двух членов спектра времен релаксации.

Приведем ссылку на работу В. Ф. Бабича [84] со следующими выражениями для физико-механических параметров эпоксидного связующего ЭДТ10 функционально зависящие от температуры:

$$E = 4000 \cdot \exp\left(-\exp\frac{T_k - 339}{36.7}\right) \text{ МПа}; \quad E_{\infty 2} = 0.1 E_{\infty 1};$$

$$E_{\infty 1} = \begin{cases} 2.4 \cdot 10^6 \frac{1}{T_k} - 6120 \text{ МПа для } T_k < 350\text{К}; \\ 2.23 T_k - 640 \text{ МПа для } T_k > 350\text{К}; \end{cases} \quad (2.142)$$

$$m_1^* = m_2^* = -0.0155 T_k + 7.73 \text{ МПа}; \quad \eta_{0,1}^* = 36000 \cdot \exp\left(\frac{9500}{T_k} - 20\right) \text{ МПа} \cdot \text{с};$$

$$\eta_{0,2}^* = 36000 \cdot \exp\left(\frac{35400}{T_k} - 90\right) \text{ МПа} \cdot \text{с}; \quad \nu = \text{const} = 0.37;$$



Значение критического времени  $t_{кр} = 1 \text{ ч } 635 \text{ мин}$  приводит в своей работе М.Ю. Козельская [146]. Нами получена величина критического времени  $t_{кр} = 1 \text{ ч } 41 \text{ мин}$ . Условие (критерий) потери устойчивости принято нами соотношение:  $f > l/10$ . [174]

Нами для рассматриваемой задачи получена Эйлера сила и длительная сила:

$$F_3 = \frac{4\pi^2 EI}{l^2} = 3.02 \text{ кН}; F_d = \frac{H}{E} F_3 = 1.56 \text{ кН}. \quad (2.143)$$

График роста стрелы прогиба и распределения напряжений по высоте сечения в середине длины стержня приведен на рисунке 2.20 и рисунке 2.21.

На рисунке (2.20) хорошо видно выполнение кинематических граничных условий и изменение прогиба в зависимости от  $x$  и  $t$ .

Из графика рисунка 2.21 видно, что характер эпюра нормальных напряжений в момент потери устойчивости нелинейный.

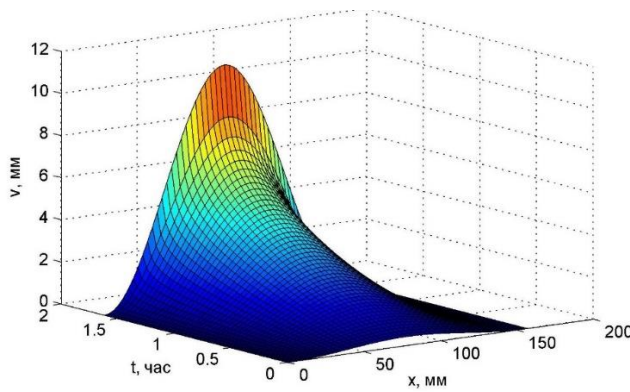


Рисунок 2.20 – Распределение прогиба по длине стержня во времени  $t$

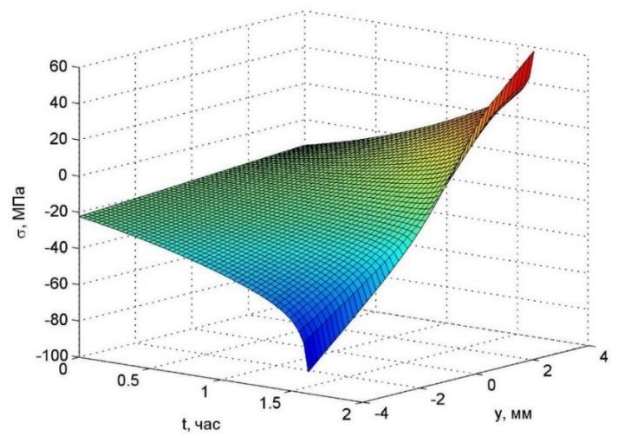


Рисунок 2.21 – Распределение напряжений по сечению во времени  $t$  в середине пролета

### **Задача 2. Вариант закрепления «защемление-свободный край»**

Условия закрепления стержня в соответствии с рисунком 2.17. Сечение стержня постоянное призматическое. Материал стержня полимерное связующее ЭДТ-10. Размеры стержня, как и в предыдущей задаче. Действующая нагрузка сосредоточенная  $F = 0.165 \text{ кН}$ . Эйлера сила и длительная сила для рассматриваемой задачи:

$$F_3 = \frac{4\pi^2 EI}{l^2} = 0.189 \text{ кН}; F_d = \frac{H}{E} F_3 = 0.0976 \text{ кН} \quad (2.144)$$

Эволюция роста стрелы прогиба представлено на рисунке 2.22. где видно нелинейное проявление прогиба в зависимости от  $x$  и  $t$  и что критическое время потери устойчивости составляет 130 ч. Графическое представление изменения напряжений в зависимости от  $x$  и  $y$  для критического времени  $t = 130 \text{ ч}$ . приведено на рисунке 2.23. Отметим, что граничное условие выполняется то есть при  $x = l$  напряжения по высоте стержня не меняются.

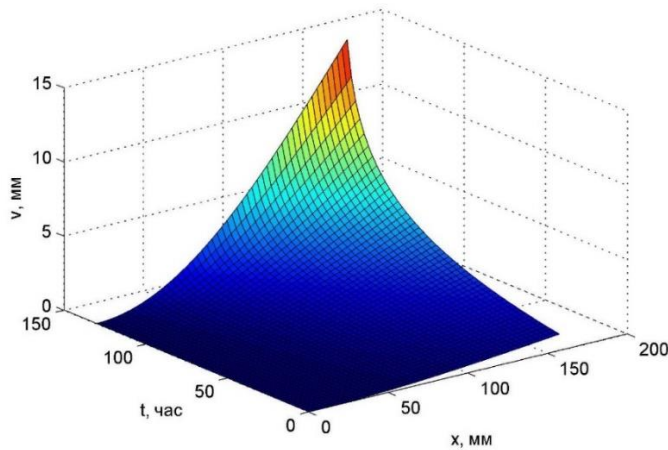


Рисунок 2.22 – Характерный рост прогиба при  $F = 0.165$  кН

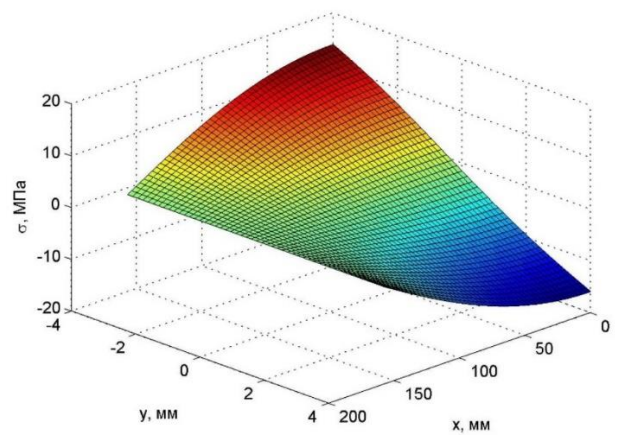


Рисунок 2.23 – Изменение напряжений по сечению и длине при  $t = 130$  ч

### Задача 3. Вариант закрепления «защемление-шарнир»

Рассмотрим стержень прямоугольного сечения, закрепленный согласно граничным условиям (2.18). Как и ранее, в качестве материала воспользуемся полимером, в частности, эпоксидным олигомером (связующим) ЭДТ-10. Воспринимаемая нагрузка стержнем -  $F = 1.35$  кН. Длительная и Эйлера сила настоящей задачи равна:

$$F_3 = \frac{4\pi^2 EI}{l^2} = 1.54 \text{ кН}; F_d = \frac{H}{E} F_3 = 0.8 \text{ кН}. \quad (2.145)$$

С течением времени рост стрелы прогиба представлено на рисунке 2.24. Начало потери устойчивости стержня установлено на отметке 42 мин.

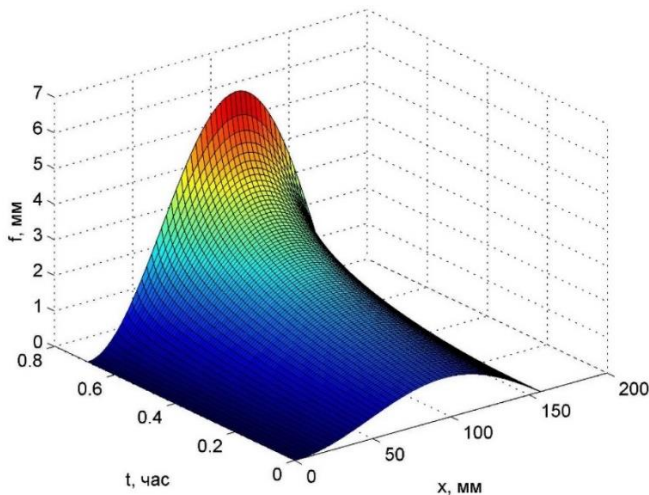


Рисунок 2.24 – Эволюция роста прогиба при фиксированном  $F = 1.35$  кН

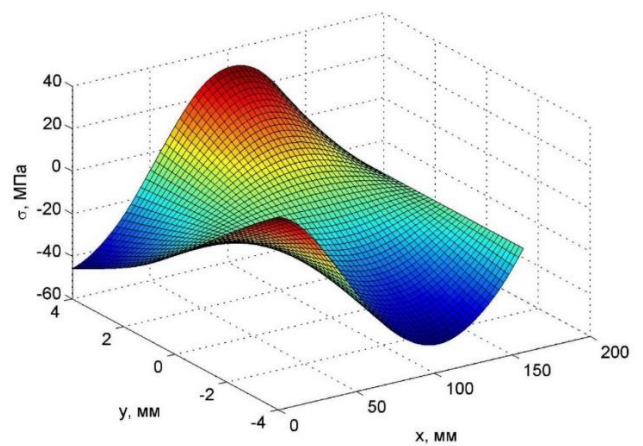


Рисунок 2.25 – Изменение напряжений по сечению и длине при  $t = 42$  мин.

Из графика рисунка 2.25 видно выполнение статических граничных условий, то есть, по высоте сечения напряжения при  $x = l$  и  $t = 42$  мин не меняются. Это еще раз доказывает, что изгибающий момент на верхнем конце стержня равен нулю.

### 2.3.3 Конечно-элементное моделирование при расчете стержней на устойчивость с учетом деформаций ползучести

При расчете стержневых систем рассматриваются одномерные области из изотропного материала, все характеристики которых — геометрические (толщина), физические (модуль упругости, коэффициент Пуассона) и компоненты напряженно-деформированного состояния (напряжения, деформации) — функции одного аргумента и времени.

Функционал полной потенциальной энергии стержня:

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2} \int_0^l (M_y \varkappa_y + M_z + M_x \theta + Q_y \gamma_y + Q_z \gamma_z + N \varepsilon_x) dx - \\ & - \int_0^l [q_x(x)u + q_y(x)v + q_z(x)w + m_x \theta + m_y \gamma_y + m_z \gamma_z] dx \end{aligned} \quad (2.146)$$

где  $\varkappa_y, \varkappa_z$  — кривизны упругой линии в соответствующих плоскостях,  $\gamma_y, \gamma_z$  — углы сдвига в тех же плоскостях,  $\theta$  — угол поворота относительно оси  $x$ ,  $\varepsilon_x$  — линейная деформация,  $q_x(x), q_y(x), q_z(x)$  — интенсивность распределенных нагрузок вдоль соответствующих осей,  $m_x, m_y, m_z$  — интенсивность распределенных моментов вдоль соответствующих осей.

Рассмотрим вывод уравнений для «классической» модели закрепления стержня «шарнир-шарнир». Рассмотрим стержень, имеющий начальные несовершенства, то есть имеется начальная погибь  $v_0 = f(x)$  или сила действует с эксцентриситетом (рисунок 2.26). Стержень подвержен действию сжимающей силы  $F$ .

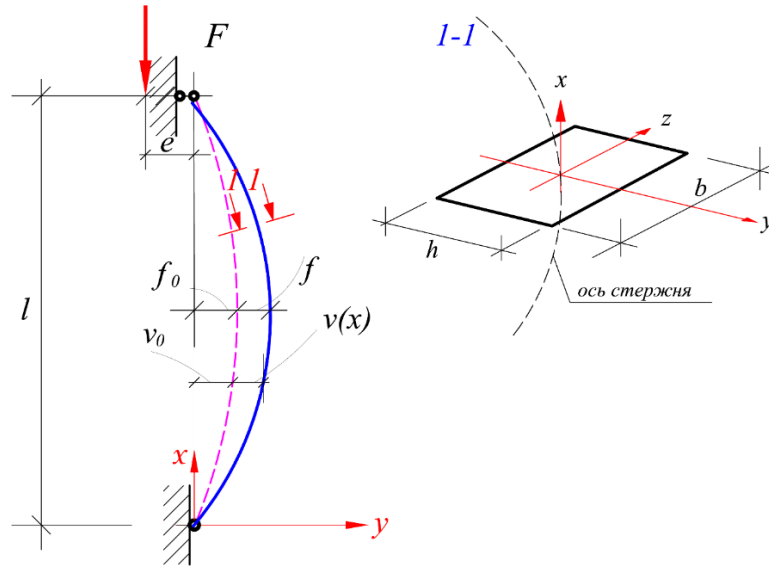


Рисунок 2.26 – Расчетная схема с учетом начальных несовершенств.

Для рассмотрения равновесных состояний консервативных систем, можно ввести вариацию полной потенциальной энергии системы вместо вариации работы внутренних и внешних сил. Приведем выражение для потенциальной энергии системы. Соотношение (2.146) можно упростить через напряжения и деформации до вида:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V \sigma \varepsilon^{el} dV = \frac{1}{2} \int_V E (\varepsilon^{el})^2 dV. \quad (2.147)$$

Из соотношения для напряжения (2.94) упругая деформация:

$$\varepsilon^{el} = \left( \varepsilon_0 - \frac{d^2 v}{dx^2} y \right) - \varepsilon_T - \varepsilon^* \quad (2.148)$$

После подстановки в (2.148) выражение (2.147), получим:

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2} \int_0^l E(x) dx \int_A \left\{ \varepsilon_0^2 + \left( \frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 y^2 + \varepsilon_T^2 + (\varepsilon^*)^2 - 2\varepsilon_0 \frac{d^2 v}{dx^2} y - \right. \\ &\quad \left. - 2\varepsilon_0 \varepsilon_T - 2\varepsilon_0 \varepsilon^* + 2\varepsilon_T \frac{d^2 v}{dx^2} y + 2\varepsilon^* \frac{d^2 v}{dx^2} y + 2\varepsilon_T \varepsilon^* \right\} dA = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^l E(x) \left\{ I(x) \left( \frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 + \varepsilon_0^2 A + \varepsilon_T^2 A + \int_A (\varepsilon^*)^2 dA + 2(\varepsilon_T - \varepsilon_0) \int_A \varepsilon^* dA + \right. \\ &\quad \left. + 2 \frac{d^2 v}{dx^2} \left[ \int_A \varepsilon^* y dA + (\varepsilon_T - \varepsilon_0) \int_A y dA \right] - 2\varepsilon_T \varepsilon_0 A \right\} dx \end{aligned} \quad (2.149)$$

При выпучивании сближение концов стержня элементарного фрагмента  $\Delta(dx)$  (см. рисунок 2.27) можно как:

$$\Delta(dx) = dx \cdot \left( \cos\left(\frac{dv_0}{dx}\right) - \cos\left(\frac{dv}{dx} + \frac{dv_0}{dx}\right) \right) \quad (2.150)$$

Раскладываем  $\cos\left(\frac{dv_0}{dx}\right)$  и  $\cos\left(\frac{dv}{dx} + \frac{dv_0}{dx}\right)$  в степенной ряд и удерживаем в этом разложении величины до второго порядка малости:

$$\cos\left(\frac{dv_0}{dx}\right) = 1 - \frac{\left(\frac{dv_0}{dx}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{dv_0}{dx}\right)^4}{4!} + \dots \approx 1 - \frac{\left(\frac{dv_0}{dx}\right)^2}{2!} \quad (2.151)$$

$$\cos\left(\frac{dv}{dx} + \frac{dv_0}{dx}\right) = 1 - \frac{\left(\frac{dv}{dx} + \frac{dv_0}{dx}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{dv}{dx} + \frac{dv_0}{dx}\right)^4}{4!} \dots \approx 1 - \frac{\left(\frac{dv}{dx} + \frac{dv_0}{dx}\right)^2}{2!}$$

Подставив (2.151) в (2.150) – получим

$$\Delta(dx) = dx \cdot \left( 1 - \frac{\left(\frac{dv_0}{dx}\right)^2}{2!} - \left( 1 - \frac{\left(\frac{dv}{dx} + \frac{dv_0}{dx}\right)^2}{2!} \right) \right) = \left( \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 + \frac{dv}{dx} \frac{dv_0}{dx} \right) dx.$$

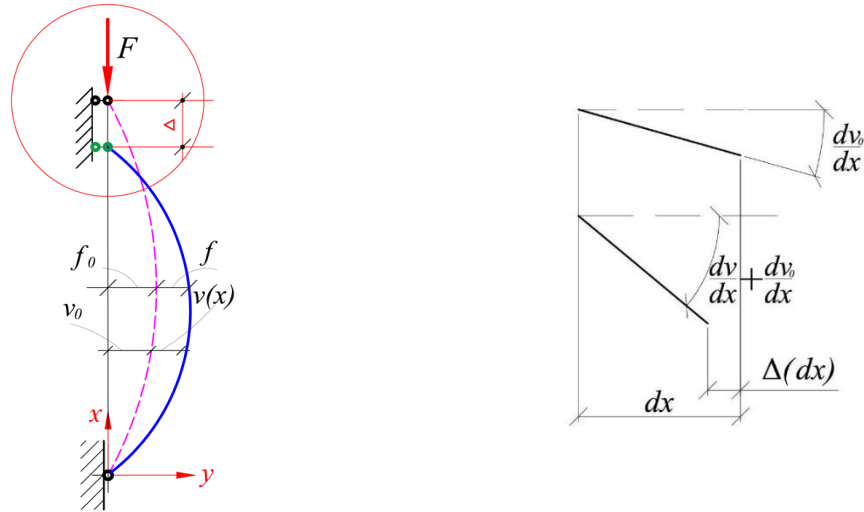


Рисунок 2.27 – К определению  $\Delta$  при выпучивании

Работы внешних сил имеет вид:

$$A = F\Delta = \frac{1}{2} F \int_0^l \left\{ \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 + 2 \frac{dv}{dx} \frac{dv_0}{dx} \right\} dx \quad (2.152)$$

Воспользуемся полином 3-го порядка с четырьмя параметрами полинома. Функцию прогибов в пределах стержневого элемента представим в виде кубического полинома:

$$v(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 = \{1 \quad x \quad x^2 \quad x^3\} \begin{Bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix}$$

Аппроксимация полинома тем более оправдана, что перемещения точек изгибаемого стержня описываются функциями 3-го порядка (балочные функции). Из этих соображений КЭ изгибаемого стержня имеет 2 узла (рисунок 2.28), каждому из которых приданы 2 степени свободы – 2 линейных ( $v_i$  и  $v_j$ ) и 2 угловых ( $\varphi_i$  и  $\varphi_j$ ).

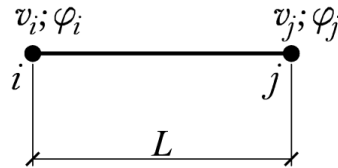


Рисунок 2.28 – Стержневой (балочный) конечный элемент

Первая производная прогиба (угол поворота) имеет вид:

$$\varphi(x) = \frac{dv}{dx} = \{0 \quad 1 \quad 2x \quad 3x^2\} \begin{Bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix}$$

Неизвестные параметры  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  определяются из граничных условий:

$v(0) = v_i, v(L) = v_j, \varphi(0) = \varphi_i, \varphi(L) = \varphi_j$  где  $L$  — длина конечного элемента

Тогда параметры полинома:

$$\alpha_0 = v_i, \quad \alpha_1 = \varphi_i, \quad \alpha_2 = \frac{3}{L^2}(v_j - v_i) - \frac{1}{L}(2\varphi_i + \varphi_j), \quad \alpha_3 = \frac{2}{L^3}(v_i - v_j) - \frac{1}{L}(\varphi_i + \varphi_j),$$

Или в матричном виде:

$$\begin{Bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{L^2} & -\frac{2}{L} & \frac{3}{L^2} & -\frac{1}{L} \\ \frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} & -\frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_i \\ \varphi_i \\ v_j \\ \varphi_j \end{Bmatrix} = [B] \cdot \{U\} \quad (2.153)$$

$$v(x) = \{1 \quad x \quad x^2 \quad x^3\} \cdot [B] \cdot \{U\};$$

$$\frac{dv}{dx} = \{0 \quad 1 \quad 2x \quad 3x^2\} \cdot [B] \cdot \{U\}$$

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \{0 \quad 0 \quad 2 \quad 6x\} \cdot [B] \cdot \{U\}$$

Потенциальную энергию системы (2.149) и работу внешних сил (2.152) запишем в виде суммы интегралов по элементам интегралы по длине стержня:

$$\begin{aligned} \Pi = \frac{1}{2} \sum_{e=1}^m E^{(e)} & \left\{ I^{(e)} + \varepsilon_0^2 A + \varepsilon_T^2 A + \int_A (\varepsilon^*)^2 dA - 2(\varepsilon_T - \varepsilon_0) \int_A \varepsilon^* dA \right. \\ & \left. + 2 \frac{d^2v}{dx^2} \left[ \int_A \varepsilon^* y dA + (\varepsilon_T - \varepsilon_0) \int_A y dA \right] - 2\varepsilon_T \varepsilon_0 A \right\} \cdot dx \end{aligned} \quad (2.154)$$

$$A = \frac{1}{2} F \sum_{e=1}^m \left\{ \int_{L^{(e)}} \left[ \frac{dv}{dx} \right]^2 dx + 2 \int_{L^{(e)}} \frac{dv}{dx} \frac{dv_0}{dx} dx \right\}. \quad (2.155)$$

Входящие в соотношения (2.154) и (2.155) интегралы по сечению, имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \int_{L^{(e)}} \frac{d^2v}{dx^2} dx &= \{U\}^T \cdot [B]^T \int_{L^{(e)}} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 6x \end{Bmatrix} dx = \{U\}^T \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \\ \int_{L^{(e)}} \left[ \frac{d^2v}{dx^2} \right]^2 dx &= \{U\}^T \cdot [B]^T \int_{L^{(e)}} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 6x \end{Bmatrix} \{0 \quad 0 \quad 2 \quad 6x\} dx \cdot [B] \cdot \{U\} = \\ &= \{U\}^T \begin{bmatrix} \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & -\frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} \\ \frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} & -\frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} \\ -\frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} & \frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} \\ \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} & -\frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} \end{bmatrix} \cdot \{U\}; \end{aligned}$$

$$\int_{L^{(e)}} \left[ \frac{dv}{dx} \right]^2 dx = \{U\}^T \cdot [B]^T \int_{L^{(e)}} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2x \\ 3x^2 \end{Bmatrix} \{0 \quad 1 \quad 2x \quad 3x^2\} dx \cdot [B] \cdot \{U\} =$$

$$= \{U\}^T \begin{bmatrix} \frac{6}{5L} & \frac{1}{10} & -\frac{6}{5L} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{2L}{15} & -\frac{1}{10} & -\frac{30}{10} \\ -\frac{6}{5L} & -\frac{1}{10} & \frac{6}{5L} & -\frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & -\frac{30}{10} & -\frac{1}{10} & \frac{2L}{15} \end{bmatrix} \cdot \{U\};$$

Отметим, что, если интегралы, не содержащие функцию прогиба, то при минимизации они обращаются в нуль.

### **Схема для стержня, шарнирно закрепленного по концам**

В качестве начального прогиба возьмем функцию:

$$v_0(x) = f_0 \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right),$$

Продифференцируем один раз по  $x$ :

$$\frac{dv_0}{dx} = f_0 \cos\left(\frac{\pi x}{l}\right) \cdot \frac{\pi}{l} = \frac{f_0 \pi}{l} \cos\left(\frac{\pi x}{l}\right)$$

Тогда:

$$\int_{L^{(e)}} \frac{dv}{dx} \frac{dv_0}{dx} dx = \{U\}^T \cdot [B]^T \frac{f_0 \cdot \pi}{l} \int_0^{L^{(e)}} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2x \\ 3x^2 \end{Bmatrix} \cos \frac{\pi(x + X_i)}{l} dx = \quad (2.156)$$

$$= \{U\}^T \cdot [B]^T f_0 \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \sin \frac{\pi X_j}{l} - \sin \frac{\pi X_i}{l} \\ \frac{2l}{\pi} \left( \cos \frac{\pi X_j}{l} - \cos \frac{\pi X_i}{l} \right) + 2L \sin \frac{\pi X_j}{l} \\ \frac{6lL}{\pi} \cos \frac{\pi X_j}{l} + \frac{6l^2}{\pi^2} \left( \sin \frac{\pi X_i}{l} - \sin \frac{\pi X_j}{l} \right) + 3L^2 \sin \frac{\pi X_j}{l} \end{array} \right\}$$

После дифференцирования потенциальной энергии по вектору узловых перемещений, задачу приводим к системе алгебраических уравнений:

$$[K] \cdot \{U\} = \{F\},$$

$[K]$  – глобальная матрица жёсткости, представляет собой сумму локальных матриц жёсткости:



$$[K] = \sum_{e=1}^m [K]^{(e)}$$

$$[K]^{(e)} = E^{(e)} I^{(e)} \begin{bmatrix} \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & -\frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} \\ \frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} & -\frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} \\ -\frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} & \frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} \\ \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} & -\frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} \end{bmatrix} \cdot F \cdot \begin{bmatrix} \frac{6}{5L} & \frac{1}{10} & -\frac{6}{5L} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{2L}{15} & \frac{1}{10} & -\frac{30}{L} \\ -\frac{6}{5L} & -\frac{1}{10} & \frac{6}{5L} & -\frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & -\frac{30}{L} & -\frac{1}{10} & \frac{2L}{15} \end{bmatrix};$$

В локальных координатах вектор нагрузки имеет вид:

$$[F]^{(e)} = [B]^T \cdot F \cdot f_0 \cdot \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \sin \frac{\pi X_j}{l} - \sin \frac{\pi X_i}{l} \\ \frac{2l}{\pi} \left( \cos \frac{\pi X_j}{l} - \cos \frac{\pi X_i}{l} \right) + 2L \sin \frac{\pi X_j}{l} \\ \frac{6lL}{\pi} \cos \frac{\pi X_j}{l} + \frac{6l^2}{\pi^2} \left( \sin \frac{\pi X_i}{l} - \sin \frac{\pi X_j}{l} \right) + 3L^2 \sin \frac{\pi X_j}{l} \end{array} \right\} - \quad (2.157)$$

$$-E^{(e)} \int_A \varepsilon^* y dA \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix};$$

Рассмотрим другие варианты граничных условий

### **Схема закрепления «Подвижная заделка – Защемление»**

Расчётная схема изображена на рисунок 2.16. Рассматривается стержень, имеющий начальную погибь  $v_0 = f(x)$ , который сжимается силой  $F$ .

Отличие от вывода ранее разрешающих уравнений будет состоять в форме начальных несовершенств стержня, что влечет изменению формы подынтегральных выражений.

Пусть задана начальная погибь в виде функциональной зависимости:

$$v_0(x) = f_0 \sin^2 \left( \frac{\pi x}{l} \right);$$

Продифференцируем один раз по  $x$ :

$$\frac{dv_0}{dx} = 2f_0 \sin \left( \frac{\pi x}{l} \right) \cos \left( \frac{\pi x}{l} \right) \cdot \frac{\pi}{l} = \frac{f_0 \pi}{l} \sin \left( \frac{2\pi x}{l} \right)$$

Второе подынтегральное слагаемое выражения (2.169) запишется:

$$\begin{aligned}
\int_{L^{(e)}} \frac{dv}{dx} \frac{dv_0}{dx} dx &= \{U\}^T \cdot [B]^T \frac{f_0 \cdot \pi}{l} \int_0^{L^{(e)}} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2x \\ 3x^2 \end{Bmatrix} \sin \frac{2\pi(x + X_i)}{l} dx = \\
&= \{U\}^T \cdot [B]^T f_0 \cdot \\
&\quad \cdot \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ \frac{1}{2} \cos \frac{2\pi X_i}{l} - \frac{1}{2} \cos \frac{2\pi X_j}{l} \\ \frac{l}{2\pi} \left( \sin \frac{2\pi X_j}{l} - \sin \frac{2\pi X_i}{l} \right) - L \cos \frac{2\pi X_j}{l} \\ \frac{3l^2}{\pi^2} \left( \sin^2 \frac{\pi X_i}{l} - \sin^2 \frac{\pi X_j}{l} \right) + \frac{3Ll}{2\pi} \sin \frac{2\pi X_j}{l} - \frac{3l^2}{2} \left( 1 - 2 \sin^2 \frac{\pi X_j}{l} \right) \end{array} \right\} \quad (2.158)
\end{aligned}$$

Тогда окончательный вид локального вектора нагрузки:

$$\begin{aligned}
[P]^{(e)} &= [B]^T \cdot F \cdot f_0 \\
&\quad \cdot \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ \frac{1}{2} \cos \frac{2\pi X_i}{l} - \frac{1}{2} \cos \frac{2\pi X_j}{l} \\ \frac{l}{2\pi} \left( \sin \frac{2\pi X_j}{l} - \sin \frac{2\pi X_i}{l} \right) - L \cos \frac{2\pi X_j}{l} \\ \frac{3l^2}{\pi^2} \left( \sin^2 \frac{\pi X_i}{l} - \sin^2 \frac{\pi X_j}{l} \right) + \frac{3Ll}{2\pi} \sin \frac{2\pi X_j}{l} - \frac{3l^2}{2} \left( 1 - 2 \sin^2 \frac{\pi X_j}{l} \right) \end{array} \right\} - \\
&\quad - E^{(e)} \int_A \varepsilon^* y dA \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}; \quad (2.159)
\end{aligned}$$

### Схема закрепления «защемление-свободный край»

Расчётная схема изображена на рисунок 2.17. Описание начальной погиби зададим выражением:

$$v_0(x) = f_0 \left( 1 - \cos \left( \frac{\pi x}{2l} \right) \right);$$

Продифференцируем один раз по  $x$ :

$$\frac{dv_0}{dx} = \frac{\pi}{2l} f_0 \sin \left( \frac{\pi x}{2l} \right);$$

$$\begin{aligned}
\int_{L^{(e)}} \frac{dv}{dx} \frac{dv_0}{dx} dx &= \{U\}^T \cdot [B]^T \frac{f_0 \cdot \pi}{2l} \int_0^{L^{(e)}} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2x \\ 3x^2 \end{Bmatrix} \sin \frac{\pi(x + X_i)}{2l} dx = \\
&= \{U\}^T \cdot [B]^T f_0 \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ \cos \frac{\pi X_i}{2l} - \cos \frac{\pi X_j}{2l} \\ \frac{4l}{\pi} \left( \sin \frac{\pi X_j}{2l} - \sin \frac{\pi X_i}{2l} \right) - 2L \cos \frac{\pi X_j}{2l} \\ \frac{24l^2}{\pi^2} \left( \cos \frac{\pi X_i}{2l} - \cos \frac{\pi X_j}{2l} \right) + \frac{12Ll}{\pi} \sin \frac{\pi X_i}{2l} - 3L^2 \left( 1 - 2 \sin^2 \frac{\pi X_j}{4l} \right) \end{array} \right\} \quad (2.160)
\end{aligned}$$

Вид локального вектора нагрузки принимает вид:

$$\begin{aligned}
[P]^{(e)} &= [B]^T \cdot F \cdot f_0 \\
&\cdot \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ \cos \frac{\pi X_i}{2l} - \cos \frac{\pi X_j}{2l} \\ \frac{4l}{\pi} \left( \sin \frac{\pi X_j}{2l} - \sin \frac{\pi X_i}{2l} \right) - 2L \cos \frac{\pi X_j}{2l} \\ \frac{24l^2}{\pi^2} \left( \cos \frac{\pi X_i}{2l} - \cos \frac{\pi X_j}{2l} \right) + \frac{12Ll}{\pi} \sin \frac{\pi X_i}{2l} - 3L^2 \left( 1 - 2 \sin^2 \frac{\pi X_j}{4l} \right) \end{array} \right\} - \quad (2.161) \\
&\quad - E^{(e)} \int_A \varepsilon^* y dA \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix};
\end{aligned}$$

### 2.3.4 Решение модельных задач методом конечных элементов

#### *Задача 1. Задача для стержня, закрепленного «Подвижная заделка – Защемление»*

Рассмотрим стержень, подверженному действию продольной силы  $F$ . В качестве материала воспользуемся эпоксидным олигомером (связующим) ЭДТ-10. Граничные условия примем согласно (2.22).

Сечение стержня – прямоугольное (в соответствии с разрезом сечения, приведённым на рисунке 2.15 размерами  $h = 0.008$  м,  $b = 0.015$  м,  $l = 0.157$  м;  $F = 2.20$  кН.) Упругие и реологические характеристики приведены соотношением (2.142).

Характер изменения нормальных напряжений  $\sigma_x$  при  $x = l/2$  и величина прогиба в середине стержня во времени представлены на рисунках 2.29 – 2.30.

Зависимость напряжений по длине стержня при  $t = 1$  часа и  $y = -h/2$  приведен на рисунке 2.31.

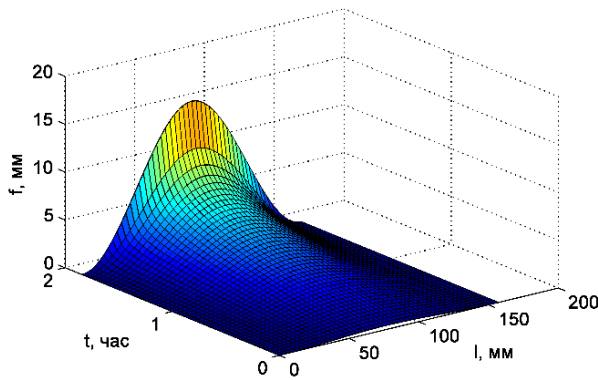


Рисунок 2.29. Изменение стрелы прогиба во времени схемы «подвижная заделка – защемление»

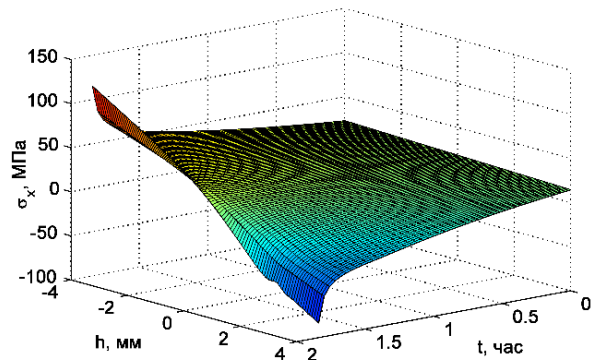


Рисунок 2.30. Изменения нормальных напряжений при  $x = l/2$  с течением времени, закрепление «подвижная заделка – защемление»

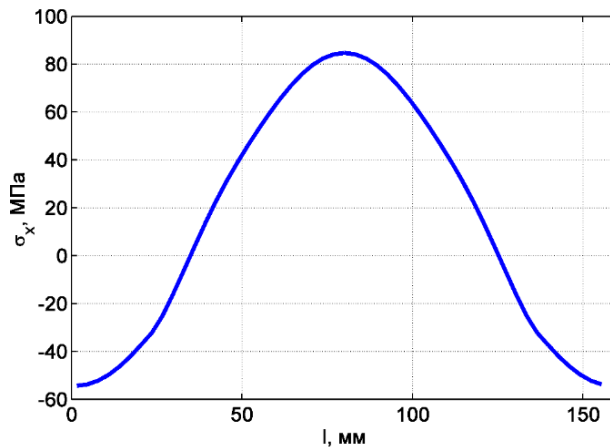


Рисунок 2.31. График распределения осевых напряжений в поперечном сечении  $x = -h/2$ , по продольной оси  $x$

### *Задача 2. Задача для стержня, закрепленного «защемление-свободный край»*

Рассмотрим стержень, подверженному действию продольной силы  $F$ . В качестве материала воспользуемся эпоксидным олигомером (связующим) ЭДТ-10.

Граничные условия примем согласно (2.123). Сечение стержня – прямоугольное (в соответствии с разрезом сечения, приведённым на рисунке 2.15 размерами  $h = 0.008$  м,  $b = 0.015$  м,  $l = 0.157$  м;  $F = 2.20$  кН).

Упругие и реологические характеристики приведены соотношением (2.142).

Характер изменения нормальных напряжений  $\sigma_x$  при  $x = l/2$  и величины прогиба в середине стержня со временем представлены на рисунках 2.32 – 2.33.

Изменения напряжений по длине стержня при  $t = 1$  часа и  $y = -h/2$  приведен на рисунке 2.34.

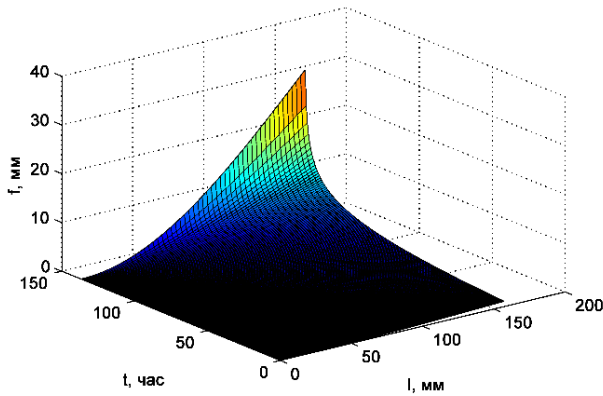


Рисунок 2.32 – Изменение стрелы прогиба во времени схемы «зашемление-свободный край»

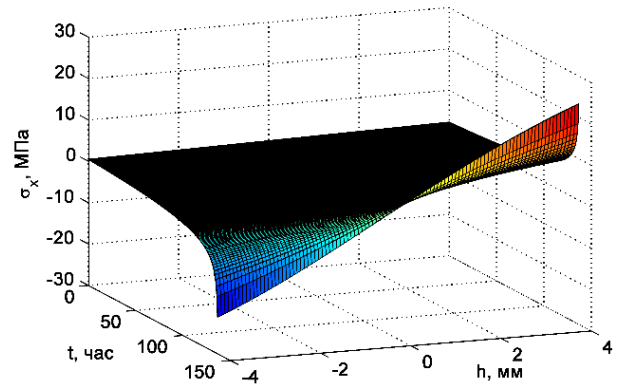


Рисунок 2.33 – Изменения нормальных напряжений при  $x = 0$  с течением времени, закрепление «зашемление-свободный край»

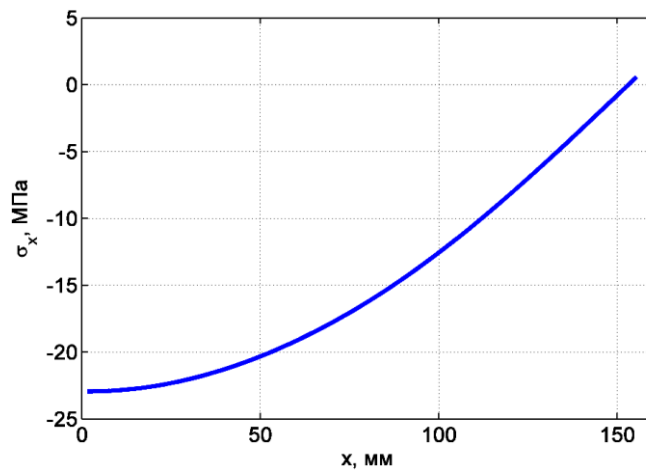


Рисунок 2.34 – График распределения осевых напряжений в поперечном сечении  $x = -h/2$ , по продольной оси  $x$

## 2.4 Численно-аналитические методы решения задач устойчивости вязкоупругих стержней. Метод Ритца-Тимошенко и Бубнова-Галеркина

Известно, что в случае положительно определенного оператора метод Бубнова-Галеркина не дает ничего нового по сравнению с методом Ритца-Тимошенко; эти два метода ведут к решению одинаковых систем линейных уравнений и к одинаковым последовательностям приближенных решений. Но возможности применения метода Бубнова-Галеркина существенно шире, чем у метода Ритца-Тимошенко. В методе Бубнова-Галеркина на операторе задачи не налагается никаких существенных ограничений, то есть, нет необходимости в положительно определенности оператора и не требуется, чтобы он был симметричным, и он может быть нелинейным.

Хотя методы Ритца-Тимошенко и Бубнова-Галёркина ведут в случае линейных положительно определенных операторов к одинаковым результатам, основные идеи этих методов существенно различаются.

#### 2.4.1 Решение задач методом Ритца-Тимошенко

Этот метод впервые был использован Рэлеем для решения задач колебаний. В 1908 г. Ритцем были разработаны основы метода для задач изгиба и устойчивости. Дальнейшее развитие метод получил в работах С. П. Тимошенко. Неизвестную функцию прогиба  $v(x)$  задают в виде ряда с неопределенными коэффициентами  $a_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ):

$$v(x) = \sum_{i=1}^n a_i f(x). \quad (2.162)$$

Здесь  $f(x)$  – координатные функции, удовлетворяющие кинематическим граничным условиям (задаются);  $a_i$  – неизвестные числовые коэффициенты (определяются в ходе решения).

После подстановки  $v(x)$  в выражение для полной потенциальной энергии и интегрирования получают выражение энергии в виде функции от неизвестных коэффициентов  $\Pi = f(a_1, a_2, \dots, a_n)$ . Согласно принципу Лагранжа, функция  $\Pi = f(a_1, a_2, \dots, a_n)$  должна принимать минимальное значение. Для определения  $a_i$  находят производные  $\frac{\partial \Pi}{\partial a_i}$  и приравнивают их нулю. В результате получают систему  $n$  линейных алгебраических уравнений:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_1} = 0, \dots, \dots, \dots, \frac{\partial \Pi}{\partial a_n} = 0. \quad (2.163)$$

Подстановка (2.162) в (2.149) и последующей минимизации коэффициентам  $a_i$ , получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial a_j} = \sum_{i=1}^n a_i \left\{ \int_0^l E(x) I(x) \frac{d^2 f_i}{dx^2} \frac{d^2 f_j}{dx^2} dx - F \int_0^l \frac{df_i}{dx} \frac{df_j}{dx} dx \right\} \\ + \int_0^l E(x) \frac{d^2 f_j}{dx^2} \left\{ \int_A \varepsilon^* y dA + (\varepsilon_T - \varepsilon_0) \int_A y dA \right\} dx - F \int_0^l \frac{df_j}{dx} \frac{dv_0}{dx} dx = 0, \\ j = 1 \dots n \end{aligned}$$

или в матричном виде:

$$([K] - F[B])\{X\} = \{C\}, \quad (2.164)$$

$$\text{где } X = \begin{Bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{Bmatrix}, \{C\} = \begin{Bmatrix} c_1 \\ \dots \\ c_n \end{Bmatrix}, K = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \dots k_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ k_{n1} & k_{n2} \dots k_{nn} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \dots b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} \dots b_{nn} \end{bmatrix}.$$

$$k_{ij} = \int_0^l E(x) I(x) \frac{d^2 f_i}{dx^2} \frac{d^2 f_j}{dx^2} dx; \quad b_{ij} = \int_0^l \frac{df_i}{dx} \frac{df_j}{dx} dx;$$

$$c_j = - \int_0^l E(x) \frac{d^2 f_j}{dx^2} \left\{ \int_A \varepsilon^* y dA + (\varepsilon_T - \varepsilon_0) \int_A y dA \right\} dx + F \int_0^l \frac{df_j}{dx} \frac{dv_0}{dx} dx.$$

Из условия равенства нулю определителя системы (2.164) можно определить мгновенную критическую силу.

$$\det([K] - F[B]) = 0. \quad (2.165)$$

Результаты решения существенно зависят от того, насколько удачно заданы координатные функции. Рассмотрим функции формы  $f_i(x)$  при различных граничных условиях стержня.

### ***Задача для стержня, закрепленного «Подвижная заделка – Защемление»***

Примем в качестве функциональной зависимости начальной погиби выражение:

$$v_0(x) = f_0 \sin^2 \left( \frac{\pi x}{l} \right). \quad (2.166)$$

В данном случае функции формы:

$$f_i = \sin^2 \left( \frac{\pi x i}{l} \right). \quad (2.167)$$

Продифференцируем по  $x$  (2.166) и (2.167):

$$\frac{dv_0}{dx} = \frac{\pi f_0}{l} \cdot 2 \sin \left( \frac{\pi x}{l} \right) \cos \left( \frac{\pi x}{l} \right) = \frac{\pi f_0}{l} \sin \left( \frac{2\pi x}{l} \right);$$

$$\frac{df_i}{dx} = \frac{\pi i}{l} \cdot 2 \sin \left( \frac{\pi x i}{l} \right) \cos \left( \frac{\pi x i}{l} \right) = \frac{\pi i}{l} \sin \left( \frac{2\pi x i}{l} \right); \quad (2.168)$$

$$\frac{d^2 f_i}{dx^2} = 2 \left( \frac{\pi i}{l} \right)^2 \cos \left( \frac{2\pi x i}{l} \right).$$

Элементы в матрице  $B$  примут вид:

$$b_{ij} = \int_0^l \frac{df_i}{dx} \frac{df_j}{dx} dx = \left( \frac{\pi}{l} \right)^2 ij \int_0^l \sin \left( \frac{2\pi x i}{l} \right) \sin \left( \frac{2\pi x j}{l} \right) dx = \begin{cases} 0, \text{ при } i \neq j; \\ \frac{\pi^2 ij}{2l}, \text{ при } i = j. \end{cases} \quad (2.169)$$

Второй интеграл в элементе матрицы  $c_j$  будет иметь вид:

$$\int_0^l \frac{df_j}{dx} \frac{dv_0}{dx} dx = \frac{\pi^2 j f_0}{l^2} \int_0^l \sin \left( \frac{2\pi x j}{l} \right) \sin \left( \frac{2\pi x}{l} \right) dx = \begin{cases} 0, \text{ при } j \neq 1; \\ \frac{\pi^2 j f_0}{2l}, \text{ при } j = 1. \end{cases} \quad (2.170)$$

При постоянной изгибной жесткости коэффициенты  $k_{ij}$  имеют вид:

$$k_{ij} = EI \int_0^l \frac{d^2 f_i}{dx^2} \frac{d^2 f_j}{dx^2} dx = 4EI \left(\frac{\pi}{l}\right)^4 i^2 j^2 \int_0^l \cos\left(\frac{2\pi x i}{l}\right) \cos\left(\frac{2\pi x j}{l}\right) dx$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{при } i \neq j; \\ \frac{2EI\pi^4 i^2 j^2}{l^3}, & \text{при } i = j. \end{cases} \quad (2.171)$$

**Задача для стержня, закрепленного «Защемление –Свободный край»**

Примем в качестве функциональной зависимости начальной погиби выражение:

$$v_0(x) = f_0 \left(1 - \cos\left(\frac{\pi x}{2l}\right)\right). \quad (2.172)$$

В данном случае функции формы:

$$f_i(x) = 1 - \cos\left(\frac{\pi x i}{2l}\right). \quad (2.173)$$

Производные от (2.172) и (2.173) записываются в виде:

$$\frac{dv_0}{dx} = \frac{\pi f_0}{2l} \sin\frac{\pi x}{2l}; \quad (2.174)$$

$$\frac{df_i}{dx} = \frac{\pi i}{2l} \sin\frac{\pi x i}{2l}; \quad \frac{d^2 f_i}{dx^2} = \frac{\pi^2 i^2}{4l^2} \cos\frac{\pi x i}{2l}. \quad (2.175)$$

Элементы в матрице  $B$  и  $C$  примут вид:

$$\int_0^l \frac{df_i}{dx} \frac{df_j}{dx} dx = \left(\frac{\pi}{2l}\right)^2 ij \int_0^l \sin\left(\frac{\pi x i}{2l}\right) \sin\left(\frac{\pi x j}{2l}\right) dx = \begin{cases} 0, & \text{при } i \neq j; \\ \frac{\pi^2 ij}{8l}, & \text{при } i = j. \end{cases} \quad (2.176)$$

$$\int_0^l \frac{df_j}{dx} \frac{dv_0}{dx} dx = \frac{\pi^2 j f_0}{4l^2} \int_0^l \sin\left(\frac{\pi x j}{2l}\right) \sin\left(\frac{\pi x}{2l}\right) dx = \begin{cases} 0, & \text{при } j \neq 1; \\ \frac{\pi^2 j f_0}{8l}, & \text{при } j = 1. \end{cases} \quad (2.177)$$

При постоянной изгибной жесткости коэффициенты  $k_{ij}$  имеют вид:

$$k_{ij} = EI \int_0^l \frac{d^2 f_i}{dx^2} \frac{d^2 f_j}{dx^2} dx = EI \left(\frac{\pi}{2l}\right)^4 i^2 j^2 \int_0^l \cos\left(\frac{\pi x i}{2l}\right) \cos\left(\frac{\pi x j}{2l}\right) dx =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{при } i \neq j; \\ \frac{EI\pi^4 i^2 j^2}{32l^3}, & \text{при } i = j. \end{cases} \quad (2.178)$$

**Задача для стержня, закрепленного «Защемление –шарнир»**

Примем в качестве функциональной зависимости начальной погиби выражение:

$$v_0(x) = \frac{27f_0}{4l^3} x^2(l-x). \quad (2.179)$$



В отличие от ранее приведенных вариантов, в качестве функции формы принимаем степенную функцию:

$$f_i = x^{i+1}(l - x). \quad (2.180)$$

Производные (2.179) и (2.180) имеют вид:

$$\frac{dv_0}{dx} = \frac{27f_0}{4l^3}(2lx - 3x^2);$$

$$\frac{df_i}{dx} = x^i l(i+1) - x^{i+1}(i+2) = x^i[l(i+1) - (i+2)x]; \quad (2.181)$$

$$\frac{d^2 f_i}{dx^2} = li(i+1)x^{i-1} - (i+1)(i+2)x^i = (i+1)x^{i-1}[il - (i+2)x].$$

Элементы в матрице  $B$  и  $C$  примут вид:

$$\begin{aligned} \int_0^l \frac{df_i}{dx} \frac{df_j}{dx} dx &= \int_0^l x^{i+j} [l(i+1) - (i+2)x] \cdot [l(j+1) - (j+2)x] dx = \\ &= \int_0^l x^{i+j} \{ l^2(i+1)(j+1) - l[(i+2)(j+1) + (i+1)(j+2)]x + \\ &\quad + (i+2)(j+2)x^2 \} dx = \end{aligned} \quad (2.182)$$

$$= l^{i+j+3} \left[ \frac{(i+1)(j+1)}{i+j+1} - \frac{2ij+3i+3j+4}{i+j+2} + \frac{(i+2)(j+2)}{i+j+3} \right].$$

$$\begin{aligned} \int_0^l \frac{df_j}{dx} \frac{dv_0}{dx} dx &= \frac{27f_0}{4l^3} \int_0^l x^{j+1} [l(j+1) - (j+2)x](2l - 3x) dx = \\ &= \frac{27f_0 l^{j+1}}{4} \left( \frac{2(j+1)}{j+2} - \frac{5j+7}{j+3} + \frac{3(j+2)}{j+4} \right). \end{aligned} \quad (2.183)$$

При постоянной изгибной жесткости коэффициенты  $k_{ij}$  имеют вид:

$$\begin{aligned} k_{ij} &= EI \int_0^l \frac{d^2 f_i}{dx^2} \frac{d^2 f_j}{dx^2} dx = EI \int_0^l (i+1)x^{i-1} [il - (i+2)x] (j+1)x^{j-1} [jl - \\ &\quad - (j+2)x] dx = EI(i+1)(j+1) \int_0^l x^{i+j-2} [ijl^2 - 2(ij+i+j)lx + \\ &\quad + (i+2)(j+2)x^2] dx = \\ &= EI(i+1)(j+1) l^{i+j+1} \left[ \frac{ij}{i+j-1} - \frac{2(ij+i+j)}{i+j} + \frac{(i+2)(j+2)}{i+j+1} \right]. \end{aligned} \quad (2.184)$$

## 2.4.2 Решение задач методом Бубнова–Галеркина

*Задача для стержня, закрепленного «шарнир–шарнир»*

Идея метода предложена И.Г. Бубновым в 1913 г. в отзыве на работы С.П. Тимошенко. В 1915 г. независимо от Бубнова метод был использован Б.Г. Галеркиным для решения задач механики. Метод основан на свойстве ортогональных функций, то есть, две функции  $f(x)$  и  $\varphi(x)$  ортогональны на заданном интервале, если выполняется условие:

$$\int_a^b f(x) \cdot \varphi(x) dx = 0$$

Задавшись базисной функцией, которая удовлетворяет кинематическим граничным условиям, выставляем условие ортогональности невязки к заданной функции.

Рассмотрим решение разрешающего уравнения для шарнирно опертого стержня (2.111) и примем в качестве базисной функции:

$$v(x) = \sum_{i=1}^n a_i \sin\left(\frac{\pi x i}{l}\right). \quad (2.185)$$

где  $\sin\left(\frac{\pi x i}{l}\right)$  – тригонометрическая функция, удовлетворяющая кинематическим граничным условиям, но не удовлетворяющая в общем случае разрешающему уравнению (2.111);

$a_i$  – произвольные коэффициенты.

Тогда, в общем случае, ряд (2.185) не удовлетворяет дифференциальному уравнению (2.111):

$$\begin{aligned} \Delta(x) = EI \frac{d^2 v}{dx^2} + F(v + v_0) + E \int_A \varepsilon^* y dA = -EI \sum_{i=1}^n \left(\frac{\pi i}{l}\right)^2 a_i \sin\left(\frac{\pi x i}{l}\right) + \\ + F \left( \sum_{i=1}^n a_i \sin\left(\frac{\pi x i}{l}\right) + f_0 \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) \right) + E \int_A \varepsilon^* y dA \neq 0 \end{aligned} \quad (2.186)$$

где  $\Delta(x)$  – невязка полученного решения.

Очевидно, что  $\Delta(x)$  полученного решения существенно зависит от значений неопределенных коэффициентов  $a_i$ . Запишем условие ортогональности  $\Delta(x)$  к базисным функциям:

$$\begin{aligned} \int_0^l \Delta(x) \cdot \sin\left(\frac{\pi x j}{l}\right) dx = - \sum_{i=1}^n \left(\frac{\pi i}{l}\right)^2 a_i \int_0^l E(x) I(x) \sin\left(\frac{\pi x i}{l}\right) \sin\left(\frac{\pi x j}{l}\right) dx + \\ + F \sum_{i=1}^n a_i \int_0^l \sin\left(\frac{\pi x i}{l}\right) \sin\left(\frac{\pi x j}{l}\right) dx + F f_0 \int_0^l \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{\pi x j}{l}\right) dx + \\ + \int_0^l E(x) \left[ \int_A \varepsilon^* y dA \cdot \sin\left(\frac{\pi x j}{l}\right) \right] dx = 0, \quad j = 1 \dots n. \end{aligned} \quad (2.187)$$

Приведем следующее замечание, заключающееся в том, что:

$$\int_0^l \sin\left(\frac{\pi xi}{l}\right) \sin\left(\frac{\pi xj}{l}\right) dx = \begin{cases} 0, & \text{при } i \neq j; \\ \frac{l}{2}, & \text{при } i = j. \end{cases} \quad (2.188)$$

Таким образом, получена система алгебраических уравнений, имеющей вид:

$$([K] - F[B])\{X\} = \{C\},$$

из решения которой определяются коэффициенты  $a_i$  которые получаются такими же, как и при использовании метода Ритца-Тимошенко, удовлетворяет разрешающему дифференциальному уравнению и граничным условиям и, следовательно, является решением исходной задачи.

### Задача для стержня, закрепленного произвольно

В этом случае для возможности задания условий закрепления стержня, воспользуемся соотношением:

$$\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \frac{F}{EI} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{1}{EI} \frac{\partial^2 M_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{b}{I} \int_{-h/2}^{h/2} \varepsilon^* y dy \right). \quad (2.189)$$

Для аппроксимации прогиба, в качестве базисной функции воспользуемся тригонометрическим рядом:

$$v = \sum_{i=1}^n a_i \cdot \sin^2 \frac{\pi xi}{l} \quad (2.190)$$

Начальные несовершенства в виде начальной погиби будет выступать функция:

$$v_0(x) = f_0 \cdot \left( \sin^2 \frac{\pi x}{l} \right),$$

Тогда

$$M_0 = F \cdot v_0 = F \cdot f_0 \cdot \left( \sin^2 \frac{\pi x}{l} \right) \quad (2.191)$$

$$\frac{d^2 M_0}{dx^2} = 2 \cdot \frac{F f_0 \pi^2}{l^2} \cdot \cos \frac{\pi x}{l} \quad (2.192)$$

Найдём производные прогиба до IV порядка:

$$\frac{dv}{dx} = \sum_{i=1}^n a_i \cdot \frac{df_i}{dx} = \sum_{i=1}^n a_i \cdot \frac{\pi i}{l} \sin \frac{2\pi xi}{l} \quad (2.193)$$

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \sum_{i=1}^n a_i \cdot 2 \left( \frac{\pi i}{l} \right)^2 \cos \frac{2\pi xi}{l} \quad (2.194)$$

$$\frac{d^3 v}{dx^3} = -\sum_{i=1}^n a_i \cdot 4 \left( \frac{\pi i}{l} \right)^3 \sin \frac{2\pi xi}{l} \quad (2.195)$$

$$\frac{d^4 v}{dx^4} = - \sum_{i=1}^n a_i \cdot 8 \left(\frac{\pi i}{l}\right)^4 \cos \frac{2\pi x i}{l} \quad (2.196)$$

К базисным функциям условие ортогональности невязки записывается:

$$\int_0^l a_i \cdot \sin^2 \frac{\pi x i}{l} \left[ \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} + \frac{F}{EI} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1}{EI} \frac{\partial^2 M_0}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{b}{I} \int_{-h/2}^{h/2} \varepsilon^* y dy \right) \right] dx = 0. \quad (2.197)$$

Или после некоторых преобразований

$$\int_0^l a_i \cdot \sin^2 \frac{\pi x i}{l} \left\{ \sum_{k=1}^n a_k \left[ -8 \left(\frac{\pi k}{l}\right)^4 \cos \frac{2\pi x k}{l} + \frac{F}{EI} \cdot 2 \left(\frac{\pi k}{l}\right)^2 \cos \frac{2\pi x k}{l} \right] + \right. \\ \left. + 2 \frac{F f_0}{EI} \left(\frac{\pi i}{l}\right)^2 \cos^2 \frac{\pi x}{l} + \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{1}{I} \int_{-h/2}^{h/2} \varepsilon^* y dy \right) \right\} dx = 0. \quad (2.197)$$

В матричном виде выражение (2.198) имеет вид:

$$[B] \cdot \{X\} = \{C\}, \quad (2.199)$$

здесь

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{Bmatrix}, \quad C = \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{Bmatrix}$$

где элементы  $b_{ik}$  и  $c_k$  определены как:

$$b_{ik} = \int_0^l \sin^2 \frac{\pi x i}{l} \left[ -8 \left(\frac{\pi k}{l}\right)^4 \cos \frac{2\pi x k}{l} + \frac{F}{EI} \cdot 2 \left(\frac{\pi k}{l}\right)^2 \cos \frac{2\pi x k}{l} \right] dx = 0. \quad (2.200)$$

$$c_k = \int_0^l \sin^2 \frac{\pi x i}{l} \left[ -\frac{F f_0}{EI} \left(\frac{\pi i}{l}\right)^2 \cos^2 \frac{\pi x}{l} + \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{1}{I} \int_{-h/2}^{h/2} \varepsilon^* y dy \right) \right] dx = 0. \quad (2.201)$$

Рассмотрим интегралы, входящие в выражения (2.200) и (2.201)

$$c_k = \int_0^l \sin^2 \frac{\pi x i}{l} \cos \frac{2\pi x k}{l} dx = \frac{l \cdot \sin 2\pi k}{4\pi k} - \frac{l \cdot \sin(2\pi i + 2\pi k)}{8\pi i + 8\pi k} - \frac{l \cdot \sin(2\pi i - 2\pi k)}{8\pi i - 8\pi k} \quad (2.202) \\ = \frac{l \cdot \sin[2\pi(i - k)]}{4[2\pi(i - k)]} = \begin{cases} 0, & i \neq k \\ \frac{l}{4}, & i = k \end{cases}$$

Если жесткость постоянна,  $EI = const$ , то

$$b_{ik} = \begin{cases} 0, & i \neq k \\ -\frac{l}{4} \left[ -8 \left(\frac{\pi k}{l}\right)^4 + \frac{2F}{EI} \left(\frac{\pi k}{l}\right)^2 \right], & i = k \end{cases} \quad (2.203)$$

$$c_{ik} = \begin{cases} \int_0^l \sin^2 \frac{\pi x k}{l} \cdot \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{1}{I} \int_{-h/2}^{h/2} \varepsilon^* y dy \right) dx, & i \neq k \\ \int_0^l \sin^2 \frac{\pi x k}{l} \cdot \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{1}{I} \int_{-h/2}^{h/2} \varepsilon^* y dy \right) dx - \left( \frac{\pi}{l} \right)^2 \left[ \frac{2Ff_0 l}{EI} \left( \frac{l}{4} \right) \right], & i = k \end{cases} \quad (2.204)$$

Примем следующее обозначение:

$$\xi(x) = \left( \frac{1}{I} \int_{-h/2}^{h/2} \varepsilon^* y dy \right)$$

Тогда:

$$\int_0^l \sin^2 \frac{\pi x k}{l} \cdot \frac{d^2 \xi}{dx^2} dx = 2 \left( \frac{\pi k}{l} \right)^2 \int_0^l \xi(x) \cos \frac{2\pi x k}{l} dx$$

Отметим, что для постоянного сечения достаточно одного члена ряда, то есть в этом случае данный метод эффективен.

### 2.4.3 Сравнение результатов решения задач МКР и МКЭ с численно-аналитическими методами Бубнова-Галеркина и Ритца-Тимошенко

*Задача для стержня, закрепленного «защемление-свободный край».*

*Решение методом сеток и метод Ритца-Тимошенко*

Рассматривается устойчивость консольно закрепленного стержня (рисунок 2.17) и приводится сравнение решение метода Ритца-Тимошенко и метода сеток в таблице 2.9. График роста прогиба во времени приведено на рисунке 2.35.

Графическое представление изменения напряжений в зависимости от  $x$  и  $y$  для критического времени приведено на рисунке 2.36. Отметим, что граничное условие выполняется то есть при  $x = l$  напряжения по высоте стержня постоянно.

Таблица 2.9 – Сравнительные показатели эволюции роста прогиба стержня континуального и дискретного методов

t, час		25	45	65	85	105	125	150
f, мм	МКР	1.5339	2.1251	2.8847	3.9572	5.6472	9.2533	14.9895
	метод	1.5312	2.1242	2.8823	3.9425	5.6419	9.2487	14.9565
	Ритца							

Анализируя результаты, приведенные в таблице 2.9, можно отметить следующее: начиная с момента времени равной 125 ч и более идет небольшое расхождение, и в целом результаты совпадают, что свидетельствует о достоверности разработанной автором методики расчета.

Отметим, что при континуального метода Ритца-Тимошенко число членов ряда  $n$  принималось равным 4, а количество интервалов по  $x$  и  $y$  – 40.

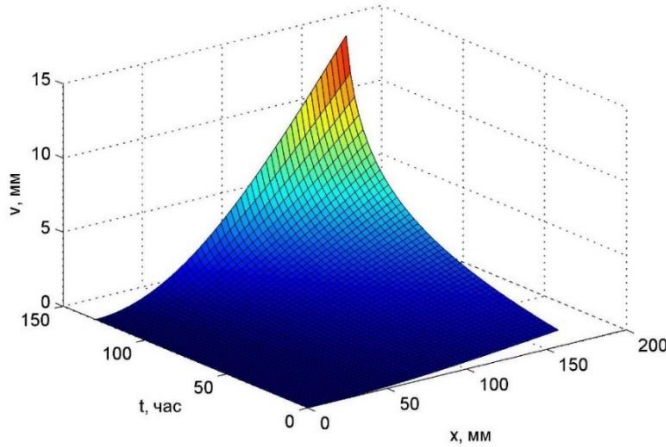


Рисунок 2.35 – Характерный рост перемещения при  $F = 0.165$  кН

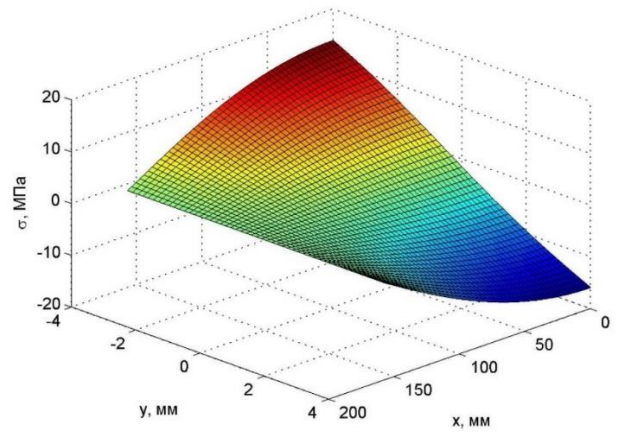


Рисунок 2.36 – Изменение напряжений по сечению и длине при  $t = 130$  ч

***Решение методом конечных элементов в сочетании с методом Бубнова-Галеркина. Вариант закрепления стержня шарнир- шарнир.***

Континуальный метод Бубнова-Галеркина часто используется в сочетании с методом конечных элементов, при этом функции формы применяются в качестве базисных функций.

Для линейного конечного элемента прогиб в произвольной точке выражается через узловые перемещения  $V_i$  и  $V_j$  в виде:

$$v(x) = [N]\{V\} \quad (2.205)$$

где

$$[N] = [N_i \quad N_j] = \left[ \left(1 - \frac{x}{L}\right) \quad \frac{x}{L} \right]; \quad \{V\} = \begin{Bmatrix} V_i \\ V_j \end{Bmatrix}.$$

Первая производная соотношения (2.205) имеет вид:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{d[N]}{dx} \cdot \{V\} = \left[ -\frac{1}{L} \quad \frac{1}{L} \right] \cdot \begin{Bmatrix} V_i \\ V_j \end{Bmatrix}$$

Применение метода Бубнова-Галеркина к уравнению (2.111) приводит к условию:

$$\int_0^l [N]^T \left( \frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{F}{E(x)I(x)} v = -\frac{M_0}{E(x)I(x)} + \frac{b}{I(x)} \int_{-h/2}^{h/2} \varepsilon^* y dy \right) dx = 0$$

Интеграл по длине стержня приведем как сумму интегралов подлине каждого элемента:

$$\begin{aligned} & \int_0^l [N]^T \left( \frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{F}{E(x)I(x)} v = -\frac{M_0}{E(x)I(x)} + \frac{b}{I(x)} \int_{-h/2}^{h/2} \varepsilon^* y dy \right) dx = \\ & = \sum_{e=1}^m \int_{L^{(e)}} [N^{(e)}]^T \left( \frac{d^2 v^{(e)}}{dx^2} + \frac{F}{E(x)I(x)} v^{(e)} + \frac{M_0^{(e)}}{E(x)I(x)} - \frac{1}{I(x)} \int_{A^{(e)}} \varepsilon^* y dA \right) dx \end{aligned} \quad (2.206)$$

Используя способ интегрирования по частям, понизим порядок в интеграле

$$\int_0^l [N^{(e)}]^T \frac{d^2 v^{(e)}}{dx^2} dx,$$

Тогда можно записать :

$$\int_{L^{(e)}} [N^{(e)}]^T \frac{d^2 v^{(e)}}{dx^2} dx = [N^{(e)}]^T \frac{dv^{(e)}}{dx} \Big|_0^{L^{(e)}} - \int_{L^{(e)}} \frac{d[N^{(e)}]^T}{dx} \frac{dv}{dx} dx \quad (2.207)$$

В первом слагаемом (2.207)  $(dv/dx)$  есть угол поворота сечения стержня и рассматривается закрепление балки «шарнир» – «шарнир», то сумма всех элементов первого члена по длине балки будет равна нулю, т. е.:

$$\sum_{e=1}^m \left( [N^{(e)}]^T \frac{dv^{(e)}}{dx} \Big|_0^{L^{(e)}} \right) = 0$$

С учетом выражения (2.205), имеем следующее соотношение:

$$\frac{d[N^{(e)}]^T}{dx} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix}$$

Тогда выражение (2.207) записывается [237]:

$$- \int_{L^{(e)}} \frac{d[N^{(e)}]^T}{dx} \frac{dv}{dx} dx = - \int_{L^{(e)}} \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} dx \{V\} = -\frac{1}{L^{(e)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_i \\ V_j \end{Bmatrix};$$

Подобным образом можно записать и другие члены выражения (2.206):

$$\begin{aligned} - \int_{L^{(e)}} [N^{(e)}]^T \frac{Fv^{(e)}}{EI} dx &= \frac{F}{EI} \int_{L^{(e)}} [N^{(e)}]^T [N^{(e)}] dx \{V\} = \frac{FL^{(e)}}{6EI} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} V_i \\ V_j \end{Bmatrix}; \\ - \int_{L^{(e)}} [N^{(e)}]^T \left( \frac{1}{I(x)} \int_{A^{(e)}} \varepsilon^* y dA \right) dx &= \frac{L^{(e)}}{2I} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \int_{A^{(e)}} \varepsilon^* y dA; \end{aligned}$$

Рассмотрим случай, когда стержень имеет начальное искривление

$$v_0(x) = f_0 \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right), \text{ то } M_0 = F \cdot v_0:$$

$$\int_{L^{(e)}} [N^{(e)}]^T \left( \frac{M_0^{(e)}}{EI} \right) dx = \frac{F \cdot f_0}{EI} \int_0^{L^{(e)}} \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L^{(e)}} \\ \frac{x}{L^{(e)}} \end{bmatrix} \sin \frac{\pi(x + X_i)}{l} dx$$

$$= \frac{F f_0}{EI} \cdot \frac{l}{\pi} \begin{bmatrix} \frac{l}{\pi L^{(e)}} \left( \sin \frac{\pi X_i}{l} - \sin \frac{\pi X_j}{l} \right) + \cos \frac{\pi X_j}{l} \\ \frac{l}{\pi L^{(e)}} \left( \sin \frac{\pi X_j}{l} - \sin \frac{\pi X_i}{l} \right) - \cos \frac{\pi X_j}{l} \end{bmatrix};$$

Окончательно условие (2.206) можно записать в виде:

$[K]\{V\} = \{P\}$ ,  $[K] = \sum_{e=1}^m [K]^{(e)}$  – матрица жесткости всего стержня

$$[K]^{(e)} = \frac{1}{L^{(e)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \frac{FL^{(e)}}{6EI} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - \text{локальная матрица жесткости всего стержня}$$

Если сила действует с эксцентриситетом, то вектор нагрузки записывается:

$$\{P\}^{(e)} = \frac{F \cdot e \cdot L^{(e)}}{2EI} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} - \frac{L^{(e)}}{2I} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \int_{A^{(e)}} \varepsilon^* y dA$$

Вектор нагрузки с начальным прогибом имеет вид:

$$\{P\}^{(e)} = \frac{F f_0}{EI} \cdot \frac{l}{\pi} \begin{bmatrix} \frac{l}{\pi L^{(e)}} \left( \sin \frac{\pi X_i}{l} - \sin \frac{\pi X_j}{l} \right) + \cos \frac{\pi X_j}{l} \\ \frac{l}{\pi L^{(e)}} \left( \sin \frac{\pi X_j}{l} - \sin \frac{\pi X_i}{l} \right) - \cos \frac{\pi X_j}{l} \end{bmatrix} - \frac{L^{(e)}}{2I} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \int_{A^{(e)}} \varepsilon^* y dA$$

### ***Сравнение решений, полученных МКР и численно-аналитическим методом Бубнова-Галеркина***

Ниже приводятся сравнения результатов расчёта с помощью метода Бубнова-Галеркина с МКР. Результаты расчёта представлены на рисунке 2.44 и 2.45.

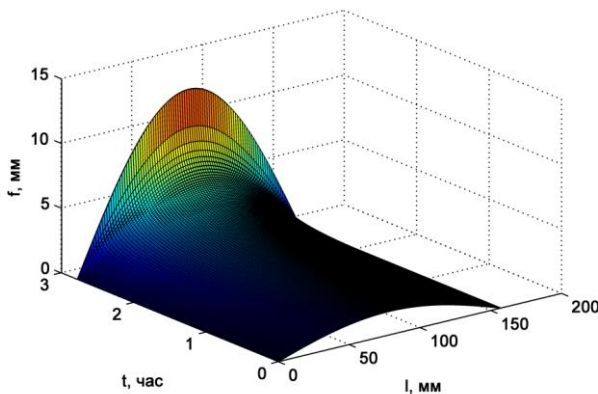


Рисунок 2.37 – Зависимость роста стрелы  $f(x)$  прогиба от времени

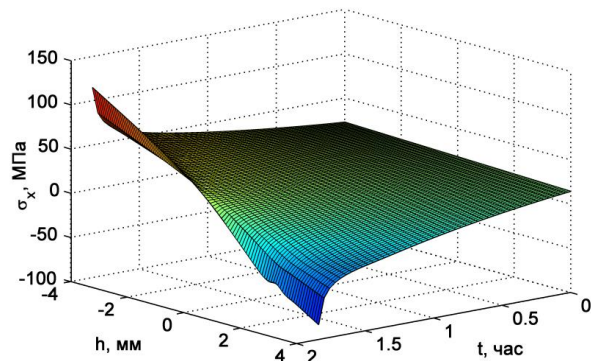


Рисунок 2.38 – Распределения напряжений  $\sigma_x(x)$  по высоте  $h$  в сечении, расположенном на расстоянии  $x = l/2$



Сравнение результатов расчёта с работами И. И. Кулинича [28] и академика В. И. Андреева [79] при начальном эксцентриситете  $e$  и, соответственно,  $M_0 = Fe$ , представлено в таблице 2.10.

Таблица 2.10 – Сравнение решения автора (метод Б-Г) с результатами других авторов

у, мм	t = 50 мин			t = 100 мин			t = 150 мин		
	Метод МКЭ	Метод МКР	Метод Б-Г	Метод МКЭ	Метод МКР	Метод Б-Г	Метод МКЭ	Метод МКР	Метод Б-Г
	$\sigma_{Кул},$ МПа	$\sigma_{Анд},$ МПа	$\sigma_{Авт},$ МПа	$\sigma_{Кул},$ МПа	$\sigma_{Анд},$ МПа	$\sigma_{Авт},$ МПа	$\sigma_{Кул},$ МПа	$\sigma_{Анд},$ МПа	$\sigma_{Авт},$ МПа
-4	16,000	16,002	15,980	19,310	19,800	19,290	34,893	31,632	34,610
-2	11,150	11,150	11,148	13,311	13,586	13,295	22,895	21,134	22,732
0	5,780	5,780	5,780	5,982	6,010	5,982	6,692	6,680	6,672
2	-0,270	-0,274	-0,278	-1,946	-2,001	-1,733	-9,396	-9,189	-9,906
4	-5,325	-5,247	-5,237	-9,860	-10,00	-9,436	-23,88	-23,80	-23,97

## 2.5 Влияния температуры на устойчивость стержней переменной жесткости в условиях вязкоупругости

В настоящем разделе исследуется влияние температуры на количественные характеристики жестких сетчатых полимеров эпоксидного типа (ЭДТ-10) используемых в качестве связующих для стеклопластиков и линейной структуры полимеров (ППМА).

Известно, что влияние температурного поля на физико-механические и релаксационные параметры полимеров сказывается на устойчивости стержней далеко не самым лучшим образом, следовательно, расчет полимерных конструкций строительного назначения на устойчивость не может обходиться без учета данного фактора [83].

Исследование влияния температуры на упругие и релаксационные характеристики полимеров было проведено А. Л. Рабиновичем, В. Ф. Бабичем, Р.А. Турусовым, В.И Андреевым и др. [27,84,85,86, 149].

Зависимость от температуры релаксационных констант для полиметилметакрилата ПММА с одним спектром врем релаксации имеют вид:

$$E = -14T + 3220 \text{ [МПа];} \quad E_{\infty} = -30T + 3100 \text{ [МПа];} \quad \left. \begin{array}{l} T \text{ – в градусах} \\ \text{Цельсия.} \end{array} \right\}$$

$$m^* = -0.0135T + 4.8 \text{ [МПа];} \quad \eta_0^* = 36000 \exp\left(\frac{9500}{T + 273.15} - 20\right) \text{ [МПа] \cdot с,}$$

### 2.5.1 Устойчивость полимерных стержней при изменении температуры вдоль стержня и в поперечном сечении.

Зададим в виде линейного закона действие на стержень некоторого теплового потока:

$$T(x) = T_0 + k_0 x t, \quad (2.208)$$

где  $k_0$  – скорость роста температуры,  $\frac{\text{град}}{\text{мм}\cdot\text{ч}}$ .

**Задача 1 для стержня, закрепленного «защемление-защемление»**

Пусть стержень имеет начальную погибь, изменяющуюся по закону

$$v_0 = f_0 \sin^2 \frac{\pi x}{l}, \quad f_0 = 0,16 \text{ мм.}$$

Сечение постоянное.

Стержень из эпоксидного связующего ЭДТ-10. Геометрические параметры стержня:  $l = 157\text{мм}$ ,  $b_0 = 15\text{мм}$ ,  $h = 8\text{мм}$ ,  $F = 200\text{кг}$ . Закон изменения температуры линейный от  $T(0) = 20^\circ\text{C}$  до  $T(l) = 40^\circ\text{C}$  со скоростью роста температуры в течение одного часа. Интервал разбивка по координатам и времени  $N_x = N_y = N_t = 50$ . Время потери устойчивости  $t_{кр} = 6 \text{ ч } 36 \text{ мин}$ .

Сечение переменное.

Стержень из эпоксидного связующего ЭДТ-10. Геометрические параметры стержня:  $l = 157\text{мм}$ ,  $b_0 = 15\text{мм}$ ,  $b = b_0 \left(0,5 + 0,5 \cos^2 \frac{2\pi x}{l}\right)$ ,  $h = 8\text{мм}$ ,  $F = 200\text{кг}$ . Закон изменения температуры линейный от  $T(0) = 20^\circ\text{C}$  до  $T(l) = 40^\circ\text{C}$  со скоростью роста температуры в течение одного часа. Интервал разбивка по координатам и времени  $N_x = N_y = N_t = 50$ . Время потери устойчивости  $t_{кр} = 42 \text{ ч } 45 \text{ мин}$ .

Результаты расчета представлены на рисунках 2.39– 2.40.

**Задача 2 для стержня, закрепленного «защемление-свободный край»**

Зададим стержню начальную погибь, изменяющуюся по закону:

$$v_0 = f_0 \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2l}\right), \quad f_0 = 0,16 \text{ мм.}$$

Сечение постоянное.

Стержень из оргстекла полиметилметакрилата ПММА. Геометрические параметры стержня:  $l = 157\text{мм}$ ,  $d_0 = 15\text{мм}$ ,  $h = 8\text{мм}$ ,  $F = 70\text{кг}$ . Закон изменения температуры линейный от  $T(0) = 20^\circ\text{C}$  до  $T(l) = 40^\circ\text{C}$  со скоростью роста температуры в течение одного часа. Интервал разбивка по координатам и времени  $N_x = N_y = N_t = 50$ . Время потери устойчивости  $t_{кр} = 0 \text{ ч } 17 \text{ мин}$ .

Сечение переменное.

Стержень из эпоксидного связующего ЭДТ-10. Геометрические параметры стержня:  $l = 157\text{мм}$ ,  $d_0 = 15\text{мм}$ ,  $d = d_0 \left(1 - \frac{0,5x}{l}\right)$ ,  $F = 70\text{кг}$ . Закон изменения температуры линейный от  $T(0) = 20^\circ\text{C}$  до  $T(l) = 40^\circ\text{C}$  со скоростью роста температуры в течение одного часа. Интервал

разбивка по координатам и времени  $N_x = N_y = N_t = 50$ . Прогиб затухает и приближается к фиксированному значению и стало быть потеря устойчивости не происходит [83]. Графики роста прогиба и изменение напряжений по высоте стержня приведены на рисунках 2.41– 2.42.

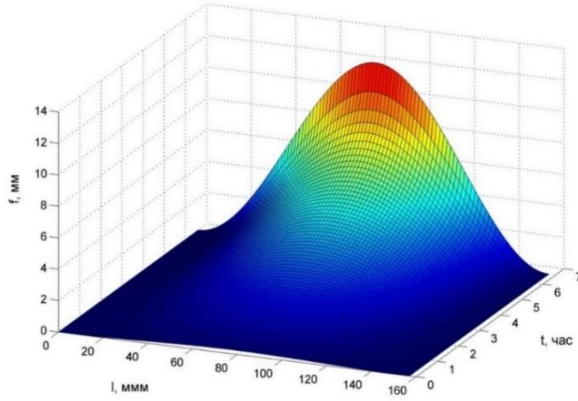


Рисунок 2.39а – Изменение максимального прогиба в середине пролета сечение постоянное

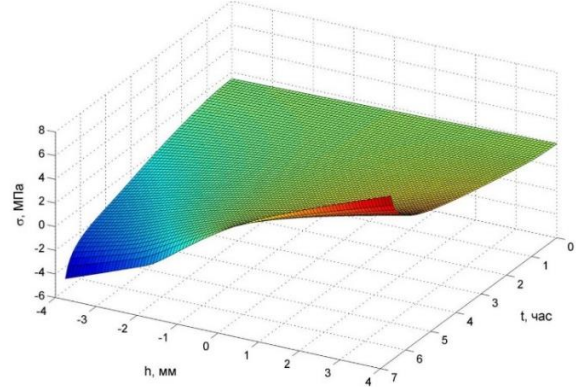


Рисунок 2.39б – Изменение  $\sigma_x$  с течением времени по высоте стержня сечение постоянное

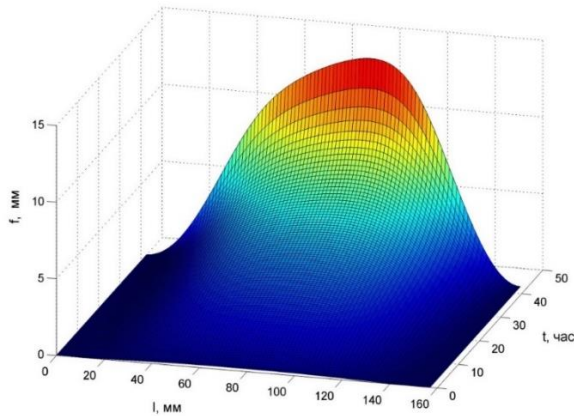


Рисунок 2.40а – Изменение максимального прогиба в середине пролета сечение переменное

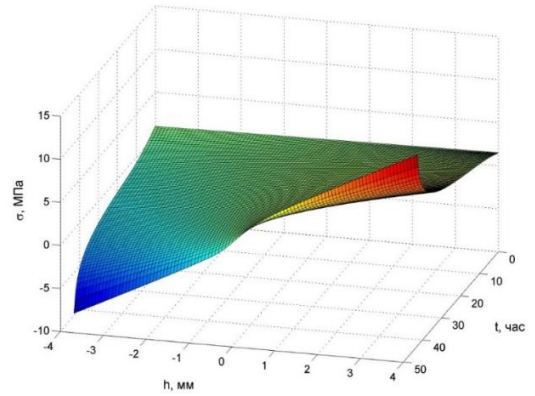


Рисунок 2.40б. – Изменение  $\sigma_x$  с течением времени по высоте стержня сечение переменное

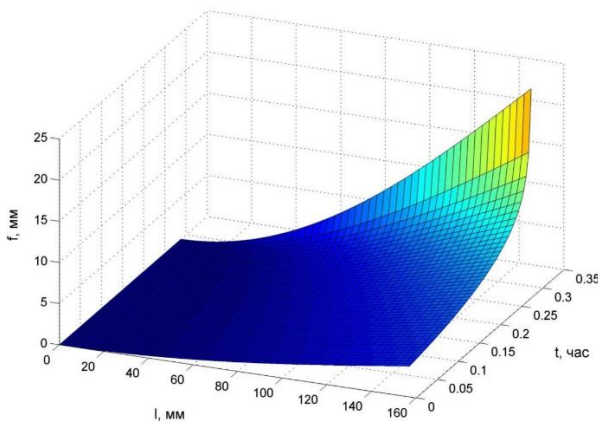


Рисунок 2.41а – Изменение максимального прогиба в середине пролета сечение постоянное

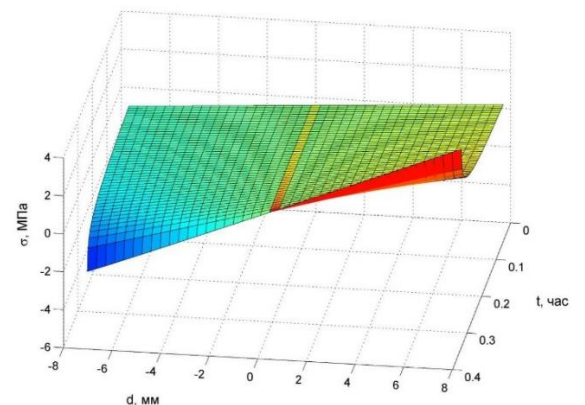


Рисунок 2.41б – Изменение  $\sigma_x$  с течением времени по высоте стержня сечение постоянное

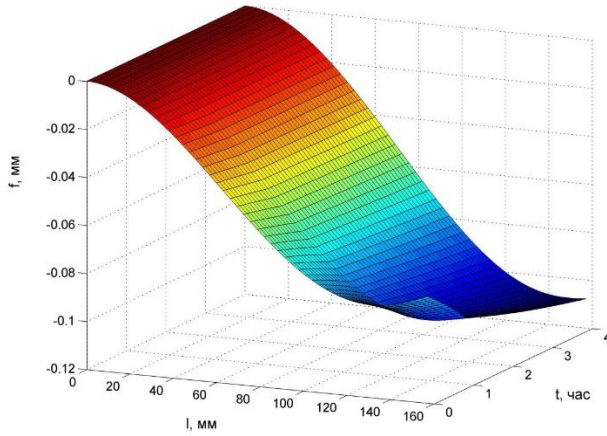


Рисунок 2.42а — Изменение максимального прогиба в середине пролета сечение переменное

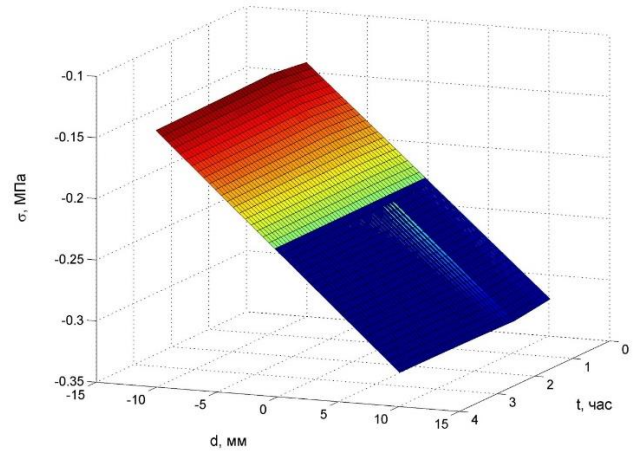


Рисунок 2.42б. — Изменение  $\sigma_x$  с течением времени по высоте стержня сечение переменное

### ***Устойчивость равномерно нагретого стержня***

Заменяем подвижную опору на неподвижную и рассмотрим вариант статически неопределимой системы (рисунок 2.43).

Равномерное нагревание стержня на величину  $\Delta T$  способствует появлению сжимающих напряжений, что в свою очередь влечет за собой процесс выпучивания.

Упругое решение без учета деформаций ползучести в работе [147] привел А.С. Вольмир. Интерес вызван тем, что потеря устойчивости предположительна в отсутствие каких-либо статических воздействий.

Осевая деформация  $\varepsilon_0$  есть первая вариация перемещения по длине стержня:

$$\varepsilon_0 = \frac{du}{dx}. \quad (2.209)$$

Граничные условия задачи предполагает равенство нулю перемещений концов стержня:

$$\int_0^l \frac{du}{dx} dx = 0. \quad (2.210)$$

Стало быть, можно ввести допущение, что осевая деформация по длине стержня  $\varepsilon_0 = 0$ .

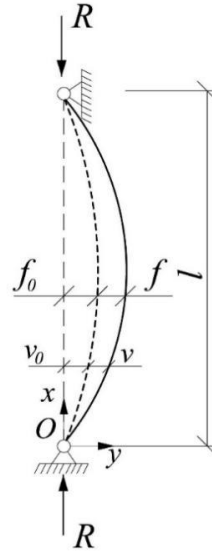


Рисунок 2.43 – Расчетная схема

В соответствии с этим допущением в виду равенства нулю осевых деформаций, соответствующие осевые напряжения связаны с полной деформацией соотношением:

$$\sigma = E\left(-y \frac{d^2 v}{dx^2} - \varepsilon^* - \varepsilon_T\right) \quad (2.211)$$

Интегральную связь реакции  $R$  в опорах с напряжением (2.211) можно записать:

$$R = - \int_A \sigma dA = -E \int_A \left(-y \frac{d^2 v}{dx^2} - \varepsilon^* - \varepsilon_T\right) dA = E \left( A\alpha\Delta T - \int_A \varepsilon^* dA \right). \quad (2.212)$$

Так как деформации ползучести с течением времени возрастают, из соотношения (2.212) можно сделать вывод, реакции опор функционально зависят от времени, что приводит их к убыванию.

Как и ранее, интегральная связь между изгибающим моментом, создаваемые реакциями опор и нормальными напряжениями в стержне (2.211) имеет вид:

$$M = R(v + v_0) = \int_A \sigma y dA = E \int_A \left(-y \frac{d^2 v}{dx^2} - \varepsilon^* - \varepsilon_T\right) y dA = -EI \frac{d^2 v}{dx^2} - \int_A \varepsilon^* y dA. \quad (2.213)$$

Заметим, что сведенная к системе алгебраических уравнений имеет отличие от полученной ранее тем, статическая нагрузка заменяется на фиктивную переменную  $R$ , определяемую по формуле (2.212). Методика решения задачи аналогична, что была изложена ранее.

**Расчёт на устойчивость полимерных стержней при изменении температуры в поперечном сечении методом конечных элементов**

Зададим линейный закон изменения температуры (рисунок 2.44) от одной грани до другой по высоте поперечного сечения:

$$T(y) = ky + T_{cp}, \quad T_{cp} = T_1 + T_2, \quad k = \frac{T_2 - T_1}{h} \quad (2.214)$$

Будем считать, что упругие характеристики, в частности модуль Юнга, меняется тоже по линейному закону:

$$E(T) = E_0 + A \cdot T$$

или

$$E(y) = D \cdot y + E_{cp}$$

где

$$D = A \cdot k, \quad E_{cp} = E \Big|_{y=0} = A \cdot T_{cp} + E_0$$

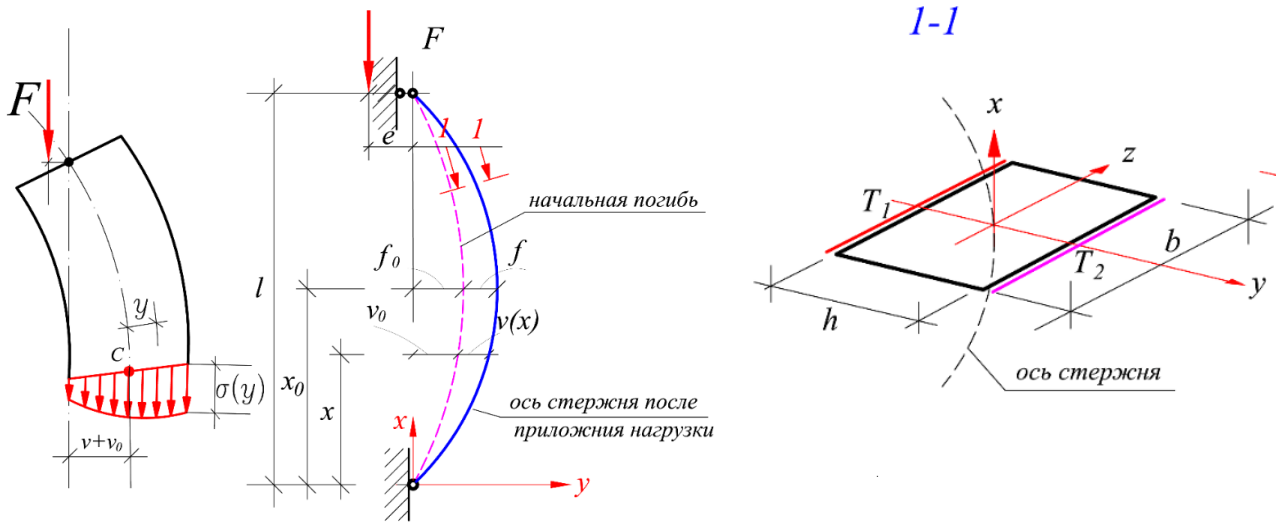


Рисунок 2.44 – Расчетная схема задачи для шарнирно опертого стержня, сжатый силой  $F$ .

Как и ранее, упругие деформации в стержне определяются выражением:

$$\varepsilon^{el} = \varepsilon_0 - y \frac{d^2v}{dx^2} - \alpha \Delta T - \varepsilon^*$$

где  $\varepsilon_0$  – осевые деформации стержня, которые определяются из интегрального соотношения:

$$F = b \int_{-h/2}^{h/2} \sigma dy = b \int_{-h/2}^{h/2} E(y) \left( \varepsilon_0 - y \frac{d^2v}{dx^2} - \alpha \Delta T - \varepsilon^* \right) dy$$

Выразим из последнего соотношения  $\varepsilon_0$ :

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{E_{cp}bh} \left[ F + Al \frac{T_2 - T_1}{h} \frac{d^2v}{dx^2} + b \int_{-h/2}^{h/2} E(y) \varepsilon^* dy + A\alpha l \left( \frac{T_2 - T_1}{h} \right)^2 \right]$$

Соотношение (2.149) для потенциальной энергии не измениться, а к выражению для работы внешних сил добавиться слагаемое  $F \cdot u_1$ :

$$A = F\Delta = \frac{1}{2}F \int_0^l \left[ \left( \frac{dv}{dx} \right)^2 + 2 \frac{dv}{dx} \frac{dv_0}{dx} \right] dx + F \cdot u_1 \quad (2.215)$$

здесь  $u_1$  – осевое перемещение.

Функцию прогибов в пределах стержневого элемента представим в виде кубического полинома:

$$v(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 = \{1 \quad x \quad x^2 \quad x^3\} \begin{Bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} = \{1 \quad x \quad x^2 \quad x^3\} \cdot [B] \cdot \{U\}$$

здесь

$$[B] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{L^2} & -\frac{2}{L} & 0 & \frac{3}{L^2} & -\frac{1}{L} & 0 \\ \frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} & 0 & -\frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} & 0 \end{bmatrix} \cdot \{U\}^T = \{v_i \quad \varphi_i \quad u_i \quad v_j \quad \varphi_j \quad u_j\}$$

Так как выражение для осевой деформации  $\varepsilon_0$  в случае температурного воздействия очень объёмное и зависит от функции прогиба, то минимизации функционала в 0 не обращается.

Введем для упрощения разрешающих уравнений в вектор узловых перемещений 3-ю степень свободы — перемещение  $u_i$  вдоль оси стержня:

$$u = \left(1 - \frac{x}{L}\right) U_i + \frac{x}{L} U_j; \quad \varepsilon_0 = \frac{du}{dx} = U_i + \frac{1}{L} U_j = [B^*] \{U\}, \quad \text{где } [B^*] = \left\{ 0 \quad 0 \quad -\frac{1}{L} \quad 0 \quad 0 \quad \frac{1}{L} \right\}$$

Минимизация полной энергии по узловым перемещениям приводит к системе линейных уравнений:

$$[K] \cdot \{U\} = \{P\}$$

где  $[K] = \sum_{e=1}^m [K]^{(e)}$

$$[K]^{(e)} = b \int_{-h/2}^{h/2} E(y) y^2 dy \begin{bmatrix} \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & 0 & -\frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & 0 \\ \frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} & 0 & -\frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} & 0 & \frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} & 0 \\ \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} & 0 & -\frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - F \cdot$$

$$\begin{bmatrix} \frac{6}{5L} & \frac{1}{10} & 0 & -\frac{6}{5L} & \frac{1}{10} & 0 \\ \frac{1}{10} & \frac{2L}{15} & 0 & -\frac{1}{10} & -\frac{L}{30} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{6}{5L} & -\frac{1}{10} & 0 & \frac{6}{5L} & -\frac{1}{10} & 0 \\ \frac{1}{10} & -\frac{L}{30} & 0 & -\frac{1}{10} & \frac{2L}{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + E_{cp} b h L^{(e)} [B^*]^T [B^*] + 2[B] \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2L \\ 3L^2 \end{Bmatrix}^T [B^*] A I \left( \frac{T_2 - T_1}{h} \right);$$

Интеграл в последнем выражении принимает вид:

$$b \int_{-h/2}^{h/2} E(y) y^2 dy = b \int_{-h/2}^{h/2} (Dy - E_{cp}) y^2 dy = b \left( E_{cp} \frac{y^3}{3} + D \frac{y^4}{4} \right) \Bigg|_{-h/2}^{h/2} = b E_{cp} \frac{b^3}{12} = E_{cp} I$$

Локальный вектор нагрузки:

$$[P]^{(e)} = [B]^T \cdot F \cdot f_0 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \sin \frac{\pi X_j}{l} - \sin \frac{\pi X_i}{l} \\ \frac{2l}{\pi} \left( \cos \frac{\pi X_j}{l} - \cos \frac{\pi X_i}{l} \right) + 2L \sin \frac{\pi X_j}{l} \\ \frac{6lL}{\pi} \cos \frac{\pi X_j}{l} + \frac{6l^2}{\pi^2} \left( \sin \frac{\pi X_i}{l} - \sin \frac{\pi X_j}{l} \right) + 3L^2 \sin \frac{\pi X_j}{l} \end{bmatrix} -$$

$$- \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} b \int_{-h/2}^{h/2} E(y) \varepsilon^* y dy + L^{(e)} [B^*]^T A \alpha \left( \frac{T_2 - T_1}{h} \right)^2 I + [B^*]^T L^{(e)} b \int_{-h/2}^{h/2} E(y) \varepsilon^* d -$$

$$- \alpha E_{cp} I \left( \frac{T_2 - T_1}{h} \right) \{0 \quad -1 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0\}^T;$$

### Тестовые задачи для стержня, закрепленного «шарнир-шарнир»

Стержень из эпоксидного связующего ЭДТ-10. Геометрические параметры стержня:  $b = 15\text{мм}$ ,  $h = 8\text{мм}$ ,  $F = 65\text{кг}$ . Результаты расчета приведены на рисунках 2.45-2.47.

1) Начальные несовершенства температура на границах:

$$v_0(x) = f_0 \sin \frac{\pi x}{l}, \quad f_0 = 0.16 \text{ мм}, \quad T_1 = 20^\circ\text{C} \quad T_2 = 40^\circ\text{C}$$

2) Начальные несовершенства и температура на границах:

$$v_0(x) = f_0 \sin \frac{\pi x}{l}, \quad f_0 = 0.16 \text{ мм}, \quad T_1 = 40^\circ\text{C} \quad T_2 = 20^\circ\text{C}$$

3) Начальные несовершенства отсутствуют и температура на границе:



$$v_0(x) = 0, \quad f_0 = 0 \text{ мм}, \quad T_1 = 20^\circ\text{C} \quad T_2 = 40^\circ\text{C}$$

Из графиков можно сделать вывод, что температура оказывает существенное влияние на процесс потери устойчивости. Так, критическое время: для случая а — 2 ч 36 мин, для случая б — 15 ч 42 мин, для случая в — 16 ч.

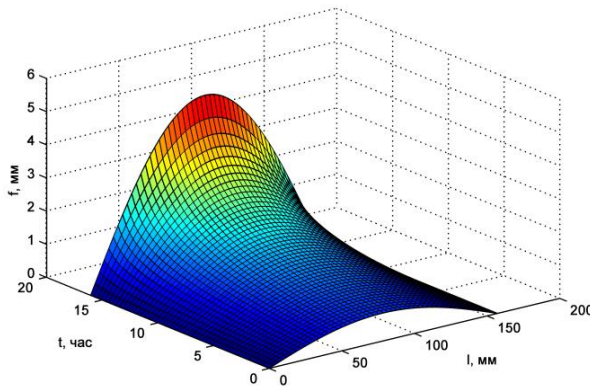
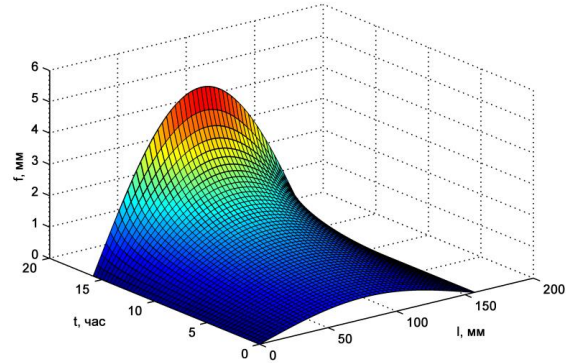
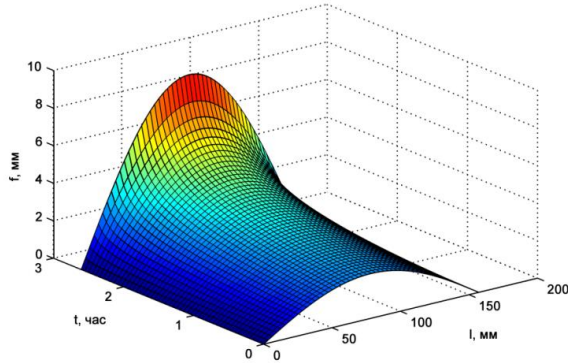


Рисунок 2.45-2.47. Эволюция роста прогибов в течении времени для различных температур. Критическое время:  
а — 2 ч 15 мин, б — 15 ч 29 мин  
в — 15,8 ч.

## 2.5.2 Учет дискретного спектра времен релаксации стержня из полиэтилена высокой плотности

При решении задач устойчивости стержней из сшитых полимеров и описание механического поведения необходимо учитывать наличие спектра времен релаксации. Разумеется, как сам факт наличия спектра, так и определение его «широты», т. е. различия между значениями параметров его составляющих с максимальным и минимальным временами релаксации для данных условий опыта, устанавливаются только путем сопоставления результатов теоретического анализа и данных опыта.

Было проведено исследование влияния дискретности спектра времен релаксации на примере стержня из полиэтилена высокой плотности (ПЭВП) [248,88,89].

### Задача 1.

На рисунке 2.56 представлена расчетная схема с начальными несовершенствами в виде начальной погиби  $f_0 = 0.16$  мм. Сечение стержня квадратной формы размерами  $1 \times 1$  см, длиной  $l = 15,8$  см

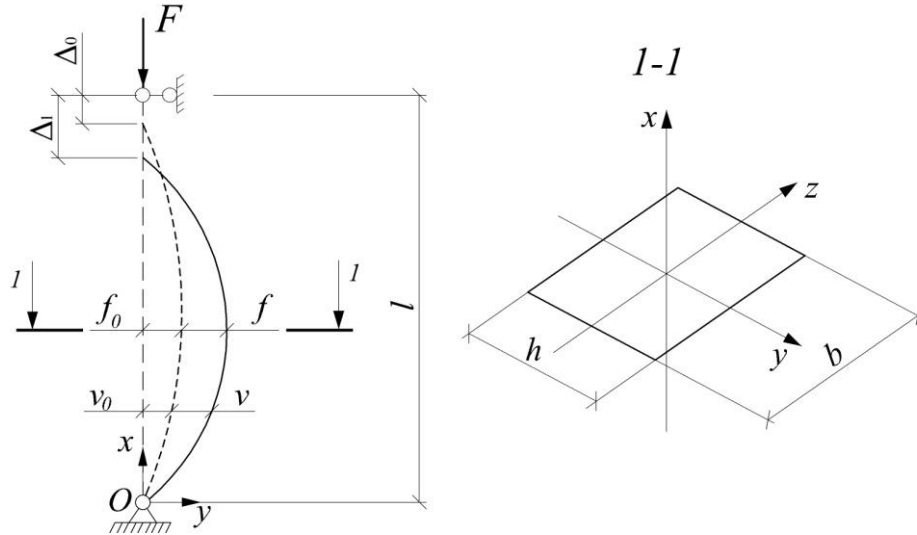


Рисунок 2.56. Расчетная схема и сечение стержня

Кривая роста стрелы прогиба при  $F = 50$  Н. приведено на рисунке 2.57. Штриховой линии соответствует решение с учетом одного спектра времен релаксации [174], сплошной линии – с учетом двух спектров времен релаксации.

Из приведенного графика видно, что характер кривых роста прогиба существенно отличается: при учете только одного спектра прогиб растет с постоянной скоростью [174], а с учетом двух спектров скорость роста стрелы прогиба затухает. Отличается также и величина длительной критической силы. При расчете с учетом одного спектра  $F_{дл,1} = 46.7$  Н, а с учетом двух спектров:  $F_{дл,2} = 56.1$  Н.

Таблица 2.11 – Упругие и релаксационные параметры ПЭВП [88,89]

$\nu_{\varepsilon_x} = 5 \cdot 10^{-3} c^{-1}$	Упругие и релаксационные константы с одним членом спектра времен релаксации					Релаксационные константы с двумя членами спектра времен релаксации				
	$E_{\text{эфф}}$ (МПа)	$m^*$ (МПа)	$E_{\infty}$ (МПа)	$\eta_0^*$ (МПа) $\cdot 10^7$	$\zeta_{s,\text{max}}^*$ (МПа $\cdot c$ )	$E_{\infty,1}$ (МПа)	$E_{\infty,2}$ (МПа)	$\eta_{0,1}^*$ (МПа) $\cdot 10^7$	$\eta_{0,2}^*$ (МПа) $\cdot 10^7$	$\zeta_{s,\text{max}}^*$ (МПа $\cdot c$ )
55,0	750	1,89	171,6	9,7	1,0	9000	285,0	1,3	10	1,015
6,0	5700	30,5	1856	5,0	7,3	9000	535,0	1,1	5,35	0,725

Для контроля достоверности результатов выполнялся расчет с использованием одночленного варианта уравнения Максвелла-Гуревича в программном комплексе ANSYS (рисунок 2.58).

Данный закон не входит в число 13 заложенных в ANSYS моделей ползучести. Для задания пользовательского закона использовалось расширение User Programmable Features. Процедура UserCreep.F, определяющая уравнение ползучести была написана на языке Fortran.

Отметим, что при создании данной процедуры есть определенные ограничения. Она должна содержать выражение для приращения деформации ползучести  $\Delta\varepsilon_x^*$  как функции от напряжения  $\sigma$  и деформации ползучести  $\varepsilon_x^*$ , которое задавалось следующим образом:

$$\Delta\varepsilon^* = \frac{\sigma - E_\infty\varepsilon^*}{\eta_0^*} \cdot \exp\left(\frac{|\sigma - E_\infty\varepsilon^*|}{m^*}\right) \cdot \Delta t. \quad (2.236)$$

Также в процедуре UserCreep.F задаются производные приращения деформации ползучести по напряжению и по деформации ползучести, которые определялись как:

$$\frac{d(\Delta\varepsilon^*)}{d\sigma} = \begin{cases} \frac{\Delta\varepsilon^*}{m^*} + \frac{1}{\eta_0^*} \exp\left(\frac{|\sigma - E_\infty\varepsilon^*|}{m^*}\right) \cdot \Delta t, & \text{если } \sigma - E_\infty\varepsilon^* \geq 0 \\ -\frac{\Delta\varepsilon^*}{m^*} + \frac{1}{\eta_0^*} \exp\left(\frac{|\sigma - E_\infty\varepsilon^*|}{m^*}\right) \cdot \Delta t, & \text{если } \sigma - E_\infty\varepsilon^* < 0. \end{cases} \quad (2.237)$$

$$\frac{d(\Delta\varepsilon^*)}{d\varepsilon^*} = \begin{cases} -\frac{E_\infty}{\eta_0^*} \exp\left(\frac{|\sigma - E_\infty\varepsilon^*|}{m^*}\right) \cdot \Delta t - \frac{E_\infty}{m^*} \Delta\varepsilon^*, & \text{если } \sigma - E_\infty\varepsilon^* \geq 0 \\ -\frac{E_\infty}{\eta_0^*} \exp\left(\frac{|\sigma - E_\infty\varepsilon^*|}{m^*}\right) \cdot \Delta t + \frac{E_\infty}{m^*} \Delta\varepsilon^*, & \text{если } \sigma - E_\infty\varepsilon^* < 0. \end{cases}$$

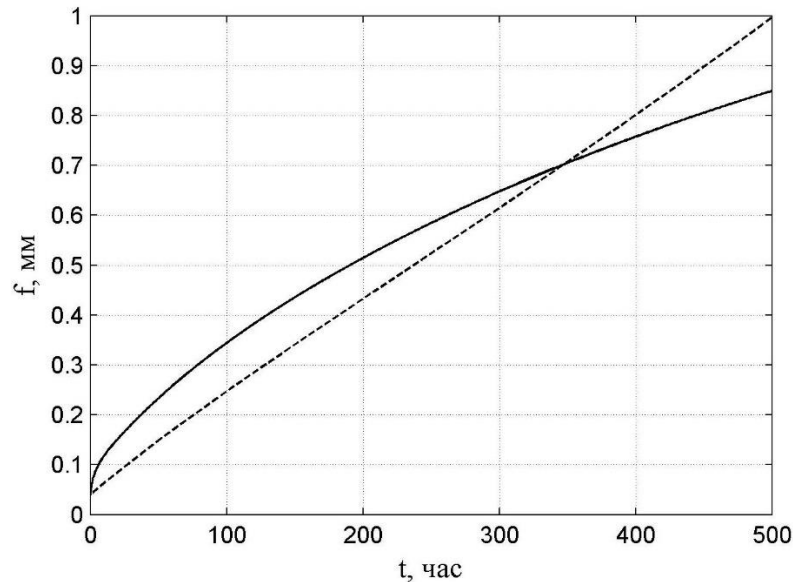


Рисунок 2.57 – Графики роста стрелы прогиба.

Указанные требования для процедуры UserCreep.F делают невозможным расчет с учетом двух членов спектра, поскольку невозможно записать в аналитическом виде выражение для производной по полной деформации ползучести  $\varepsilon^* = \varepsilon_1^* + \varepsilon_2^*$ .

На рисунке 2.59 показано сравнение максимальных прогибов, полученных по авторской методике и в программном комплексе ANSYS. До момента времени 350 ч результаты отличаются незначительно. Далее наблюдается небольшое отклонение, которое вероятно связано с тем, что для балочных конечных элементов в ANSYS используется гипотеза о линейном распределении напряжений по высоте сечения. На графике (рисунок 2.60) максимальных напряжений это отклонение более существенно. Отметим также, что пользовательский закон в ПК ANSYS задается только для одноосного состояния. Переход к трехосному состоянию выполняется для всех законов одинаково.

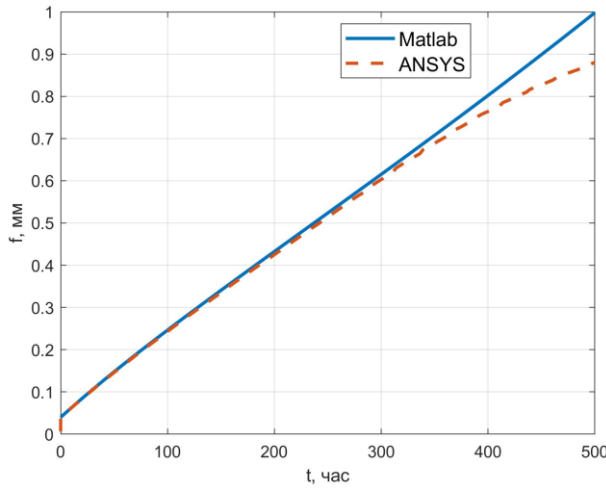


Рисунок 2.59. Сравнение максимальных перемещений в MatLab и ANSYS

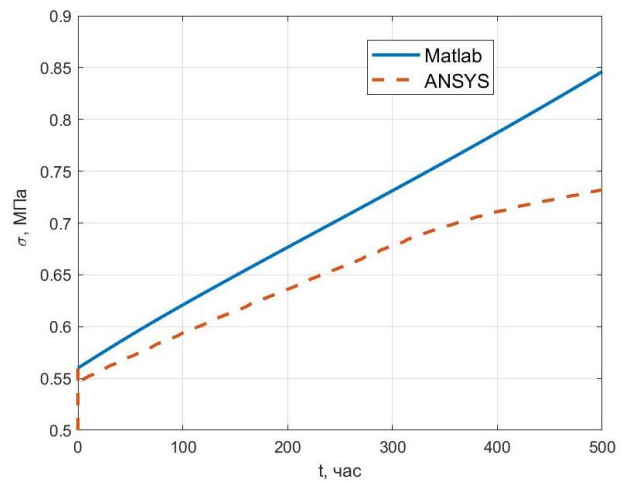


Рисунок 2.60. Изменение во времени максимальных напряжений

Для этого вычисляется эквивалентная упругая деформация по формуле:

$$\varepsilon_{et} = \frac{1}{\sqrt{2}(1+\nu)} \left[ (\varepsilon'_x - \varepsilon'_y)^2 + (\varepsilon'_y - \varepsilon'_z)^2 + (\varepsilon'_z - \varepsilon'_x)^2 + \frac{3}{2}(\gamma'_{xy})^2 + \frac{3}{2}(\gamma'_{yz})^2 + \frac{3}{2}(\gamma'_{zx})^2 \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (2.238)$$

Штрихом здесь обозначены упругие деформации. Затем вычисляется эквивалентное напряжение по формуле:

$$\sigma_e = E \varepsilon_{et}. \quad (2.239)$$

Далее по эквивалентному напряжению рассчитывается приращение эквивалентной деформации ползучести  $\Delta \varepsilon^*$ . Приращения осевых деформаций ползучести вычисляются по формулам:

$$\Delta \varepsilon_x^* = \frac{\Delta \varepsilon^*}{\varepsilon_{et}} \frac{2\varepsilon'_x - \varepsilon'_y - \varepsilon'_z}{2(1+\nu)}; \quad \Delta \varepsilon_y^* = \frac{\Delta \varepsilon^*}{\varepsilon_{et}} \frac{2\varepsilon'_y - \varepsilon'_z - \varepsilon'_x}{2(1+\nu)}; \quad \Delta \varepsilon_z^* = -\Delta \varepsilon_x^* - \Delta \varepsilon_y^*; \quad (2.240)$$

$$\Delta\gamma_{xy}^* = \frac{\Delta\varepsilon^*}{\varepsilon_{et}} \frac{3}{2(1+\nu)} \gamma'_{xy}; \quad \Delta\gamma_{xz}^* = \frac{\Delta\varepsilon^*}{\varepsilon_{et}} \frac{3}{2(1+\nu)} \gamma'_{xz}; \quad \Delta\gamma_{yz}^* = \frac{\Delta\varepsilon^*}{\varepsilon_{et}} \frac{3}{2(1+\nu)} \gamma'_{yz}.$$

Из формул (2.240) видно, что в ANSYS используется гипотеза о равенстве нулю объемной деформации ползучести. Кроме того, деформация ползучести в ANSYS принимается полностью необратимой, что характерно для металлов.

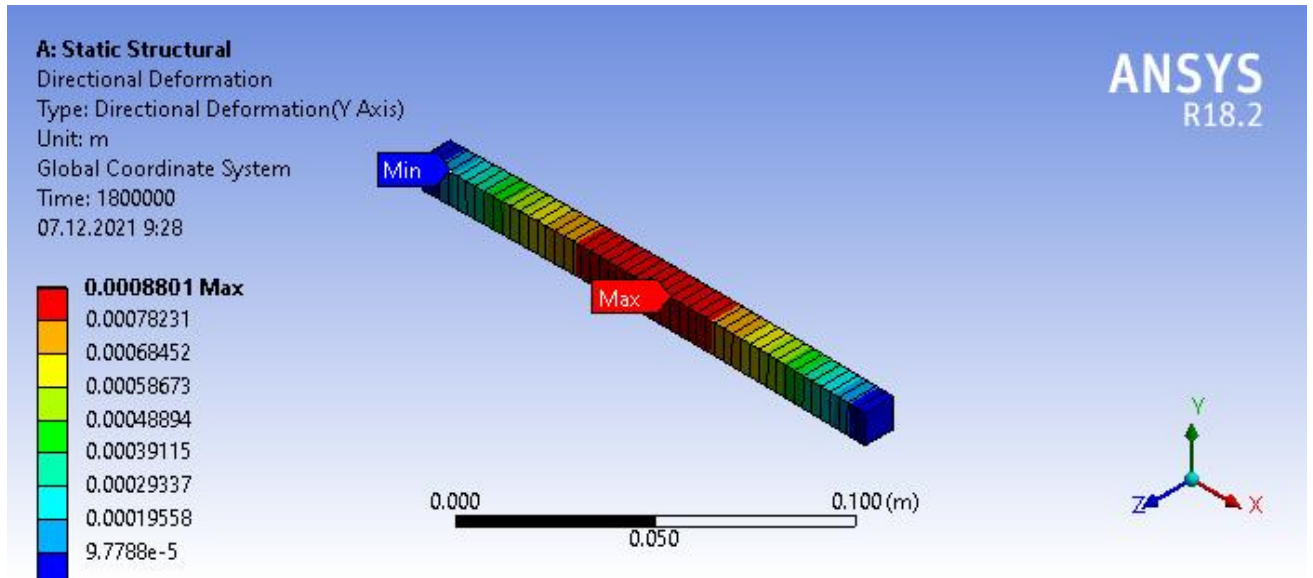


Рисунок 2.61. Модель стержня в ПК ANSYS

Однако для полимеров и бетонов имеется обратимая составляющая деформации ползучести. Также в ANSYS невозможно задать закон ползучести в интегральной форме. Таким образом, возможности использования пользовательского закона ползучести в данном программном комплексе сильно ограничены (рисунок 2.61) и расчет на устойчивость полимерных стержней необходимо вести с учетом как минимум двух спектров времен релаксации полимера.

## 2.6 Выводы по главе 2

Получены уравнения устойчивости стержней и полос постоянного и переменного поперечного сечения при сложном продольном и поперечном нагружении. Разработаны методики решения полученных уравнений с применением вычислительной техники.

В результате этого определена область устойчивости стержней и полос при одновременном действии двух силовых факторов. Получены расчетные формулы. Определены пределы применимости этих формул.

При исследовании устойчивости консольных стержней переменного поперечного сечения найден новый подход к использованию энергетического метода. В данном случае уравнение

изогнутой оси задается в виде полинома, включающего не только неопределенные коэффициенты, но и неопределенные показатели степеней.

Энергетический метод в данном случае позволил определить точные значения критической нагрузки при особом изменении поперечного сечения стержня и с учетом его собственного веса.

Разработанные методы намного проще классических методов решения уравнений такого типа и могут быть использованы в других областях механики.

Для сжатых полимерных стержней, подчиняющихся нелинейному уравнению Максвелла-Гуревича, разработана методика определения длительных критических нагрузок. Исследовано влияние дискретности спектра времен релаксации полимера. Показано существенное различие между кривыми роста прогиба при расчете с учетом одного и двух членов спектра.

Получены разрешающие уравнения и проведено исследование устойчивости стержней при ползучести с учетом температурных воздействий.

Изучено влияние изменения температуры стержня на величину длительной критической силы и критического времени. На время потери устойчивости оказывает сильное влияние релаксационная вязкость, которая от температуры зависит экспоненциально. Поэтому нагрузки, действующие на стержень не должны превышать длительную критическую.

### 3 ИЗГИБНО-КРУТИЛЬНАЯ ФОРМА ПОТЕРИ УСТОЙЧИВОСТИ ВЯЗКОУПРУГИХ СТЕРЖНЕЙ ПЕРЕМЕННОЙ ЖЕСТКОСТИ

#### 3.1 Устойчивость плоской формы изгиба тонкой полосы прямоугольного сечения

Рассмотрим консольную балку, к которой на свободном конце в центре тяжести сечения приложена сосредоточенная сила  $F$  (Рисунок 3.1). Жесткости в двух взаимно перпендикулярных плоскостях существенно отличаются. При попытке изогнуть такую балку в направлении большей жесткости, балка изгибается в направлении меньшей жесткости и поворачивается. При этом поперечные сечения поворачиваются относительно оси балки без искажения.

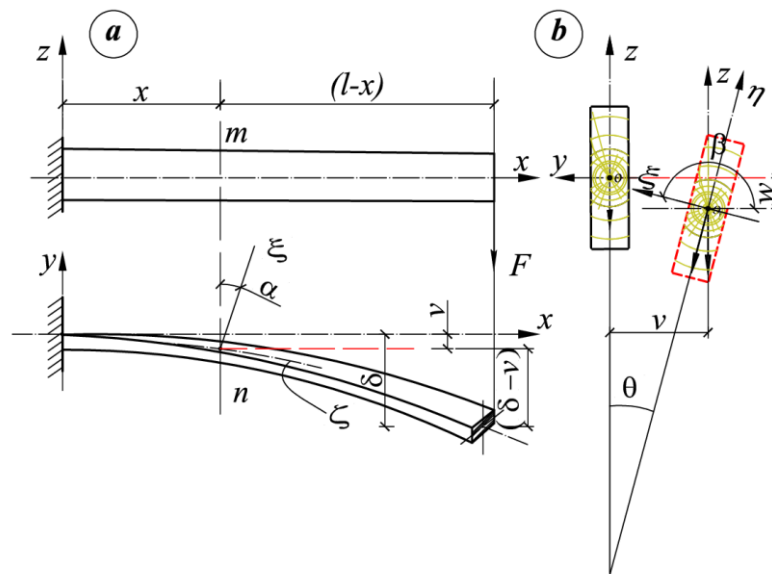


Рисунок 3.1 – Расчетная схема

При потере устойчивости произвольное сечение  $m - n$  получит смещение по вертикали  $w$ , по горизонтали  $v$  и повернется на угол  $\theta$ .

При составлении дифференциальных уравнений равновесия выпученной полосы, воспользуемся системой неподвижных координатных осей  $x, y, z$ , направленных как показано на рисунке 3.1.

Возьмем в центре произвольного сечения  $m - n$  полосы систему осей координат  $\xi, \eta, \zeta$  так, что  $\xi$  и  $\eta$  направлены по главным осям поперечного сечения, а  $\zeta$  – по касательной к центральной оси полосы после деформирования.

Деформация полосы определяется компонентами  $v$  и  $w$  смещения центра поперечного сечения в направлении  $x$  и  $y$ , а так же углом  $\theta$ , на который оно поворачивается. Примем положительные направления осей координат и положительными направления вращений те же соотношения, какие существуют между поступательным движением и вращением в винте с

правой нарезкой;  $\theta$  берется положительным при повороте оси  $x$  к оси  $y$ . Необходимые выражения для косинусов углов между осями координат  $\xi, \eta, \zeta$  и  $x, y, z$  примем по С.П. Тимошенко (таблица 1).

Таблица 3.1

Оси координат	$y$	$z$	$x$
$\xi$	1	$\theta$	$-dv/dx$
$\eta$	$-\theta$	1	$-dw/dx$
$\zeta$	$dv/dx$	$dw/dx$	1

Значения кривизн центральной оси полосы, показанной на рисунке 3.1 в плоскостях  $ux$  и  $zx$ , принимаю значения  $\frac{d^2v}{dx^2}$  и  $\frac{d^2w}{dx^2}$ . Угол закручивания на единицу длины центральной оси будет  $\frac{d\theta}{dx}$ . Дифференциальные уравнения равновесия при известных величинах кривизн и относительного угла закручивания имеют вид:

$$\begin{cases} EI_z \frac{d^2v}{dx^2} = M_\eta; \\ EI_y \frac{d^2w}{dx^2} = -M_\xi; \\ GI_k \frac{d\theta}{dx} = M_\zeta. \end{cases} \quad (3.1)$$

Примем систему неподвижных координатных осей  $x, y, z$  на левом конце балки (в заделке) и систему осей  $\xi, \eta$  и  $\zeta$  в произвольном сечении  $m-n$  консоли. Рассматривая часть консоли вправо от поперечного сечения  $m-n$  и определяя моменты от вертикальной нагрузки  $F$  относительно осей, параллельных  $x, y, z$ , проходящих через центр поперечного сечения, получим:

$$M_y(x) = F(l-x); \quad M_z = 0; \quad M_x(x) = -F(\delta-v); \quad (3.2)$$

Проектируя эти моменты на оси  $\xi, \eta$  и  $\zeta$  при помощи таблицы 3.1 косинусов имеем:

$$\begin{cases} M_\xi = F(l-x) + F(\delta-v) \frac{dv}{dx}; \\ M_\eta = -F(l-x)\theta + F(\delta-v) \frac{dw}{dx}; \\ M_\zeta = F(l-x) \frac{dv}{dx} - F(\delta-v); \end{cases}$$

Подставляя эти моменты в (3.1) и пренебрегая малыми величинами высшего порядка, получаем следующие уравнения:

$$\begin{cases} EI_z \frac{d^2v}{dx^2} = -F(l-x)\theta; \\ EI_y \frac{d^2w}{dx^2} = -F(l-x); \\ GI_k \frac{d\theta}{dx} = F(l-x) \frac{dv}{dx} - F(\delta + a\theta - v). \end{cases} \quad (3.3)$$



Продифференцируем третье уравнение (3.3) по  $x$  и исключая при помощи первого уравнения (3.3)  $\frac{d^2v}{dx^2}$ , получим для определения  $\theta$  следующее уравнение:

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} + \frac{d(GI_k)}{dx} \frac{1}{GI_k} \frac{d\theta}{dx} + \frac{(M_y(x))^2}{GI_k EI_z} \theta = 0. \quad (3.4)$$

В уравнении (3.4) было допущено, что нагрузка  $F$  приложена в центре тяжести поперечного сечения. Для учета переменной жесткости и точки приложения силы вдоль оси  $z$  представим, проведя вышеприведенные выкладки:

$$\frac{d^2\theta}{dx^2} + \frac{1}{GI_k} \frac{d\theta}{dx} \left( \frac{d(GI_k)}{dx} + Fa \right) + \frac{(M_y(x))^2}{GI_k EI_z} \theta = 0 \quad (3.5)$$

При постоянной жесткости  $GI_k = const$  и  $a = 0$  приближенная формула для определения критической нагрузки может быть представлена в виде [91]:

$$F_{кр} = \frac{4,013\sqrt{EI_z GI_k}}{l^2} \left( 1 - \frac{a}{l} \sqrt{\frac{EI_z}{GI_k}} \right) \quad (3.6)$$

Отсюда видно, что приложение нагрузки выше центра тяжести сечения уменьшает ее критическое значение. Соотношение (3.6) может быть использовано если нагрузка приложена ниже центра тяжести, с той лишь разницей, что знак параметра  $a$  будет взят с обратным знаком.

Если вместо сосредоточенной силы, действует распределенная нагрузка интенсивностью  $q$  вдоль оси полосы, то уравнение (3.5) будет иметь вид:

$$GI_k \frac{d^2\theta}{dx^2} + \frac{1}{GI_k} \frac{d\theta}{dx} \left( \frac{d(GI_k)}{dx} + qa \right) + \left( \frac{M_y^2}{EI_z} \right) \theta = 0, \quad (3.7)$$

а критическое значение этой нагрузки при постоянной жесткости  $GI_k = const$  и  $a = 0$ :

$$(ql)_{кр} = \frac{12,85\sqrt{EI_z GI_k}}{l^2}; \quad (3.8)$$

Во всех случаях критическое значение всей нагрузки можно представить формулой

$$Q_{кр} = \frac{K_i \sqrt{EI_z GI_k}}{l^2} \quad K_F = 4,013 \quad K_q = 12,85$$

где числовые значения коэффициента  $K$  зависит от рода нагрузки.

### 3.1.1 Энергетический метод в расчетах изгибно-крутильной формы потери устойчивости консольной полосы с учетом собственного веса

Для определения  $Q_{кр}$  в уравнении (3.8) С.П. Тимошенко [91] предложил приближенный энергетический метод. Вариант метода, предложенного С.П. Тимошенко, предполагает определение критической нагрузки из условия, при котором работа внешних сил равна потенциальной энергии поперечного изгиба и кручения полосы. Потенциальная энергия

деформации выражается через угол закручивания, а затем функция угла закручивания находится в форме тригонометрического ряда.

Форма энергетического метода, предложенная С.П. Тимошенко [91] для решения задачи, не очень удобна для машинной реализации и при числе членов ряд больше двух требует громоздких выкладок. Вместо условия равенства потенциальной энергии деформации и работы внешних сил, воспользуемся вариационным принципом Лагранжа.

Метод расчета будет продемонстрирован на примере консольной балки под действием нагрузки в виде сосредоточенной силы, действующей совместно с собственным весом балки (рисунки 3.2).

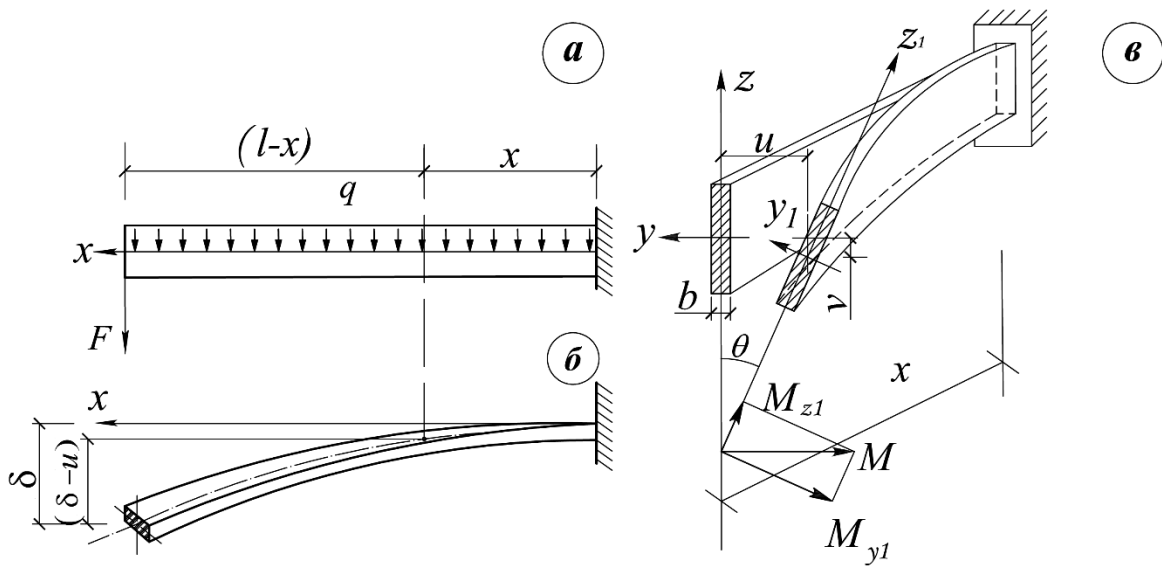


Рисунок 3.2 – Расчетная схема задачи

Рассмотрим два случая: **1.  $F = 0$ ;  $q \neq 0$**

**2.  $q = 0$ ;  $F \neq 0$ ;**

Введем безразмерную координату  $\xi = x/l$ . Начало координат в заделке. Изгибающий момент в балке определяется по формуле:

**1.  $F = 0$ ;  $q \neq 0$**

$$M_y(x) = -\frac{ql^2}{2} + qlx - \frac{qx^2}{2} = \frac{ql^2}{2}(-1 + 2\xi - \xi^2) = ql^2 \bar{M}(\xi)$$

где

$$\bar{M}(\xi) = \frac{(-1 + 2\xi - \xi^2)}{2} \quad (3.9)$$

**2.  $q = 0$ ;  $F \neq 0$ ;**

$$M_y(x) = F(l - x) = Fl(1 - \xi) = Fl \bar{M}(\xi)$$

где

$$\bar{M}(\xi) = (1 - \xi);$$

Первая производная функции  $\theta(x)$  запишется в виде:

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{d\theta}{d\xi} \frac{d}{dx} \left( \frac{x}{l} \right) = \frac{1}{l} \frac{d\theta}{d\xi}.$$

Аналогично для второй производной получим:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\theta}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \left( \frac{d\theta}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{l} \frac{d\theta}{d\xi} \right) = \frac{1}{l} \frac{d\theta}{d\xi} \frac{d}{dx} = \frac{1}{l} \frac{d\theta}{d\xi} \frac{1}{l} \frac{d}{d\xi}; \\ \frac{d^2\theta}{dx^2} &= \frac{1}{l^2} \frac{d^2\theta}{d\xi^2}. \end{aligned}$$

Определим критическую нагрузку из условия минимума полной энергии  $U$ .

Функционал Лагранжа, представляющий разность между потенциальной энергией деформации и работой внешних сил, запишется в виде:

$$U = W - A \quad (3.10)$$

где  $W$  - потенциальная энергия деформации, а  $A$  - работа внешних сил.

Значения  $W$  и  $A$  для балки с постоянной жесткостью при приложении нагрузки в центре тяжести поперечного сечения имеют вид:

$$W = \frac{1}{2} \left( EI_z \int_0^l \left( \frac{d^2v}{dx^2} \right)^2 dx + GI_k \int_0^l \left( \frac{d\theta}{dx} \right)^2 dx \right) \quad (3.11)$$

$$A = \int_0^l M_y \theta \frac{d^2v}{dx^2} dx \quad (3.12)$$

где  $v$  - боковое отклонение балки,  $EI_z$  — жесткость на изгиб в плоскости наименьшей жесткости,  $GI_k$  — жесткость на кручение.

Первое уравнение (3.1) можно записать:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = - \frac{M_y \theta}{EI_z}. \quad (3.13)$$

Тогда

$$A = \int_0^l \frac{M_y^2 \theta^2}{EI_z} dx \quad (3.14)$$

Подставляя (3.13) и (3.14) в (3.11) и (3.12), получаем:

$$U = \frac{1}{2} \left( GI_k \int_0^l \left( \frac{d\theta}{dx} \right)^2 dx + EI_z \int_0^l \frac{M_y^2 \theta^2}{(EI_z)^2} dx \right) - \int_0^l \frac{M_y^2 \theta^2}{EI_z} dx$$

$$U = \frac{1}{2} \left( GI_k \int_0^l \left( \frac{d\theta}{dx} \right)^2 dx - \int_0^l \frac{M_y^2 \theta^2}{EI_z} dx \right); \quad (3.15)$$

В безразмерных величинах:

$$U = \frac{1}{2} \left( \frac{GI_k}{l^2} \int_0^1 \left( \frac{d\theta}{d\xi} \right)^2 d\xi - \frac{q^2 l^4}{EI_z} \int_0^1 (\overline{M})^2 \theta^2 d\xi \right); \quad \text{умножим на } \frac{2l^2}{GI_k}$$

$$U = \int_0^1 \left( \frac{d\theta}{d\xi} \right)^2 d\xi - \lambda \int_0^1 \overline{M}^2 \theta^2 d\xi$$

где

$$\lambda = \frac{q^2 l^6}{GI_k EI_z}, \quad \overline{M}(\xi) = \frac{M_y(\xi)}{ql^2} = \frac{(-1 + 2\xi - \xi^2)}{2}$$

Функцию угла закручивания представим в виде ряда:

$$\theta(\xi) = \sum_{i=1}^n a_i f_i \quad i = 1, 3, 5, \dots, n. \quad (3.16)$$

где  $a_i$  — неопределенные коэффициенты,  $f_i$  — базисные функции, которые должны удовлетворять граничным условиям.

Для рассматриваемой задачи граничные условия имеют вид:

$$\theta(0) = 0; \quad \left. \frac{d\theta}{d\xi} \right|_{\xi=1} = 0; \quad (3.17)$$

Ранее в работе [91] в качестве базисной функции была использована

$f_i = 1 - \cos\left(\frac{\pi i \xi}{2}\right)$  и показала плохую сходимость. Рассмотрим в качестве базисной функции

$$f_i = \sin\left(\frac{\pi i \xi}{2}\right) \quad (3.18)$$

Определим частные производные функции  $\theta(\xi)$  выражения (3.16):

$$\frac{\partial \theta}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial f_i}{\partial \xi};$$

$$\frac{\partial}{\partial a_j} \left( \left( \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right)^2 \right) = 2 \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial a_j} \left( \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right) = 2 \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial f_i}{\partial \xi} \frac{\partial f_j}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial}{\partial a_j} (\theta^2) = 2\theta \frac{\partial \theta}{\partial a_j} = 2 \sum_{i=1}^n a_i f_i f_j$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^n \pi i a_i \cos \pi i \xi; \quad \frac{\partial}{\partial a_j} \left( \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right) = \pi j \cos(\pi j \xi); \quad \frac{\partial \theta}{\partial a_j} = \sin(\pi j \xi);$$

$$\frac{\partial}{\partial a_j} \int_0^1 \left( \frac{\partial \theta}{\partial \xi} \right)^2 d\xi = 2 \sum_{i=1}^n a_i \int_0^1 \pi^2 ij \cos(\pi i \xi) \cos(\pi j \xi) d\xi;$$

Минимизация функционала  $U$  осуществляется коэффициентами ряда (3.16):

$$\frac{\partial U}{\partial a_j} = 0, \quad j = 1 \dots n$$

$$\sum_{i=1}^n a_i \int_0^1 \frac{\partial f_i}{\partial \xi} \frac{\partial f_j}{\partial \xi} d\xi - \lambda \sum_{i=1}^n a_i \int_0^1 f_i f_j (\overline{M}(\xi))^2 d\xi = 0 \quad (3.19)$$

Выражение (3.19) будет эквивалентно следующему матричному выражению:

$$([A] - \lambda[B])\{X\} = 0; \quad (3.20)$$

где вектор неизвестных коэффициентов, элементы матриц  $[A]$  и  $[B]$  рассчитываются по формулам:

$$A_{ij} = \int_0^1 \frac{\partial f_i}{\partial \xi} \frac{\partial f_j}{\partial \xi} d\xi; \quad B_{ij} = \int_0^1 f_i f_j (\overline{M}(\xi))^2 d\xi; \quad (3.21)$$

### 1. $F = 0; \quad q \neq 0$

После подстановки (3.18) в (3.21), получим:

$$A_{ij} = \int_0^1 \frac{\partial f_i}{\partial \xi} \frac{\partial f_j}{\partial \xi} d\xi = \frac{\pi^2 ij}{4} \int_0^1 \frac{\sin(\pi i \xi)}{2} \frac{\sin(\pi j \xi)}{2} d\xi = \begin{cases} \frac{\pi^2 ij}{8}, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (3.22)$$

$$B_{ii} = \frac{\pi^4 i^4 - 20\pi^2 i^2 + 120}{40\pi^4 i^4};$$

$$B_{ij} = \int_0^1 f_i f_j (\overline{M}(\xi))^2 d\xi = \int_0^1 f_i f_j \left[ \frac{(-1 + 2\xi - \xi^2)}{2} \right]^2 d\xi; \quad (3.23)$$

Интегрирование в формуле (3.23) для функций (3.18) выполняется численно.

Критическая нагрузка вычисляется из условия равенства нулю определителя системы (3.20):

$$|[A] - \lambda[B]| = 0 \quad (3.24)$$

Таким образом, задача сводится к обобщенному вековому уравнению.

В таблице 3.2 представлены значения коэффициента  $K = \sqrt{\lambda_{min}}$  при различном числе членов ряда. Сходимость ряда приведена на рисунке 3.3. Критическая нагрузка определяется по формуле:

$$(ql)_{кр} = \frac{K \sqrt{EI_z GI_k}}{l^2}$$

Таблица 3.2 – Величины коэффициента  $K$  при различном числе членов ряда для консольной балки при  $F = 0$ ,  $f_i = \sin\left(\frac{\pi i \xi}{2}\right)$

$n$	1	2	3	4	5
$K$	15,4966	13,2341	12,9081	12,8633	12,8589
$n$	6	7	8	9	10
$K$	12,8544	12,8540	12,8539	12,8538	12,8538

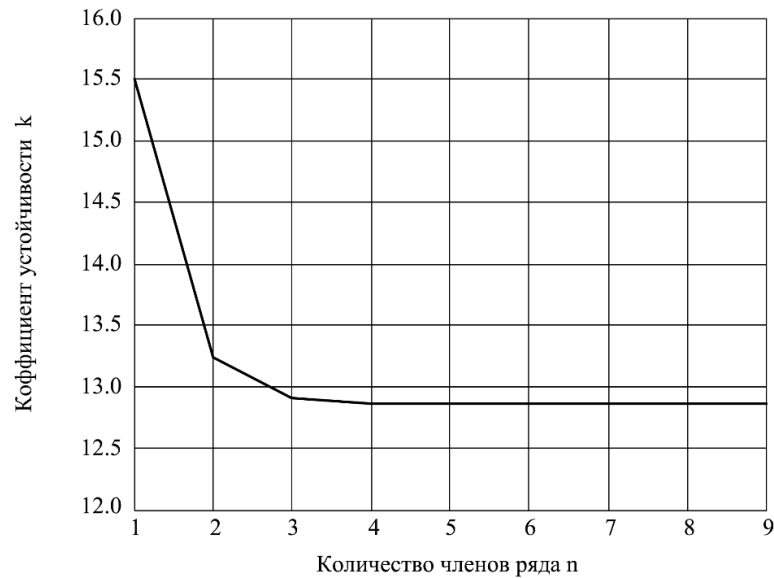


Рисунок 3.3 – Сходимость метода в зависимости от числа членов ряда при  $F = 0$ ,  $f_i = \sin\left(\frac{\pi i \xi}{2}\right)$

2.  $q = 0$ ;  $F \neq 0$ .

$$A_{ij} = \int_0^1 \frac{\partial f_i}{\partial \xi} \frac{\partial f_j}{\partial \xi} d\xi = \frac{\pi^2 ij}{4} \int_0^1 \frac{\sin(\pi i \xi)}{2} \frac{\sin(\pi j \xi)}{2} d\xi = \begin{cases} \frac{\pi^2 ij}{8}, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (3.25)$$

$$B_{ii} = \frac{\pi^2 i^2 - 6}{6\pi^2 i^2};$$

$$B_{ij} = \int_0^1 f_i f_j (\overline{M}(\xi))^2 d\xi = \int_0^1 f_i f_j (\xi - 1)^2 d\xi; \quad (3.26)$$

Интегрирование в формуле (3.25) для функций (3.26) выполняется численно.

Также для консольной балки функция угла закручивания может быть принята в виде степенного ряда []:

$$\theta(\xi) = \sum_{i=1,3,5..n}^n a_i \xi^{i+1} \quad (3.27)$$

В этом случае формулы для коэффициентов  $a_{ij}$  и  $b_{ij}$  принимают вид:

$$a_{ij} = \int_0^1 \frac{df_i}{d\xi} \frac{df_j}{d\xi} d\xi = \int_0^1 (i+1)\xi^i (j+1)\xi^j d\xi = \frac{(i+1)(j+1)}{i+j+1}$$

$$b_{ij} = \int_0^1 f_i f_j (1-\xi)^2 d\xi = \int_0^1 \xi^{i+1} \xi^{j+1} (1-\xi)^2 d\xi = \frac{1}{i+j+1} - \frac{2}{i+j+4} + \frac{1}{i+j+5}$$

Критическая нагрузка так же может быть вычислена по формуле:

$$F_{кр} = K \frac{\sqrt{EI_z GI_k}}{l^2}$$

Точное значение коэффициента  $K$  для консольной балки при приложении нагрузки в центре тяжести поперечного сечения составляет 4,013 [118].

В таблице 3.3 представлены значения коэффициента  $K$ , полученные энергетическим методом при различном числе членов ряда в случае аппроксимации угла закручивания  $\theta$  тригонометрическими и степенным рядом.

Таблица 3.3 – Величины коэффициента  $K$  при различном числе членов ряда для консольной балки при  $q = 0$ ,  $f_i = \sin\left(\frac{\pi i \xi}{2}\right)$

$n$ (число ряда)	1	2	3	4	5
$K(\text{автор}) f_i = \sin\left(\frac{\pi i \xi}{2}\right)$	4,345	4,023	4,0132	4,0127	4,0126
$K(\text{Тимошенко}) f_i = 1 - \cos\left(\frac{\pi i \xi}{2}\right)$	10,04	5,31	4,67	4,47	4,37
$K(\text{степенной ряд}) f_i = \xi^{i+1}$	11,83	5,77	4,65	4,35	4,24
$n$	6	7	8	9	10
$K(\text{автор}) f_i = \sin\left(\frac{\pi i \xi}{2}\right)$	4,0126	4,0126	4,0126	4,0126	4,0126
$K(\text{Тимошенко}) f_i = 1 - \cos\left(\frac{\pi i \xi}{2}\right)$	4,30	4,26	4,23	4,20	4,18
$K(\text{степенной ряд}) f_i = \xi^{i+1}$	4,18	4,14	4,11	4,09	4,08

Из таблицы 3.3 видно, что по сравнению с шарнирно опертой по концам балкой для консоли энергетический метод показывает гораздо худшую сходимость. Отклонение от точного решения при  $n = 10$  составляет 4,2% в случае использования тригонометрического ряда и 1,75% при использовании степенного ряда. Сходимость метода в зависимости от числа членов ряда при  $q = 0$  приведено на рисунке 3.4.

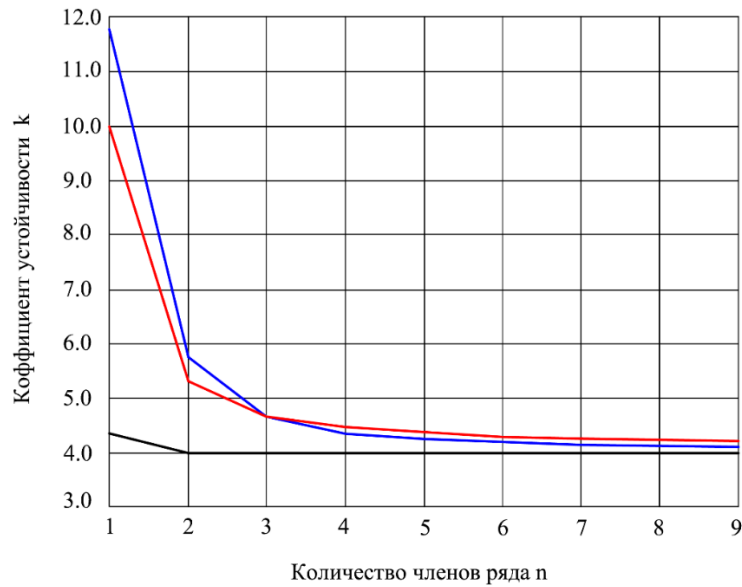


Рисунок 3.4 – Сходимость метода в зависимости от числа членов ряда при  $q = 0$  (синяя – степенной ряд, красная –  $f_i = 1 - \cos\left(\frac{\pi i \xi}{2}\right)$ , черная (автор) –  $f_i = \sin\left(\frac{\pi i \xi}{2}\right)$ )

Также при  $n \geq 12$  для степенного ряда наблюдалась потеря устойчивости вычислительного процесса (мнимые собственные значения). Для тригонометрического ряда при больших  $n$  вычислительный процесс был устойчив, но значение 4,013 с точностью до 3-го знака после запятой было получено лишь при 1000 членах ряда.

### 3.1.2 Боковое выпучивание призматических балок переменного поперечного сечения

В данном разделе рассматривается изгибно-крутильная форма потери устойчивости полосы переменного сечения по длине на примере консольной балки.

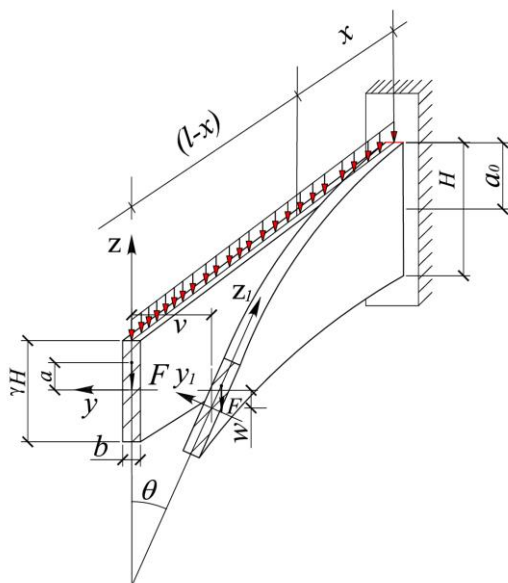


Рисунок 3.1 – Консольная балка переменной жесткости под действием сосредоточенной силы



Точки и линии приложения внешних нагрузок  $F$  и  $q$  могут меняться по высоте на расстоянии  $a$  от осевой линии (рисунок 3.5). Начало отсчета, как и ранее примем в защемлении.

**1.  $F = 0$ ;  $q \neq 0$**

$$M_y(x) = -\frac{ql^2}{2} + qlx - \frac{qx^2}{2} = \frac{ql^2}{2}(-1 + 2\xi - \xi^2) = ql^2\bar{M}(\xi)$$

где

$$\bar{M}(\xi) = \frac{(-1 + 2\xi - \xi^2)}{2} \quad (3.28)$$

**2.  $q = 0$ ;  $F \neq 0$ ;**

$$M_y(x) = F(l - x) = Fl(1 - \xi) = Fl\bar{M}(\xi)$$

где

$$\bar{M}(\xi) = (1 - \xi);$$

**1.  $F = 0$ ;  $q \neq 0$**

В отсутствие сосредоточенной силы  $F$ , на полосу действует равномерно распределенная по длине нагрузка  $q$ , меняющейся по высоте сечения согласно закону:

$$h(\xi) = H(1 - \xi + \gamma\xi). \quad (3.29)$$

Здесь  $\gamma$  – понижающий коэффициент высоты балки.

Линейный закон приложения силы:

$$a(\xi) = a_0(1 - \xi + \gamma\xi). \quad (3.30)$$

Осевой момент инерции  $I_z$  и момент инерции при кручении  $I_k$  запишутся в виде:

$$\begin{aligned} I_z(\xi) &= \frac{h(\xi)b^3}{12} = I_z^0(1 - \xi + \gamma\xi); \\ I_k(\xi) &= \frac{h(\xi)b^3}{3} = I_k^0(1 - \xi + \gamma\xi), \end{aligned} \quad (3.31)$$

где  $I_k^0 = Hb^3/3$ ,  $I_z^0 = Hb^3/12$ .

Введем параметры [91, 239]:

$$\alpha = \frac{a_0}{l} \sqrt{\frac{EI_z^0}{GI_k^0}}; \quad \lambda = \frac{q^2 l^6}{GI_k^0 EI_z^0}. \quad (3.32)$$

С учетом принятых обозначений уравнение (3.7) можно представить в виде:

$$\frac{d^2\theta}{d\xi^2} + \frac{d\theta}{d\xi} f_1(\xi) + \theta (\sqrt{\lambda}\alpha + \lambda f_2(\xi)) = 0, \quad (3.33)$$

где  $f_1(\xi) = \frac{\gamma - 1}{1 - \xi + \gamma\xi}$ ;  $f_2(\xi) = \frac{(-1 + 2\xi - \xi^2)^2}{4(1 - \xi + \gamma\xi)^2}$ .

На краях условия для угла закручивания и относительного угла закручивания:

$$\text{при } \xi = 0: \theta = 0; \quad \text{при } \xi = 1: \frac{d\theta}{d\xi} = 0. \quad (3.34)$$

Решение сводится к системе линейных алгебраических уравнений вида:

$$([A] + \lambda[B] + \sqrt{\lambda}\alpha[C])\{\theta\} = 0, \quad (3.35)$$

Матрицы  $[A]$ ,  $[B]$ ,  $[C]$  имеют вид:

$$[A] = \frac{1}{\Delta\xi^2} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{\Delta\xi}{2} & -2\Delta\xi & \frac{3}{2}\Delta\xi \end{bmatrix} +$$

$$+ \frac{1}{2\Delta\xi} \begin{bmatrix} 0 & f_1(\xi_2) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -f_1(\xi_3) & 0 & f_1(\xi_3) & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -f_1(\xi_4) & 0 & f_1(\xi_4) & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -f_1(\xi_n) & 0 & f_1(\xi_n) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad (3.36)$$

$$[B] = \begin{bmatrix} f_2(\xi_2) & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & f_2(\xi_3) & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & f_2(\xi_n) & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}; [C] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Критическая нагрузка определяется по нижеприведенному соотношению:

$$q_{кр} = \frac{\sqrt{\lambda}\sqrt{GI_k^0 EI_z^0}}{l^3} = K \frac{\sqrt{GI_k^0 EI_z^0}}{l^3}. \quad (3.37)$$

График зависимости коэффициента  $K$  от параметров  $\alpha$  и  $\gamma$ , представлен на рисунке 3.6.

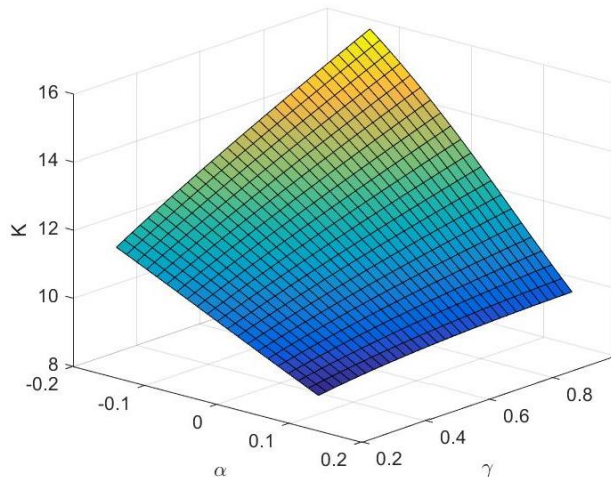


Рисунок 3.6 – Графическая зависимость коэффициента  $K$  от параметров  $\alpha$  и  $\gamma$

Приведем алгоритм расчета.

Система (3.35) имеет ненулевое решение только при равенства нулю ее определителя:

$$|[A] + \lambda[B] + \sqrt{\lambda}\alpha[C]| = 0, \quad (3.38)$$

В первом приближении определим критическую силу при  $\alpha = 0$ , то есть когда сила приложена в центре тяжести. Тогда из решения С.П. Тимошенко минимальное из собственных значений  $\lambda = 165,15$ :

$$|[A] + \lambda[B]| = 0. \quad (3.39)$$

При известной величине  $\lambda_{min}$  можно определить критическую силу по (3.37) с учетом того, что  $K = \sqrt{\lambda} = 12,85$ .

Априори, что при  $\alpha \neq 0$ , уравнение (3.38) не является обобщенным вековым. Воспользуемся методом последовательных приближений [239].

Итерационный процесс строиться так:

1. Как было уже отмечено, в первом приближении уравнения (3.38) упрощается и выполняется решение обобщенного векового уравнения, который имеет вид:

$$|[A_1] + \lambda[B]| = 0, \quad (3.40)$$

где  $[A_1] = [A] + \sqrt{\lambda_1}\alpha[E]$ .

2. Получив минимальное собственное число  $\lambda'_1$  из уравнения (3.40), следующим шагом в матрицу  $[A_1]$  вместо  $\lambda_1$  подставляется среднее значение  $\lambda_2 = (\lambda_1 + \lambda'_1)/2$ . Итерационный процесс повторяется до тех пор, пока не выполнится условие:

$$\frac{|\lambda_i - \lambda'_i|}{\lambda_i} \cdot 100\% < \delta, \quad (3.41)$$

где  $\delta$  – допустимая погрешность в %.

Расчетная блок-схема приведена на рисунке 3.7.

Рассмотрим возможные пределы изменения коэффициента  $\alpha$ . Для узких прямоугольных полос момент инерции  $I_k$  можно вычислять по формуле:

$$I_k = \frac{hb^3}{3}. \quad (3.42)$$

Тогда в формуле (3.32)  $I_z/I_k$  будет равно  $1/4$ . Для изотропного материала отношение модуля упругости к модулю сдвига составит:

$$\frac{E}{G} = 2(1 + \nu) \leq 3. \quad (3.1)$$

Параметр, определяющий положение нагрузки относительно осевой линии может меняться в диапазоне  $-h/2 \leq a \leq h/2$ . Тогда возможные пределы изменения параметра  $\alpha$  при условии предельного значения отношения  $E/G = 3$  будет иметь вид:

$$|\alpha| \leq \frac{h/2}{l} \sqrt{\frac{3}{4}}. \quad (3.44)$$

Известно, что гипотеза Бернулли (гипотеза плоских сечений) для балок с прямоугольным сечением не выполняется если  $h/l > 1/8$ .

Тогда для изотропного материала параметр  $\alpha$  ограничен в достаточно узких пределах, а именно:  $-0.0541 \leq \alpha \leq 0.0541$ . Что касается анизотропного материала, неравенство (3.44) не выполняется. К примеру, модуль Юнга для дерева вдоль волокон принимают примерно  $E = 10^4$  МПа и  $G = 500$  МПа. Тогда  $E/G = 20$ . Пределы изменения параметра  $\alpha$  для дерева будет лежать в пределах:  $-0.14 \leq \alpha \leq 0.14$ .

Задача решалась с использованием пакета MatLab с использованием встроенной функцией *eig* для определения минимального собственного значения, что соответствует критической силе.

График зависимости коэффициента  $K$  от параметров  $\alpha$  и  $\gamma$ , представлен на рисунке 3.8.

Анализируя график 3.8 можно сделать вывод, что при  $\alpha > 0$  величина критической силы понижается, а при  $\alpha < 0$  – повышается.

Зависимость  $K(\alpha)$  можно аппроксимировалась линейной функцией, в частности:

$$K(\alpha) = -40.2\alpha + 28.31. \quad (3.45)$$

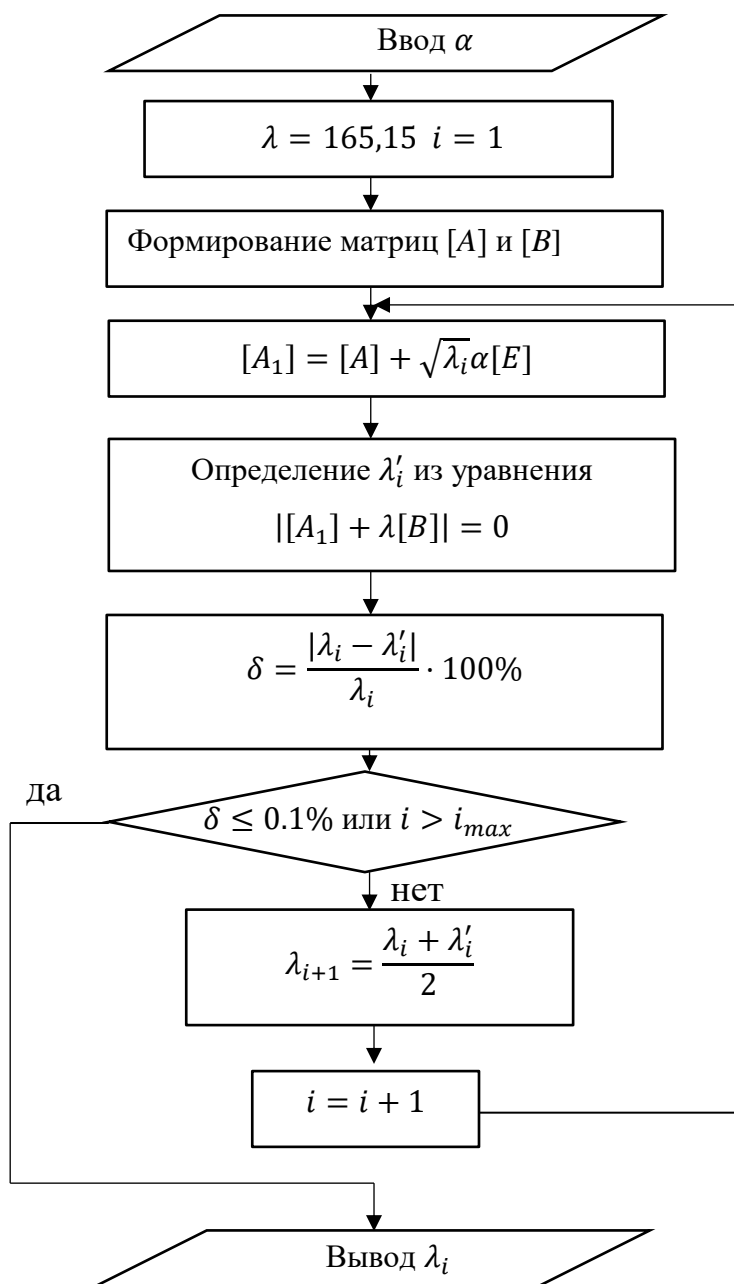


Рисунок 3.7 – Расчетная блок-схема

Аппроксимирующая прямая по формуле (3.45), показана на рисунке 3.8 штриховой линией.

Коэффициент  $k_{\text{п}}$ , учитывающий приложение нагрузки в зависимости от  $\alpha$ , можно определить как:

$$k_{\text{п}}(\alpha) = \frac{K(\alpha)}{K(0)} = 1 - 1.42\alpha. \quad (3.46)$$

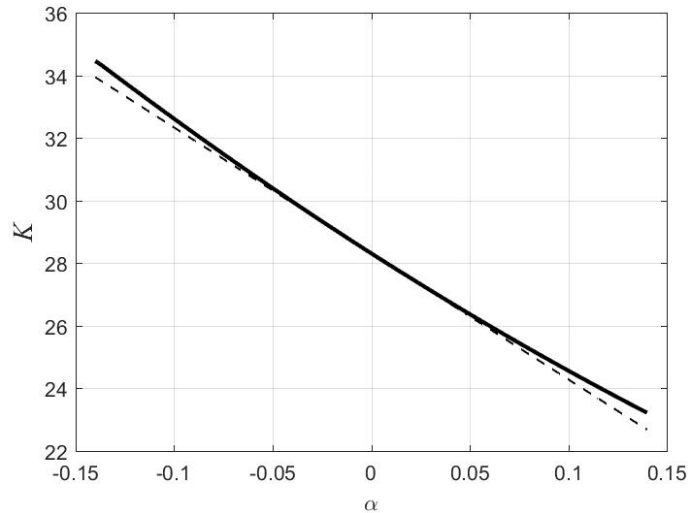


Рисунок 3.8 – Обусловленность коэффициента  $K$  от параметра  $\alpha$

Для контроля правильности результатов был выполнен конечно-элементный расчет деревянной балки в программном комплексе ЛИРА-САПР 2013 [239].

Исходные данные для расчета:  $b = 5$  см,  $h = 20$  см,  $l = 6$  м [239]. При расчете учитывалась ортотропия материала, значения упругих постоянных принимались равными:  $E_1 = 10^4$  МПа,  $E_2 = 400$  МПа,  $G = 500$  МПа,  $\nu_{12} = 0.018$ ,  $\nu_{21} = 0.45$ . Балка моделировалась плоскими оболочечными конечными элементами.

При приложении нагрузки в центре тяжести поперечного сечения получена величина критической нагрузки  $q_{кр} = 1.23$  кН/м (рисунок 3.9), а при приложении над центром тяжести –  $q_{кр} = 1.17$  кН/м (рисунок 3.10).

Загружение 2  
Форма потери устойчивости в гл. с. 1  
Коэффициент: 1.23269

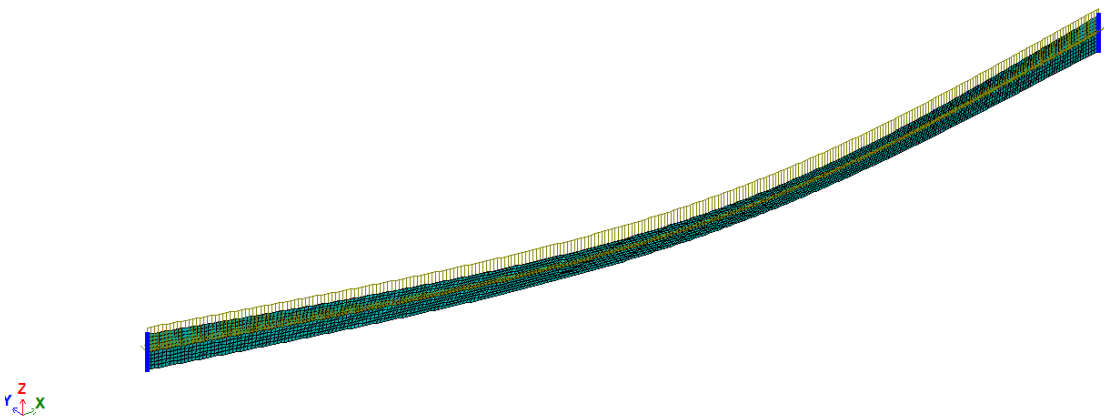


Рисунок 3.9 – Величина критической нагрузки  $q_{кр} = 1.23$  кН/м в момент потеря устойчивости. Нагрузка приложена в центре тяжести.

Теоретические значения, полученные по формуле (3.37), с использованием формулы (3.42) для момента инерции при кручении составили 1.21 и 1.16 кН/м. Ранее такие же близкие результаты были получены в [239], но методика решения была иной.

В то же время заметим, что для рассмотренного примера поперечное сечение нельзя считать узким, и момент инерции при кручении следует определять по формуле:

$$I_k = \frac{hb^3}{13} \left( 1 - 0.63 \frac{b}{h} \right). \quad (3.47)$$

При этом отметим, что с использованием формулы (3.47) решение показывает, что критическая нагрузка окажется несколько ниже, чем было указано выше.

Загружение 1  
Форма потери устойчивости в пл. с. 1  
Коэффициент 1.16813

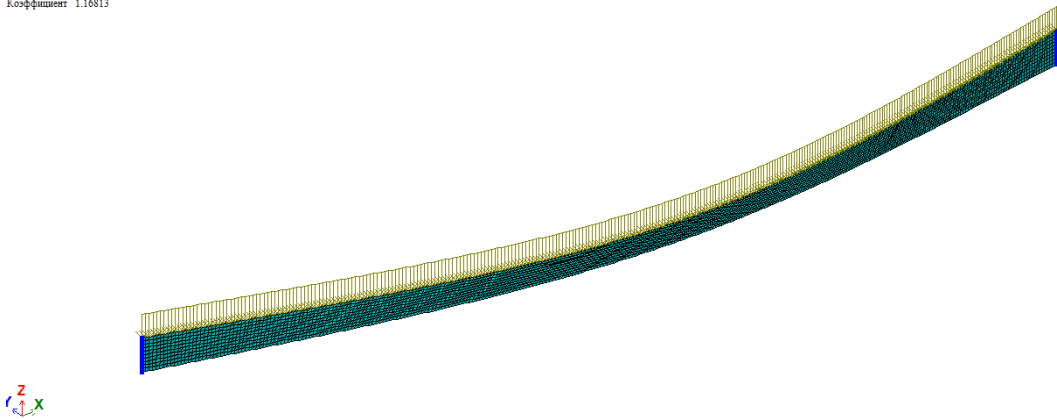


Рисунок 3.10 – Величина критической нагрузки  $q_{кр} = 1.16$  кН/м в момент потери устойчивости. Нагрузка приложена при  $\alpha = h/2$ .

## 2. $q = 0$ ; $F \neq 0$ ;

Приведем решение потери устойчивости для консольной балки переменной жёсткости по длине при действии силы  $F$  на расстоянии  $a$  от центра тяжести (рисунок 3.5).

Разрешающее уравнение имеет вид относительно угла закручивания в безразмерных координатах:

$$\frac{d^2\theta}{d\xi^2} + f_1(\xi) \frac{d\theta}{d\xi} + \lambda f_2(\xi) \theta = 0, \quad (3.48)$$

$$\text{где } f_1(\xi) = \frac{\gamma - 1}{1 - \xi + \gamma\xi}; \quad f_2(\xi) = \frac{(1 - \xi)^2}{(1 - \xi + \gamma\xi)^2}; \quad \lambda = \frac{F^2 l^4}{GI_k^0 EI_z^0}.$$

Критическая сила определяется по формуле:

$$F_{кр} = \frac{\sqrt{\lambda} \sqrt{GI_k^0 EI_z^0}}{l^2} = K \frac{\sqrt{GI_k^0 EI_z^0}}{l^2}. \quad (3.49)$$

Граничные условия:

$$\text{при } x = 0: \quad \theta = 0; \quad (3.50)$$

при  $x = l$ : 
$$M_k = -Pa\theta = GI_k \frac{d\theta}{dx}. \quad (3.51)$$

Условие (3.51) можно представить в следующем виде:

$$\frac{d\theta}{d\xi} + \frac{1}{\gamma} \sqrt{\lambda} \alpha \theta = 0, \quad (3.52)$$

В отличие от полученной ранее системы уравнений (3.35), здесь претерпевает изменение только матрица  $[C]$ , которая имеет вид:

$$[C] = \frac{1}{\gamma} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.43)$$

График зависимости коэффициента  $K$  от параметров  $\alpha$  и  $\gamma$ , представлен на рисунке 3.7.

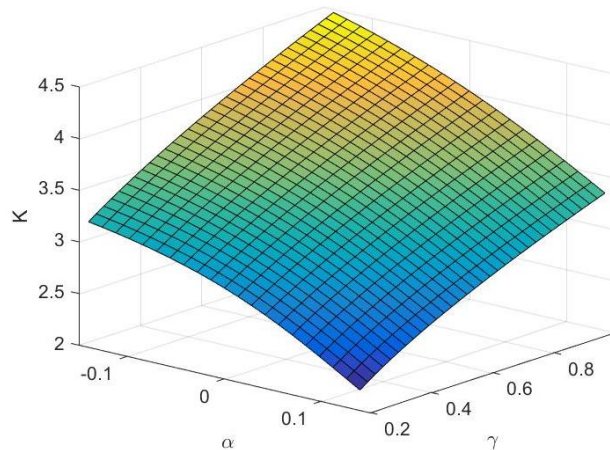


Рисунок 3.7 – Графическая зависимость коэффициента  $K$  от параметров  $\alpha$  и  $\gamma$

Полученные результаты также сравнивались с решением в известном расчетном программном комплексе Лира.

Балки моделировались плоскими четырехугольными и треугольными оболочечными конечными элементами.

Жесткость балки принималась постоянной и размеры имели следующие значения: пролет  $l = 1$  м, высота  $h = 10$  см, ширина  $b = 0.8$  см. Учитывалась анизотропия свойств древесины. Упругие постоянные материала:  $E_1 = 10^4$  МПа,  $\nu_{12} = 0.018$ ,  $E_2 = 400$  МПа,  $\nu_{21} = 0.45$ ,  $G = 500$  МПа. Результаты расчета в ПК Лира при  $\gamma = 1$  и  $\gamma = 0.2$  приведены соответственно на рисунке 3.8 и рисунке 3.9.

Сравнение критических усилий, полученных в ПК Лира с решением автора представлено в таблице 3.4

Таблица 3.4 – Сравнение критических усилий, полученных автором, с решением в ПК Лира

$\gamma$	1	0.9	0.8	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2
----------	---	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----



$F_{кр}$	Лири	85.41	77.67	74.49	69.77	65.04	61.25	57.26	52.4
	MatLab	76.55	74.27	71.95	66.82	64.09	61.18	58.04	54.9
$\delta, \%$		11.57	4.58	3.53	4.41	1.48	0.11	1.34	4.55

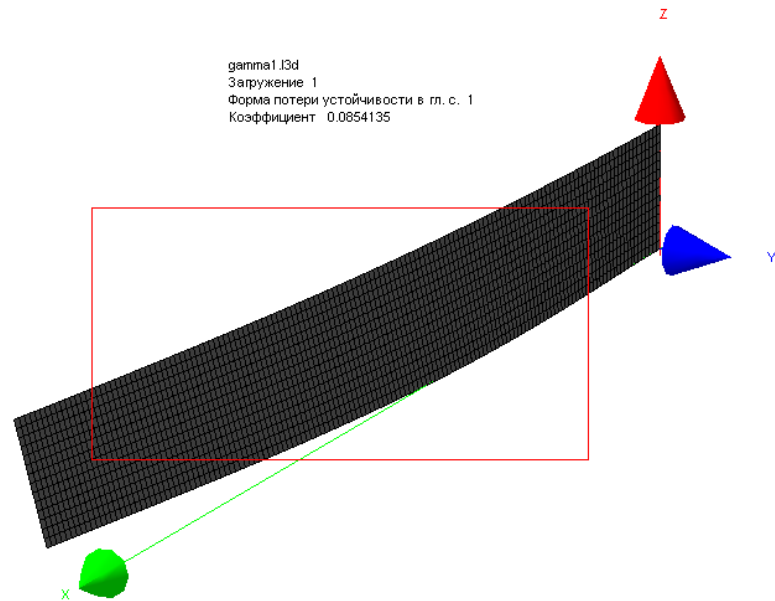


Рисунок 3.8– Результаты расчета в ПК Лири для балки постоянной жесткости

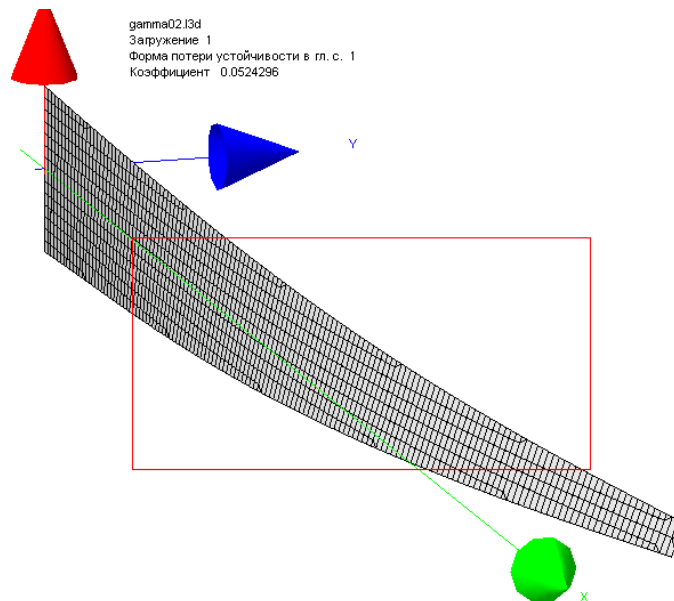


Рисунок 3.9 – Результаты расчета в ПК Лири для балки переменной жесткости при  $\gamma = 0.2$

Как видно из таблицы, разница результатов во всех случаях за исключением балки постоянного сечения не превышает 5%.

### 3.2 Начальные несовершенства в условиях плоской формы изгиба балок

Выведем разрешающее уравнение для балки переменного поперечного сечения, имеющей начальное искривление, которое задается двумя функциями:  $v_0 = v_0(x)$  и  $\theta_0 = \theta_0(x)$  (рисунок 3.10). Помимо начального искривления будем также учитывать приложение распределенной нагрузки  $q$  с эксцентриситетом  $e$  [239].

Элемент балки после деформации представлен на рисунке 3.11.

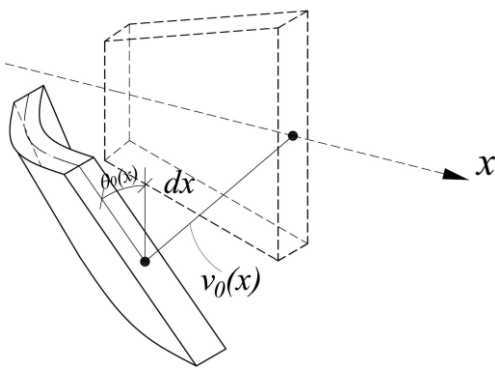


Рисунок 3.10 – Элемент балки с начальными несовершенствами: прогибом  $v_0$  и углом закручивания  $\theta_0$

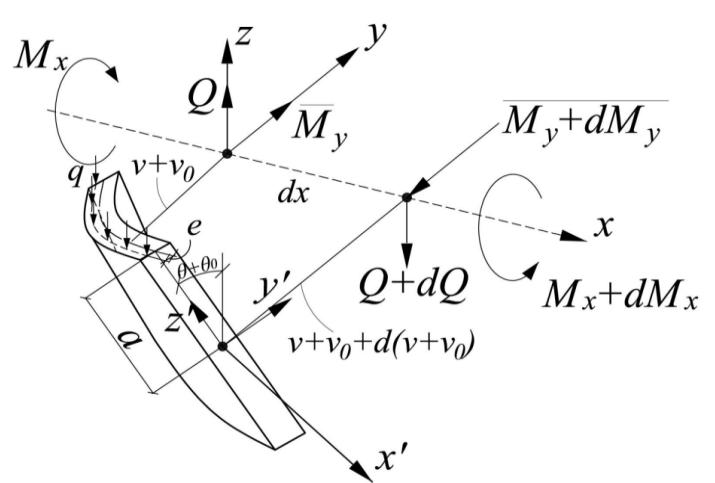


Рисунок 3.11 – Внутренние усилия элемента балки после деформирования

Рассмотрим элемент балки длиной  $dx$ , испытывающий поперечный изгиб. В момент потери устойчивости помимо изгибающего момента  $M_y$  и поперечной силы  $Q$  в балке возникает крутящий момент  $M_x$ .

Запишем сумму моментов относительно оси  $x$ :

$$M_x + dM_x - M_x + q \cdot dx \cdot \left\{ \frac{v + v_0 + [v + v_0 + d(v + v_0)]}{2} + e + a(\theta_0 + \theta) \right\} = 0. \quad (3.44)$$

Пренебрегая величинами высокого порядка малости, получим связь между  $M_x$ ,  $q$  и  $v$ :

$$\frac{dM_x}{dx} = -q[(v + v_0) + e + a(\theta_0 + \theta)]. \quad (3.45)$$

Крутящий момент относительно оси  $x'$  определяется следующим образом:

$$M_{x'} = M_x - Q(v + v_0) + M_y \left( \frac{dv}{dx} + \frac{dv_0}{dx} \right). \quad (3.46)$$

Связь между углом закручивания и крутящим моментом:

$$M_{x'} = M_k = GI_k \frac{d\theta}{dx} \quad (3.47)$$

где  $I_k$  – момент инерции при кручении.

Приравняем (3.46) к (3.47):

$$M_x - Q(v + v_0) + M_y \left( \frac{dv}{dx} + \frac{dv_0}{dx} \right) = GI_k \frac{d\theta}{dx}. \quad (3.48)$$

Продифференцируем последнее соотношение (3.48) по  $x$ :

$$\begin{aligned} \frac{dM_x}{dx} - Q \left( \frac{dv}{dx} + \frac{dv_0}{dx} \right) - \frac{dQ}{dx} (v + v_0) + M_y \left( \frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v_0}{dx^2} \right) + \frac{dM_y}{dx} \left( \frac{dv}{dx} + \frac{dv_0}{dx} \right) \\ = GI_k \frac{d^2\theta}{dx^2} + \frac{d(GI_k)}{dx} \frac{d\theta}{dx}. \end{aligned} \quad (3.49)$$

С учетом того, что  $\frac{dM_y}{dx} = Q$  и  $\frac{dQ}{dx} = -q$ , из последнего равенства (3.56) получим:

$$M_y \left( \frac{d^2v}{dx^2} + \frac{d^2v_0}{dx^2} \right) = GI_k \frac{d^2\theta}{dx^2} + \frac{d(GI_k)}{dx} \frac{d\theta}{dx} + q(e + a(\theta_0 + \theta)). \quad (3.50)$$

Изгибающий момент относительно оси  $z'$  определяется следующим образом:

$$M_{z'} = M_y \sin(\theta_0 + \theta) = -EI_z \frac{d^2v}{dx^2}.$$

Так как  $\sin(\theta_0 + \theta) \approx (\theta_0 + \theta)$  то

$$M_{z'} = M_y(\theta_0 + \theta) = -EI_z \frac{d^2v}{dx^2}. \quad (3.51)$$

Выразив из (3.51) вторую производную прогиба  $\frac{d^2v}{dx^2}$  и подставив в (3.50), получим следующее уравнение:

$$GI_k \frac{d^2\theta}{dx^2} + \frac{d(GI_k)}{dx} \frac{d\theta}{dx} + \left( qa + \frac{M_y^2}{EI_z} \right) \theta = -q(e + a\theta_0) + M_y \frac{d^2v_0}{dx^2} - \frac{M_y^2}{EI_z} \theta_0 \quad (3.52)$$

### 3.3 Изгибно-крутильная форма потери устойчивости для вязкоупругих балок в условиях ползучести. Вывод разрешающих уравнений. Методика расчета

В качестве вязкоупругого материала рассмотрим сетчатый полимер. В качестве критерия устойчивости будем использовать критерий начальных несовершенств задав в виде начальной погиби  $v_0(x)$ , начального угла закручивания  $\theta_0(x)$  и эксцентриситета  $e$ .

Критическое время при использовании критерия начальных несовершенств определяется условно путем задания предельной величины перемещений или предельной скорости их роста.

Для балки, испытывающей изгиб в двух плоскостях, полные линейные деформации на основе гипотезы плоских сечений можно определить по формуле:

$$\varepsilon_x = -y \frac{d^2v}{dx^2} - z \frac{d^2w}{dx^2} \quad (3.53)$$

С другой стороны, полные деформации  $\varepsilon_x$  представляют сумму упругих деформаций и деформаций ползучести:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} + \varepsilon^* + \varepsilon_T \quad (3.54)$$

Подставляя (3.53) в (3.54) и выражая напряжения через деформации, получим:

$$\sigma_x = -E \left( y \frac{d^2 v}{dx^2} + z \frac{d^2 w}{dx^2} + \varepsilon^* + \varepsilon_T \right) \quad (3.55)$$

Изгибающие моменты вычисляются следующим образом:

$$M_y = - \int_A \sigma_x z dA; \quad M_{z'} = \int_A \sigma_x y dA; \quad (3.56)$$

Подставив (3.55) в (3.56), получим:

$$M_y = EI_y \frac{d^2 w}{dx^2} + E \int_A \varepsilon_x^* z dA; \quad M_{z'} = -EI_z \frac{d^2 v}{dx^2} - E \int_A \varepsilon_x^* y dA; \quad (3.57)$$

Примем за следующее обозначение интегралы в (3.57):

$$M_y^* = -E \int_A \varepsilon_x^* z dA; \quad M_z^* = E \int_A \varepsilon_x^* y dA; \quad (3.57a)$$

Связь крутящего момента с относительным углом закручивания для вязкоупругой балки имеет вид:

$$M_{x'} = M_k = GI_k \frac{d\theta}{dx} - M_k^* \quad (3.58)$$

Приравнявая (3.58) к (3.46), получим:

$$GI_k \frac{d\theta}{dx} - M_k^* = M_x - Q(v + v_0) + M_y \left( \frac{dv}{dx} + \frac{dv_0}{dx} \right) \quad (3.59)$$

Продифференцируем далее равенство (3.59) по  $x$ , учитывая, что крутильная жесткость  $I_k$  является функцией от  $x$ :

$$\begin{aligned} GI_k \frac{d^2 \theta}{dx^2} + \frac{d(GI_k)}{dx} \frac{d\theta}{dx} - \frac{dM_k^*}{dx} = \\ = \frac{dM_x}{dx} - \frac{dQ}{dx} (v + v_0) - Q \frac{d(v + v_0)}{dx} + \frac{dM_y}{dx} \frac{d(v + v_0)}{dx} + M_y \frac{d^2(v + v_0)}{dx^2} \end{aligned} \quad (3.60)$$

С учетом того, что  $\frac{dM_y}{dx} = Q$  и  $\frac{dQ}{dx} = -q$ , из последнего равенства (3.60) получим:

$$\begin{aligned} GI_k \frac{d^2 \theta}{dx^2} + \frac{d(GI_k)}{dx} \frac{d\theta}{dx} - \frac{dM_k^*}{dx} = -q[(v + v_0) + e + a(\theta_0 + \theta)] + q(v + v_0) - \\ - Q \frac{d(v + v_0)}{dx} + Q \frac{d(v + v_0)}{dx} + M_y \frac{dv}{dx} + M_y \frac{dv_0}{dx} \end{aligned} \quad (3.61)$$

После упрощений, выражение (3.61) принимает вид:

$$GI_k \frac{d^2 \theta}{dx^2} + \frac{d(GI_k)}{dx} \frac{d\theta}{dx} - \frac{dM_k^*}{dx} = -q[e + a(\theta_0 + \theta)] + M_y \frac{dv}{dx} + M_y \frac{dv_0}{dx} \quad (3.62)$$

Выразим из второго соотношения (3.57)  $\frac{d^2 v}{dx^2}$ :

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{M_y + M_z^*}{EI_z} \quad (3.63)$$

Учитывая, что  $M_z' = M_y \sin(\theta_0 + \theta) = M_y(\theta_0 + \theta)$ , представим равенство (3.63) в виде:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{[M_y(\theta_0 + \theta) + M_z^*]}{EI_z} \quad (3.64)$$

Подставив (3.64) в (3.62), получим основное разрешающее уравнение:

$$\begin{aligned} GI_k \frac{d^2\theta}{dx^2} + \frac{d(GI_k)}{dx} \frac{d\theta}{dx} + \left( \frac{M_y^2}{GI_k EI_z} + qa \right) \theta = \\ = -q(e + a\theta_0) - \frac{M_y^2 \theta_0}{EI_z} + M_y \frac{d^2v_0}{dx^2} + \frac{dM_k^*}{dx} - \frac{M_y M_z^*}{EI_z} \end{aligned} \quad (3.65)$$

Замечание: Если в расчете балки материал вязкоупругопластический, то можно принять в соотношении (3.55) модуль Юнга как функцию координат, например  $E = E(x, y, z)$ . Отсюда следует, что постоянные жесткости балки следует заменить приведенными жесткостями, в частности:

$$EI_y(x) = \int_A E(x, y, z) z^2 dA; \quad EI_z(x) = \int_A E(x, y, z) y^2 dA; \quad (3.66)$$

Интегральная зависимость для  $M_z^*$  и  $M_y^*$  в (3.57a) для вязкоупругопластического материала будет иметь вид:

$$M_y^* = \int_A E(x, y, z) \varepsilon_x^* z dA; \quad M_z^* = - \int_A E(x, y, z) \varepsilon_x^* y dA; \quad (3.67)$$

Резюмируя приведенный раздел с учетом указанных поправок уравнение (3.65) может использоваться и для вязкоупругопластического материала.

### 3.3.1 Алгоритм расчета вязкоупругой балки при ползучести

Рассмотрим методику решения уравнения (3.65) для полимерной вязкоупругой полосы. Для расчета вводится сетка по времени  $t$ , координате  $x$ , а также поперечное сечение разбивается на плоские треугольные конечные элементы (при определении напряжений от кручения методом конечных элементов), либо на отрезки  $\Delta u$  и  $\Delta z$  при использовании МКР.

На первом этапе выполняется упругое решение уравнения (3.65) методом конечных разностей при  $t = 0$ ,  $\varepsilon_x^* = 0$ ,  $\gamma_{xz}^* = \gamma_{xy}^* = 0$ ,  $M_z^* = 0$ ,  $M_y^* = 0$ ,  $M_k^* = 0$  и определяется угол закручивания  $\theta(x)$ .

Далее вычисляем для каждого сечения определяется относительный угол закручивания:

$$\vartheta = \frac{d\theta}{dx} = \frac{M_k}{GI_k}$$

Известно, из решения Сен-Венана для задачи о кручении некруглого поперечного сечения, что величина депланации пропорциональна относительному углу закручивания  $\vartheta$ :

$$u = \vartheta \psi(z, y)$$

Здесь следует отметить, если считать, что сечение  $x = 0$  не поворачивается, то углы закручивания  $\theta$  изменяются по длине стержня по линейному закону и  $\vartheta = \frac{d\theta}{dx} = \text{const.}$

Тогда для угловых перемещений из соотношения Коши:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = \vartheta \left( -z + \frac{\partial \psi}{\partial y} \right); \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \vartheta \left( y + \frac{\partial \psi}{\partial z} \right).$$

Касательные напряжениями и деформациями сдвига с учетом деформации ползучести связаны соотношением:

$$\tau_{xy} = G(\gamma_{xy} - \gamma_{xy}^*) = G \left( \vartheta \left( -z + \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) - \gamma_{xy}^* \right); \quad \tau_{xz} = G(\gamma_{xz} - \gamma_{xz}^*) = G \left( \vartheta \left( y + \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) - \gamma_{xz}^* \right),$$

Определим связь между касательными напряжениями с введенной функцией напряжений  $\Phi(y, z)$ :

$$\tau_{xy} = \frac{\partial \Phi}{\partial z} = G \left( \vartheta \left( -z + \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) - \gamma_{xy}^* \right); \quad \tau_{xz} = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} = G \left( \vartheta \left( y + \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) - \gamma_{xz}^* \right).$$

Исключим функцию  $\psi$ , продифференцировать соотношения для  $\tau_{xy}$  и  $\tau_{xz}$  по  $z$  и  $y$  соответственно и взяв разницу:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = G \left( \vartheta \left( -1 + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial z} \right) - \frac{\partial \gamma_{xy}^*}{\partial z} \right); \quad -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = G \left( \vartheta \left( 1 + \frac{\partial \psi}{\partial y \partial z} \right) - \frac{\partial \gamma_{xz}^*}{\partial y} \right);$$

Далее для каждого сечения по  $x$  выполняется решение уравнения Пуассона:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = -2G\vartheta + G \left( \frac{\partial \gamma_{xz}^*}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}^*}{\partial z} \right). \quad (3.68)$$

методом конечных разностей или методом конечных элементов.

Отметим, что крутящий момент и функция  $\Phi$  связаны соотношением:

$$M_k = 2 \int_A \Phi dA.$$

Решение уравнения (3.68) удовлетворяет минимуму следующего функционала:

$$\chi = \int_A \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 - G \left\{ 2\vartheta - \left( \frac{\partial \gamma_{xz}^*}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}^*}{\partial z} \right) \right\} \Phi \right] dA. \quad (3.69)$$

После определения функции напряжений  $\Phi$  вычисляются касательные напряжения и зная их величины можно определить скорости роста деформаций ползучести  $\frac{\partial \gamma_{xy}^*}{\partial t}$  и  $\frac{\partial \gamma_{xz}^*}{\partial t}$ .

Для следующего шага по времени  $t + \Delta t$  угловые деформации  $\gamma_{xy}^*$  и  $\gamma_{xz}^*$  можно найти по линейной аппроксимации Эйлера:

$$\gamma_{t+\Delta t}^* = \gamma_t^* + \frac{\partial \gamma^*}{\partial t} \Delta t. \quad (3.70)$$

Также определяются изменения кривизн. Величина  $\frac{d^2v}{dx^2}$  определяется по формуле (3.64), а значения  $\frac{d^2w}{dx^2}$  можно вычислить по формуле:

$$\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{M_y + M_y^*}{EI_y} \quad (3.71)$$

Зная изменения кривизн, можно определить нормальные напряжения по формуле (3.55). Далее по величинам нормальных и касательных напряжений определяются скорости роста деформаций ползучести.

Затем при помощи метода Рунге-Кутты определяются деформации  $\varepsilon_x^*$ ,  $\gamma_{xz}^*$ ,  $\gamma_{xy}^*$  в момент времени  $t + \Delta t$ , а также величины  $M_z^*$ ,  $M_y^*$ ,  $M_k^*$ . Далее процесс повторяется для следующего шага.

Уравнение (3.69) представляет собой задача о кручении вязкоупругого бруса.

#### *Построение уравнений метода конечных элементов.*

Используемый для всех дальнейших выкладок двумерный симплекс–элемент представлен на рисунке 3.12.

Элемент представляет собой треугольник без дополнительных внутренних узлов на прямолинейных сторонах. Исследуемая функция  $\Phi$  принимает значения в узлах  $\Phi_i, \Phi_j, \Phi_k$  координаты которых —  $(y_i, z_i), (y_j, z_j), (y_k, z_k)$ .

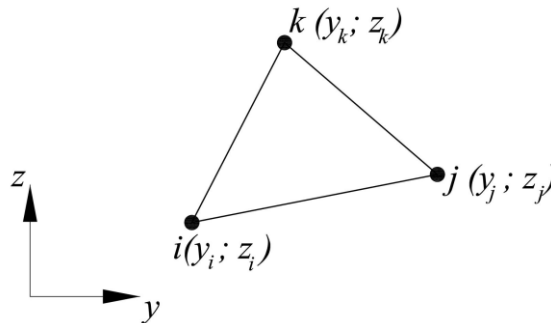


Рисунок 3.12 – Треугольный конечный элемент

Для существования функционала полной потенциальной энергии аппроксимирующая функция должна содержать члены не ниже первого порядка. Линейный полином от двух переменных содержит три члена, что хорошо согласуется с числом вершин треугольного КЭ.

Примем для функции  $\Phi$  следующую аппроксимацию.:

$$\Phi = N_i \Phi_i + N_j \Phi_j + N_k \Phi_k, \quad (3.72)$$

где  $N_i, N_j, N_k$  – функции формы.

$$\begin{aligned}
N_i &= \frac{1}{2A}(a_i + b_i y + c_i z) \text{ при } \begin{cases} a_i = y_j z_k - y_k z_j \\ b_i = z_j - z_k \\ c_i = y_k - y_j \end{cases} \\
N_j &= \frac{1}{2A}(a_j + b_j y + c_j z) \text{ при } \begin{cases} a_j = y_j z_i - y_j z_k \\ b_j = z_k - z_i \\ c_j = y_i - y_k \end{cases} \\
N_k &= \frac{1}{2A}(a_k + b_k y + c_k z) \text{ при } \begin{cases} a_k = y_k z_i - y_i z_k \\ b_k = z_k - z_i \\ c_k = y_i - y_k \end{cases}
\end{aligned} \tag{3.73}$$

где

$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & y_i & z_i \\ 1 & y_j & z_j \\ 1 & y_k & z_k \end{vmatrix} \quad \text{— площадь конечного элемента,}$$

Градиент функции  $\Phi$  можно записать в виде:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_j}{\partial y} & \frac{\partial N_k}{\partial y} \\ \frac{\partial N_i}{\partial z} & \frac{\partial N_j}{\partial z} & \frac{\partial N_k}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Phi_i \\ \Phi_j \\ \Phi_k \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{bmatrix} \{\Phi\}. \tag{3.74}$$

Градиент функции  $\Phi$  в функционале (3.69) представим как:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right\} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial z} \end{Bmatrix} = \\
&= \frac{1}{2} \{\Phi\}^T \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{bmatrix} \{\Phi\}.
\end{aligned} \tag{3.75}$$

Считая производные  $\frac{\partial \gamma_{xz}^*}{\partial y}$  и  $\frac{\partial \gamma_{xy}^*}{\partial z}$  в пределах конечного элемента постоянными, оставшуюся часть функционала (3.69) представим в виде:

$$\int_A G \left\{ 2\vartheta - \left( \frac{\partial \gamma_{xz}^*}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}^*}{\partial z} \right) \right\} \Phi dA = G \left\{ 2\vartheta - \left( \frac{\partial \gamma_{xz}^*}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}^*}{\partial z} \right) \right\} \int_A \Phi dA. \tag{3.76}$$

Интеграл от исследуемой функции представим как:

$$\int_A \Phi dA = \int_A \{N_i \quad N_j \quad N_k\} \{\Phi\} dA = \frac{A}{3} \{1 \quad 1 \quad 1\} \{\Phi\} = \frac{A}{3} \{\Phi\}^T \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}. \tag{3.77}$$

Сделав некоторые преобразования, минимизированный функционал сводится к системе линейных алгебраических уравнений:

$$[K] \{\Phi\} =, \tag{3.78}$$

где  $[K]$  и  $\{F\}$  – матрица жесткости и вектор нагрузки соответственно.

$$[K] = \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{bmatrix} \cdot A. \tag{3.79}$$



$$\{F\} = G \left\{ 2\vartheta - \left( \frac{\partial \gamma_{xz}^*}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}^*}{\partial z} \right) \right\} \frac{A}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.80)$$

Производные от деформаций ползучести в элементе вычисляются по узловым значениям  $\gamma_{xz}^*$  и  $\gamma_{xy}^*$ :

$$\frac{\partial \gamma_{xz}^*}{\partial y} = [b_i \quad b_j \quad b_k] \begin{Bmatrix} \gamma_{xz,i}^* \\ \gamma_{xz,j}^* \\ \gamma_{xz,k}^* \end{Bmatrix}; \quad \frac{\partial \gamma_{xy}^*}{\partial z} = [c_i \quad c_j \quad c_k] \begin{Bmatrix} \gamma_{xy,i}^* \\ \gamma_{xy,j}^* \\ \gamma_{xy,k}^* \end{Bmatrix}. \quad (3.81)$$

Через функцию напряжений, касательные напряжения в элементах определяются:

$$\tau_{xz} = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} = -[b_i \quad b_j \quad b_k] \begin{Bmatrix} \Phi_i \\ \Phi_j \\ \Phi_k \end{Bmatrix}; \quad \tau_{xy} = \frac{\partial \Phi}{\partial z} = [c_i \quad c_j \quad c_k] \begin{Bmatrix} \Phi_i \\ \Phi_j \\ \Phi_k \end{Bmatrix}. \quad (3.82)$$

Так как коэффициенты  $[b_i \quad b_j \quad b_k]$  и  $[c_i \quad c_j \quad c_k]$  фиксированы для заданных узловых координат, и значения функции в узлах  $\Phi_i, \Phi_j, \Phi_k$  не зависят от координат пространства, то частные производные являются величинами постоянными. Таким образом, для аппроксимации быстро изменяющейся функции  $\Phi$  необходимо уменьшать размер конечного элемента.

### 3.3.2 Выпучивание полимерной консольной полосы при ползучести

Для сжатых стержней в работе [148], материал которых подчиняется нелинейному уравнению Максвелла-Гуревича вводится понятие длительной критической нагрузки, согласно которому, в выражении для мгновенной критической силы модуль упругости  $E$  заменяется на длительный модуль деформации  $E_{дл}$ :

$$E_{дл} = \frac{E \cdot E_{\infty}}{E + E_{\infty}}; \quad (3.83)$$

Кривая роста прогиба сжатого стержня с начальными несовершенствами при ползучести функционально зависит от интервального значения сжимающей силы. Иначе говоря, если она меньше длительной критической  $F_{дл}$ , то ползучесть носит ограниченный характер, и потеря устойчивости не происходит. Равенство сжимающей силы  $F = F_{дл}$  дает картину роста перемещений с постоянной скоростью. И наконец, если  $F \geq F_{дл}$  – то скорость роста перемещений во времени растет и можно условно определить критическое время, ограничив величину максимального перемещения, либо скорость роста прогибов.

Рассматривается консольная балка постоянного сечения из ПВХ. Начальные несовершенства примем как действие силы с некоторым эксцентриситетом  $e$  (рисунок 3.13).

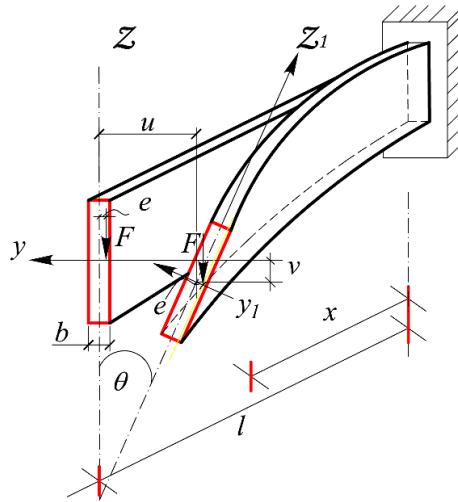


Рисунок 3.13 – Расчетная схема для балок из вязкоупругого материала

Условия на краях запишем как:

$$x = 0 \quad \theta = 0; \quad x = l \quad M_k = Pe = GI_k \frac{d\theta}{dx} - M_k^* \quad (3.84)$$

Величина критической силы без учета деформации ползучести решено методом энергии С.П. Тимошенко:

$$F_{кр} = 4.013 \frac{\sqrt{EI_z GI_k}}{l^2} \quad (3.85)$$

Согласно принятой выше гипотезе введем величину длительной критической нагрузки по формуле:

$$F_{дл} = 4.013 \frac{\sqrt{E_{дл} I_z G_{дл} I_k}}{l^2} \quad (3.86)$$

Во многих работах доказано, что для полимеров как конструкционный материал при использовании уравнения Максвелла-Гуревича, имеется возможность получить решение в конце процесса ползучести, заменив мгновенный модуль сдвига  $G$  на длительный  $G_{дл}$ , вычисленный по формуле:

$$G_{дл} = \frac{G \cdot G_{\infty}}{G + G_{\infty}}; \quad E_{\infty} = 3G_{\infty} \quad (3.87)$$

Приведем поведение полосы в интервале изменения сжимающей силы:

$$F_{дл} < F \leq F_{дл}$$

при следующих параметрах полимерной балки с учетом одного спектра времён релаксации:  $b = 1$  см,  $h = 10$  см,  $E = 1480$  МПа,  $E_{\infty} = 5990$  МПа,  $\eta_0^* = 9.04 \cdot 10^5$  МПа · мин,  $m^* = 12.6$  МПа,  $\nu = 0.3$ ,  $e = 0.01$  см.

Графическое поведение во времени максимальной величины угла закручивания при трех значениях нагрузки:  $F = 0,044$  кН  $< F_{дл}$ ,  $F = 0,0465 = F_{дл}$ ,  $F = 0,048 > F_{дл}$  приведены на

рисунке 3.14. Видно, что, как и для сжатых стержней, при нагрузке меньше длительной критической скорость роста перемещений во времени затухает. При  $F = 0,0465 = F_{дл}$  перемещения растут с постоянной скоростью, и при  $F = 0,048 > F_{дл}$  скорость роста перемещений возрастает во времени.

Рассмотрим далее влияние эксцентриситета (начальные несовершенства) на процесс ползучести при  $F = 0,048 > F_{дл}$ . Графики роста максимальной величины угла закручивания при различных значениях эксцентриситета  $e$  приведены на рисунке 3.16.

Отметим, что начальные несовершенства оказывают существенное влияние на величину критического времени. Данный факт подтверждается из анализа графиков, что, если за критерий потери устойчивости принимать величину перемещений, либо скорость их роста.

Отсюда вывод, что нагрузки, действующие на балку, не должны превышать длительную критическую.

Из рисунка 3.16 видно, что чем выше величина эксцентриситета  $e$ , тем раньше наступает момент, с которого нормальные напряжения начинают расти.

Хотелось бы обратить внимание на интересный факт, который наблюдается на графиках изменения во времени максимальных величин нормальных напряжений. Здесь до определенного момента времени, в частности  $t = 8,5$  часа, нормальные напряжения убывают, но затем начинают резко возрастать, несмотря на рост угла закручивания

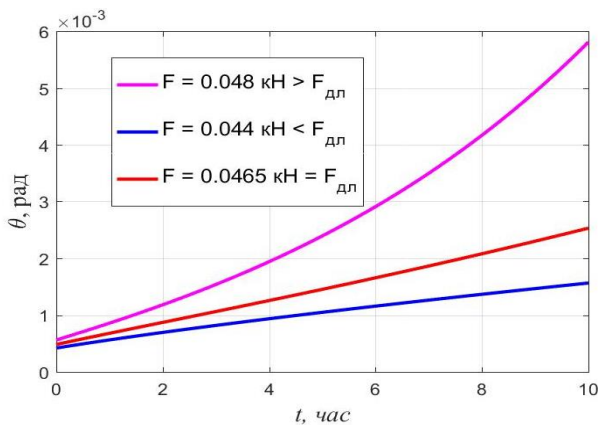


Рисунок 3.14 – Зависимость максимального угла закручивания от времени при  $F_{дл} \leq F \leq F_{дл}$

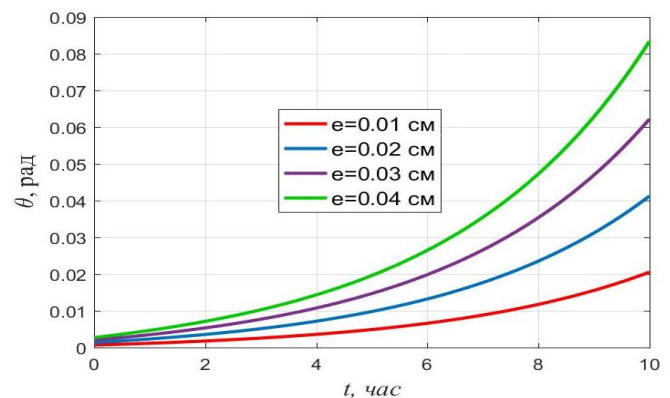


Рисунок 3.15 – Зависимость максимального угла закручивания от времени при различных значениях  $e$  ( $F = 0,048 > F_{дл}$ ).

Время, соответствующее точке экстремума на графиках  $\sigma_{max}(t)$ , можно принять за критическое, или принять за критерий потери устойчивости.

В случае принятия такого критерия то можно констатировать потери устойчивости как: при  $e = 0,01$  см,  $t_{кр} = 11.8$  часа;

при  $e = 0,02$  см,  $t_{кр} = 9.4$  часа;

при  $e = 0,03$  см,  $t_{кр} = 7.9$  часа;

при  $e = 0,04$  см,  $t_{кр} = 7.0$  часа;

Что касается касательных напряжений  $\tau_{xy}$  и  $\tau_{xz}$ , то здесь можно сказать, в отличие от нормальных, во времени только возрастают (рисунок 3.17).

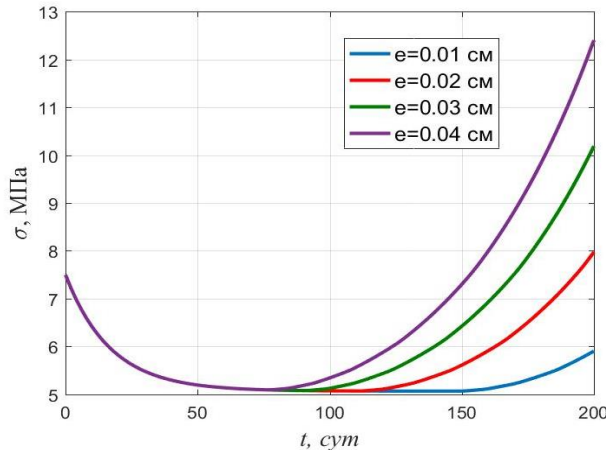


Рисунок 3.16 – Зависимость максимальных величин нормальных напряжений  $\sigma_{max}(t)$  от времени при различных  $e$

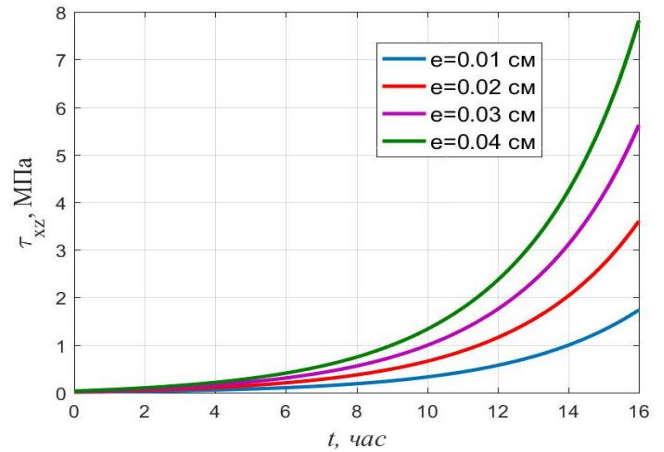


Рисунок 3.17 – Рост максимальной величины касательных напряжений  $\tau_{xz}$  во времени при различных  $e$

### 3.3.3 Устойчивость плоской формы изгиба балок прямоугольного сечения при ползучести

В данном разделе рассматривается задача устойчивости плоской формы деформирования деревянной балки прямоугольного поперечного сечения в условиях ползучести с учетом начальных несовершенств. Явление потери устойчивости при ползучести исследуем на примере консольной балки, нагруженной сосредоточенной силой  $F$ . (рисунок 3.13). В качестве закона ползучести используется линейное уравнение Максвелла-Томпсона:

$$\frac{\partial \varepsilon^*}{\partial t} = \frac{[\sigma(E - E_{дл}) - E \cdot E_{дл} \varepsilon^*]}{nE^2}, \quad (3.88)$$

где  $\varepsilon^*$  – деформация ползучести,  $E$  – модуль Юнга материала ( $E = 1.48 \cdot 10^4$  МПа),  $E_{дл}$  – длительный модуль деформации ( $E_{дл} = (0.6 \div 0.75)E = 1 \cdot 10^4$  МПа),  $n$  – время релаксации ( $n = 10 \div 25$  сут,  $n \cong 18$  сут).

Применительно к сдвиговым деформациям уравнение (3.88) перепишем в виде:

$$\frac{\partial \gamma^*}{\partial t} = \frac{[\tau(G - G_{дл}) - G \cdot G_{дл} \gamma^*]}{nG^2}. \quad (3.89)$$

где  $G$  и  $G_{дл}$  соответственно мгновенный и длительный модули сдвига материала.

Для расчетов примем  $G = 500$  МПа, а  $G_{дл} = 0.675G = 338$  МПа.

Вычисления выполнялись при  $l = 3$  м,  $h = 15$  см,  $b = 5$  см,  $e = 0,1$ . Отметим, что при расчете на кручение в условиях ползучести отношение величин  $\vartheta$  при  $t \rightarrow \infty$  и  $t = 0$  составило 0.678, что примерно равно отношению мгновенного модуля сдвига к длительному. Касательные напряжения при использовании линейного закона ползучести во времени постоянны

Длительную критическую силу в случае использования указанных уравнений можно также определить по формуле (3.86).

На рисунке 3.18 представлены графики роста максимального угла закручивания при различной величине силы  $F$ , построенные при  $e = 0.1$  см.

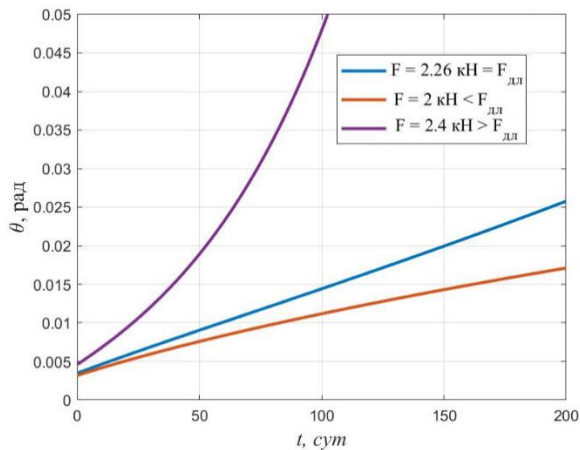


Рисунок 3.18 – Изменение во времени максимального угла закручивания при различных величинах силы  $F$

Особенность кривых для относительных углов закручивания  $\theta(t)$  такой же, как и на рисунке 3.14.

Мгновенная потеря устойчивости имеет место при критической нагрузке  $F_{кр} = 3.34$  кН. Длительная критическая сила для рассматриваемой балки  $F_{дл} = 2.26$  кН.

Кривые  $\theta(t)$  приведены на рисунке 3.19, где показано реологическое поведение балки при  $F = 2.4$  кН  $> F_{дл}$  при различной величине эксцентриситета  $e$ . Как и для полимерной балки, при  $F > F_{дл}$  начальные несовершенства оказывают существенное влияние на процесс ползучести.

На графиках изменения во времени нормальных напряжений (рисунок 3.20), как и в случае использования нелинейного закона ползучести, имеется точка экстремума, которую можно принять за критическое время [239]:

при  $e = 0.1$  см – критическое время составило 154 суток,

при  $e = 0.2$  см – критическое время составило 113 суток,

при  $e = 0.3$  см – критическое время составило 91 суток

при  $e = 0.4$  см – критическое время составило 76 суток.

Касательные напряжения, как и в случае полимерной балки, во времени только возрастают, что видно из рисунков 3.21–3.22.

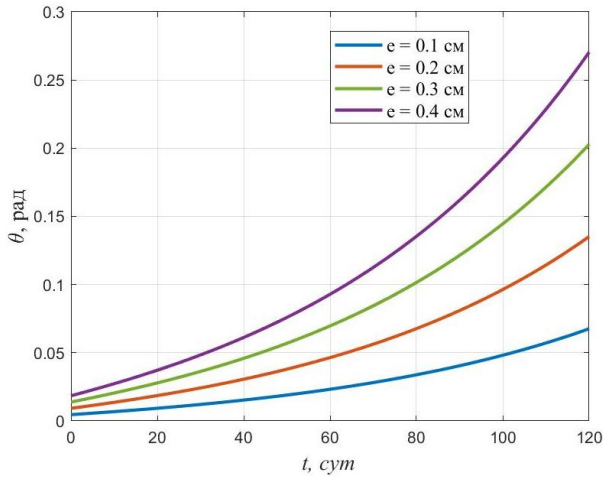


Рисунок 3.19 – Рост максимальной величины угла закручивания при различных значениях эксцентриситета  $e$

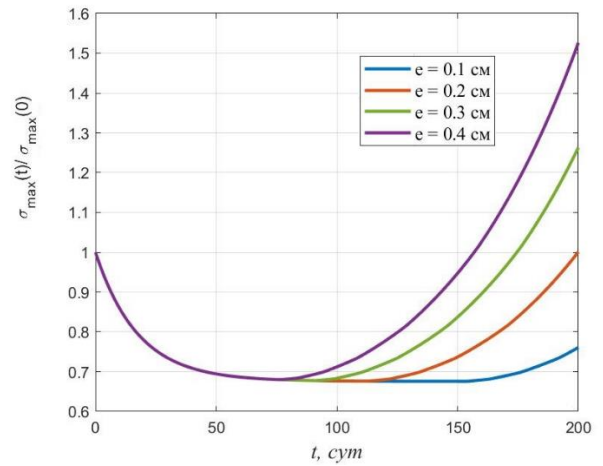


Рисунок 3.20 – Изменение во времени относительных напряжений в зависимости от эксцентриситета  $e$

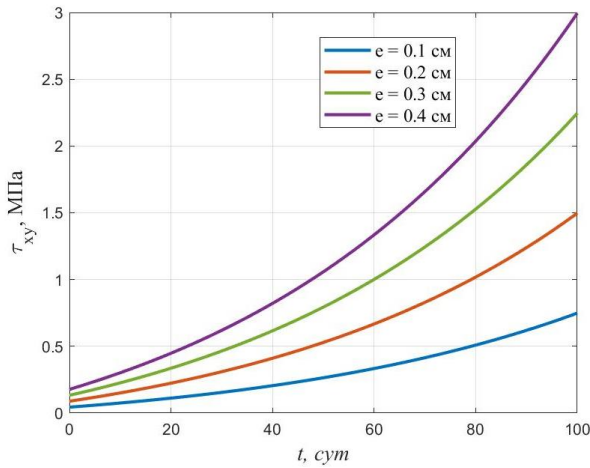


Рисунок 3.21 – Кривые максимальной величины напряжений  $\tau_{xy}$  при различной величине эксцентриситета  $e$

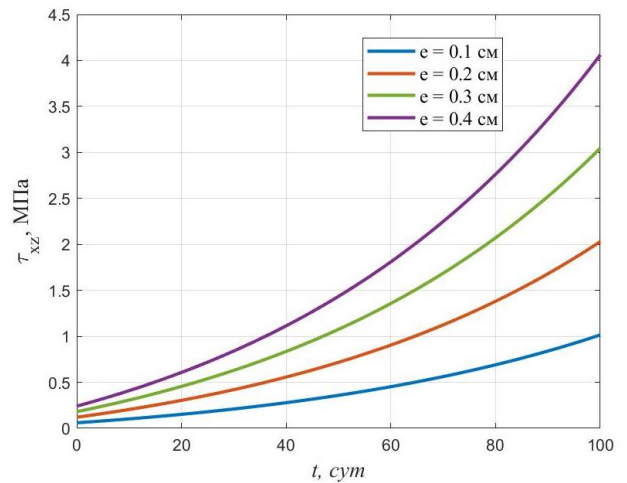


Рисунок 3.22 – Кривые максимальной величины напряжений  $\tau_{xz}$  при различной величине эксцентриситета  $e$

### 3.4 Выпучивание упругих вращающихся стержней при действии осевых сжимающих сил с учетом собственного веса.

Приведем решение в начале для вращающегося стержня без учета собственного веса. Стержень (рисунок 3.23) вращается вокруг своей оси с заданной угловой скоростью  $\omega$ .

Рассмотрим элемент стержня длиной  $ds$  (рисунок 3.24).

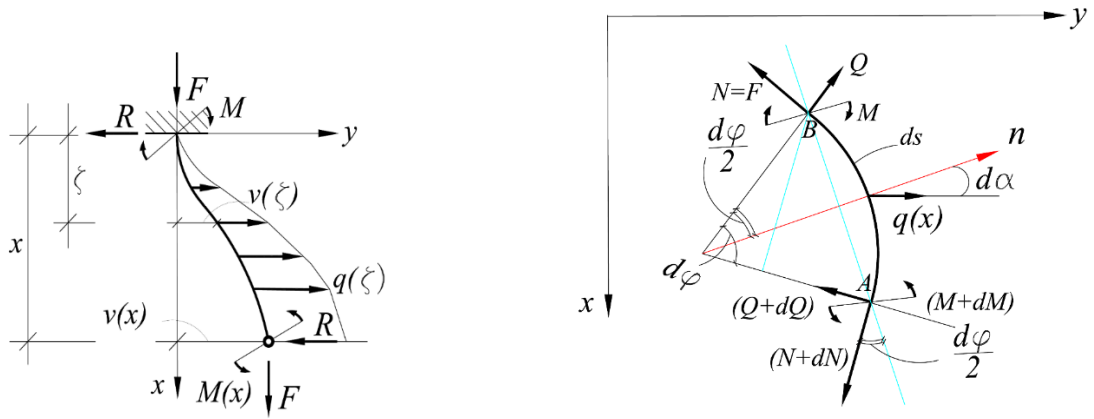


Рисунок 3.23 – Расчетный узел вращающегося стержня. Рисунок 3.24 – Элемент стержня длиной  $ds$ .

Проектируя внутренние усилия и внешнюю нагрузку на нормаль к упругой линии, получим уравнение равновесия:

$$\sum F_n = 0; \quad Q \cos\left(\frac{d\varphi}{2}\right) - (Q + dQ) \cos\left(\frac{d\varphi}{2}\right) - N \sin\left(\frac{d\varphi}{2}\right) - (N + dN) \sin\left(\frac{d\varphi}{2}\right) + q(x) ds \cos(d\alpha) = 0; \quad (3.90)$$

В случае малости угла  $\frac{d\varphi}{2}$  и длины рассматриваемого элемента  $ds$ , можно принять:

$$\begin{aligned} \sin\left(\frac{d\varphi}{2}\right) &\cong \frac{d\varphi}{2}; \quad \cos\left(\frac{d\varphi}{2}\right) \cong 1; \quad \cos d\alpha \cong 1; \quad ds \cong dx; \quad rd\varphi = ds = dx; \\ N &= F; \quad q(x) = \frac{q\omega^2}{g} v(x); \quad M(x) = EI_z \frac{d^2 v}{dx^2}, \quad \frac{dM}{dx} = Q, \\ \frac{dQ}{dx} &= EI_z \frac{d^4 v}{dx^4}; \quad \frac{d\varphi}{dx} = \frac{M}{EI_z} = \frac{d^2 v}{dx^2}; \end{aligned} \quad (3.91)$$

Откуда

$$\frac{dQ}{dx} = \frac{d^2 M}{dx^2} = EI_z \frac{d^4 v}{dx^4}$$

С учетом (3.91), выражение (3.90) перепишем в следующем виде:

$$-dQ - 2N \left(\frac{d\varphi}{2}\right) - dN \left(\frac{d\varphi}{2}\right) + q(x) dx = 0$$

Разделим последнее выражение на  $dx$  и пренебрегая произведением дифференциалов, получаем:

$$\frac{d^4 v}{dx^4} + \frac{F}{EI_z} \frac{d^2 v}{dx^2} - \frac{q\omega^2}{gEI_z} v(x) = 0. \quad (3.92)$$

Используя переход к безразмерным величинам (2.7), получим:

$$\frac{d^4 v}{d\xi^4} + \alpha^2 \frac{d^2 v}{d\xi^2} - \gamma^4 v(\xi) = 0. \quad (3.93)$$

здесь:

$$\gamma^4 = \frac{q\omega^2 l^4}{gEI_z}; \quad \alpha^2 = \frac{Fl^2}{EI_z} \quad (3.94)$$

Решение данного дифференциального уравнения четвёртого порядка с постоянными коэффициентами известно:

$$v(\xi) = c_1 \sin \alpha_1 \xi + c_2 \cos \alpha_1 \xi + c_3 \operatorname{sh} \alpha_2 \xi + c_4 \operatorname{ch} \alpha_2 \xi \quad (3.95)$$

здесь:

$$\alpha_{1,2}^2 = \pm \frac{\alpha^2}{2} + \sqrt{\frac{\alpha^4}{4} + \gamma^4}; \quad (3.96)$$

В классическом варианте закрепления стержня «шарнир-шарнир», решение получено С.П. Тимошенко. Решение имеет вид:

$$F + \frac{q\omega^2 l^4}{g\pi^2} = \frac{\pi^2 EI_z}{l^2};$$

Как и ранее рассматривается однородный, прямолинейный, вертикально расположенный и вращающийся стержень с учётом собственного веса.

В случае малых отклонений от прямолинейной формы дифференциальное уравнение изогнутой оси стержня имеет вид (2.2). Изгибающий момент (рисунок 3.25)

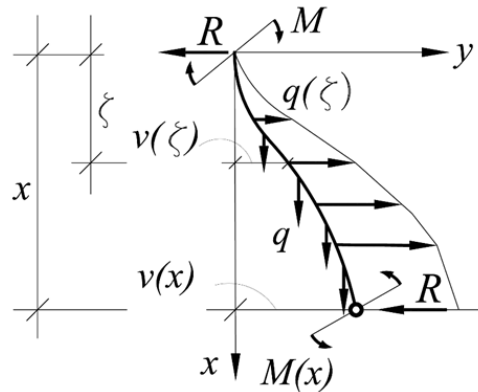


Рисунок 3.25 – Расчетный узел вращающегося стержня с учетом собственного веса.

$$M(x) = -q \int_0^x \zeta \frac{dv}{d\zeta} d\zeta + \iint_{00}^{xz} \frac{q\omega^2}{g} v(\zeta) d\zeta dz - Rx + M \quad (3.97)$$

откуда

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + \int_0^x \frac{q}{EI_z} \zeta \frac{dv}{d\zeta} d\zeta - \iint_{00}^{xz} \frac{q\omega^2}{gEI_z} v(\zeta) d\zeta dz = \frac{M}{EI_z} - \frac{Rx}{EI_z} \quad (3.98)$$

Далее удобно рассматривать разрешающие уравнения в безразмерных величинах. Сделаем следующую замену:

$$x = \xi l; \quad \zeta = l\psi; \quad y(x) = lv(x) \quad (3.99)$$

Тогда



$$\frac{d^2 v}{d\xi^2} + \int_0^\xi \beta^3 \psi \frac{dv}{d\psi} d\psi - \iint_{00}^{\xi z} \gamma^4 v(\psi) d\psi dz = m - r\xi \quad (3.100)$$

здесь

$$\beta^3 = \frac{ql^3}{EI_z}; \quad m = \frac{Ml}{EI_z}; \quad r = \frac{Rl^2}{EI_z}; \quad \gamma^4 = \frac{q\omega^2 l^4}{gEI_z}; \quad (3.101)$$

Решение (3.100) будем искать в виде степенного ряда:

$$v(\xi) = \sum_{k=0}^n A_k \xi^k; \quad (3.102)$$

Определив первые и вторые производные в (3.102), подставим в (3.100), имеем:

$$A_2 = \frac{m}{2}; \quad (3.103)$$

$$A_3 = -\frac{r}{6} \quad (3.104)$$

Запишем для  $k = 4, 5, 6, 7, \dots, n$

$$A_k = \frac{1}{k(k-1)} \left[ -\beta^3 A_{k-3} + \frac{\gamma^4}{(k-3)} A_{k-4} \right]; \quad k = 4, 5, 6, 7, \dots, n \quad (3.105)$$

Окончательное решение уравнения (3.100) с учетом найденных коэффициентов принимает вид:

$$v(\xi) = A_0 + A_1 \xi + A_2 \xi^2 + A_3 \xi^3 + \sum_{k=4}^n A_k \xi^k; \quad (3.106)$$

### 3.4.1 Решение модельных задач без учета собственного веса

#### *Задача 1. Вариант закрепления стержня «защемление - шарнир»*

Рассмотрим стержень, у которого верхний конец жестко защемлен, а нижний конец закреплен шарнирно (рисунок 2.16).

Граничные условия для определения 4-х постоянных интегрирования имеют вид:

$$\text{при } x = 0, \xi = 0, v(0) = 0, \frac{dv}{d\xi}(0) = 0 \quad x = l, \xi = 1, v(1) = 0 \quad \text{и} \quad \frac{d^2 v}{d\xi^2}(1) = 0$$

Определитель этих четырех уравнений приравняем нулю и получим трансцендентное уравнение:

$$\alpha_1 \text{th} \alpha_2 - \alpha_2 \text{tg} \alpha_1 = 0 \quad (3.107)$$

Числовой поиск аналогичен ранее рассмотренных примеров. Уравнение (3.107) позволяет построить, как и ранее зависимость между  $\alpha$  и  $\gamma$  (рисунок 3.27).

При  $\gamma = 0$ , с учетом (3.96), из трансцендентного уравнения (3.107) получим неопределенность и раскрыв ее имеем:

$$\text{tg} \alpha - \alpha = 0 \quad (3.108)$$

Из последнего соотношения следует,  $\alpha = 4,493407$ , т.е. с учетом  $\alpha^2 = \frac{Fl^2}{EI_z}$  получим формулу Ф. Ясинского

$$F_{кр} = \frac{20,19EI_z}{l^2}$$

а при  $\alpha = 0$  и  $\gamma = 3,926601$  получим формулу:

$$\omega = \frac{15,42}{l^2} \sqrt{\frac{gEI_z}{q}} \tag{3.109}$$

Для инженерных расчётов соотношение (3.107) не совсем удобно. Для этого зависимость (рисунок 3.27) аппроксимируем следующей кривой:

$$\alpha^2 + a\gamma^4 = b \tag{3.110}$$

Как и ранее, определяя коэффициенты  $a$  и  $b$ , получим:

$$\alpha^2 + 0,0849\gamma^4 = 20,19 \tag{3.111}$$

И в этом случае значения  $\alpha$  и  $\gamma$ , определяемые по (2.9) и (3.111), лежат в области устойчивости (рисунок 3.27).

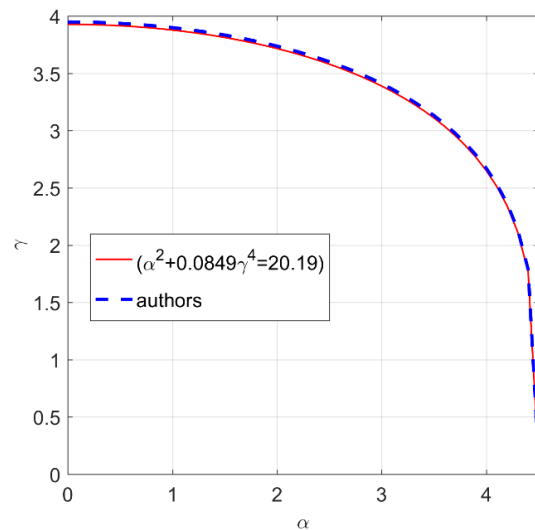
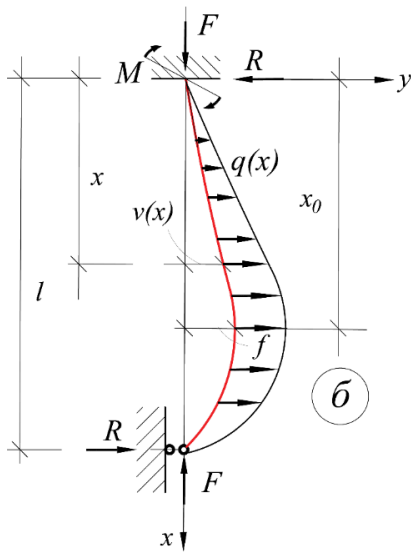


Рисунок 3.26 – Расчетные схема без учета веса «Защемление-Шарнир»

Рисунок 3.27 – Зависимость между  $\alpha, \beta$  «Защемление-Шарнир»

Учитывая соотношения (3.101) окончательно получим:

$$F + 0,0849 \frac{q\omega^2 l^2}{g} = 20,19 \frac{EI_z}{l^2}; \tag{3.112}$$

Наибольшее значение прогиба (рисунок 3.26) будет при

$$0,58l < x_0 < 0,6l \tag{3.113}$$

В случае если материал с ярко выраженной реологией, в соотношении (3.112) модуль Юнга  $E$  заменяют на длительный модуль  $E_{дл}$

### Задача 2. Вариант закрепления стержня «защемление-защемление»

Рассмотрим стержень, защемленный обоими концами (рисунок 3.28). По аналогии предыдущего примера при

$$x = 0, \xi = 0, v(0) = 0, \frac{dv}{d\xi}(0) = 0 \quad x = l, \xi = 1, v(1) = 0 \quad \text{и} \quad \frac{dv}{d\xi}(1) = 0$$

Приравнявая определитель этих четырех уравнений (из граничных условий) нулю, получим:

$$2\gamma^4 c h \alpha_2 \cos \alpha_1 - \alpha^2 s h \alpha_2 \sin \alpha_1 = 2\gamma^4 \quad (3.114)$$

Уравнение (3.114) позволяет построить, как и ранее зависимость между  $\alpha$  и  $\gamma$  (рисунок 3.29).

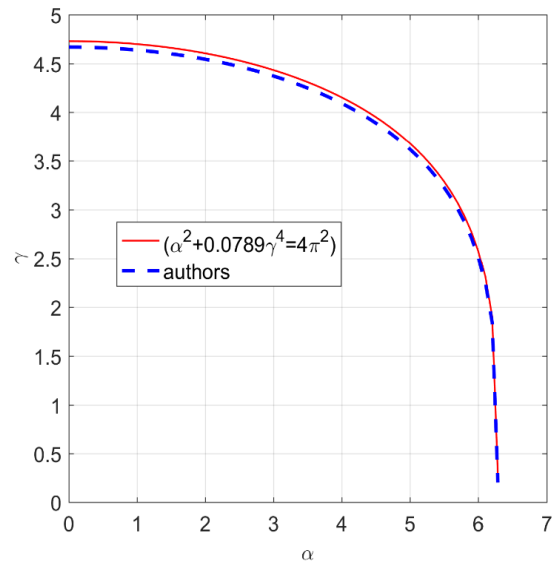
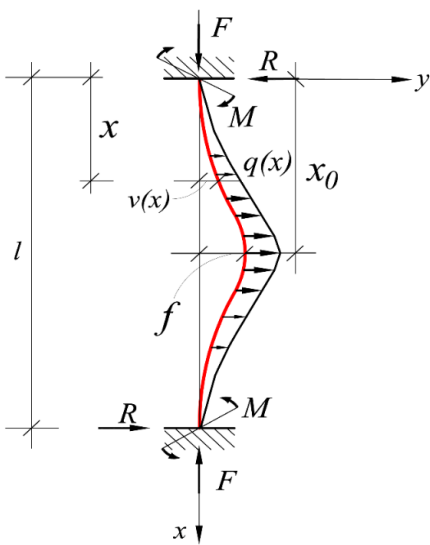


Рисунок 3.28 – Расчетные схема без учета веса «Защемление-Защемление»

Рисунок 3.29 – Зависимость между  $\alpha, \gamma$  «защемление-защемление»

При  $\gamma = 0$ , с учетом (3.96), из трансцендентного уравнения (3.114) получим неопределенность и раскрыв ее получим:

$$2\cos\alpha + \alpha\sin\alpha - 2 = 0 \quad (3.115)$$

Откуда  $\alpha = 2\pi$ . Учитывая (2.9), получим формулу Ясинского (2.35), а при  $\alpha = 0$  и  $\gamma = 4,730041$ , учитывая (3.101), получаем частный случай, для которого

$$\omega = \frac{22,37}{l^2} \sqrt{\frac{gEI_z}{q}} \quad (3.116)$$

И в этом случае соотношение (3.115) так же не совсем удобно для инженерной практики. Как и ранее приведенному уравнению (3.110) в данном случае будем иметь вид:

$$\alpha^2 + 0,0789\gamma^4 = 4\pi^2 \quad (3.117)$$

И в этом случае значения  $\alpha$  и  $\gamma$ , определяемые по (3.117), лежат в области устойчивости (рисунок 3.29).

Учитывая соотношения (3.101) окончательно получим:

$$F + 0,0789 \frac{q\omega^2 l^2}{g} = \frac{4\pi^2 EI_z}{l^2}; \quad (3.118)$$

Немаловажный факт, который хотелось бы подчеркнуть, что угловая скорость в данном случае численно равна частоте поперечных колебаний стержня.

Колебательное движение упругих пластинок (стержней) было рассмотрено Л. Эйлером [222]. Он получил следующие коэффициенты:

№	Условия закрепления стержня	коэффициенты
1	для консольного	1,8751040813
2	для стержня со свободными концами	4,7300350232
3	для шарнирного закрепления	$\pi$
4	для стержня с защемленными концами	4,7300350232

Эти результаты повторяются и у С.П. Тимошенко [261].

### 3.4.2 Решение модельных задач с учетом собственного веса

#### *Задача 1. Вариант закрепления стержня «шарнир - шарнир»*

Ниже будут приведены схемы решаемых задач и в соответствии с ними графики. Рассмотрим шарнирно опертый стержень (рисунок 3.30). Здесь  $m = 0$ . Граничные условия:

при  $x = 0, \xi = 0, v(0) = 0, \frac{d^2 v(0)}{d\xi^2} = 0$ ; надо положить  $A_0 = 0$ . Далее, при  $x = l, \xi = 1, v(1) =$

$0$  и  $\frac{d^2 v(1)}{d\xi^2} = 0$ ; и числовой поиск аналогичен предыдущему. Полученные соотношения запишем:

$$\begin{cases} A_1 k_1 + r k_r = 0 \\ A_1 z_1 + r z_r = 0 \end{cases}$$

Условие существования ненулевых решений

$$D = \begin{vmatrix} k_1 & k_r \\ z_1 & z_r \end{vmatrix} = 0$$

Процедура решения, как и ранее. Данные результатов сведены в таблицу 3.5. Зависимость между  $\beta$  и  $\gamma$  типичные и приведены на рисунке 3.31. При  $\beta = 0$  и  $\gamma = \pi$ , учитывая (3.101), получаем частный случай, т.е. формулу С.П. Тимошенко [261].

$$\omega_{кр} = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{gEI_z}{q}}; \quad (3.119)$$

При  $\beta = 2,648058$  и  $\gamma = 0$ , учитывая (3.101), получаем частный случай, т.е. формулу А.Н. Динника [55]. График зависимости между  $\beta$  и  $\gamma$  можно аппроксимировать следующей кривой:

$$\beta^2 + a\gamma^4 = b \tag{3.120}$$

Таблица 3.5 – Зависимость коэффициентов  $\gamma$  от  $\beta$  «Шарнир-Шарнир»

$\beta$	$\gamma$	$\beta$	$\gamma$	$\beta$	$\gamma$
0	3,141593	1.1	3,087032	2,2	2,562782
0.1	3,141552	1.2	3,070101	2,3	2,433567
0.2	3,141271	1.3	3,049680	2,4	2,261714
0.3	3,140517	1.4	3,025259	2,5	2,011144
0.4	3,139041	1.5	2,996233	2,6	1,535858
0.5	3,136605	1.6	2,961856	2,648057	0
0.6	3,132958	1.7	2,921203		
0.7	3,127842	1.8	2,873080		
0.8	3,120990	1.9	2,825910		
0.9	3,112116	2.0	2,747511		
1.0	3,100910	2.1	2,664743		

Как и ранее, определяя коэффициенты  $a$  и  $b$ , получим:

$$\beta^3 + 0,191\gamma^4 = 18,57 \tag{3.121}$$

И в этом случае значения  $\beta$  и  $\gamma$ , определяемые по (3.121), лежат в области устойчивости (рисунок 3.31).

Учитывая соотношения (3.101) окончательно получим:

$$ql + 0,191 \frac{q\omega^2 l^2}{g} = 18,57 \frac{EI_z}{l^2}; \tag{3.122}$$

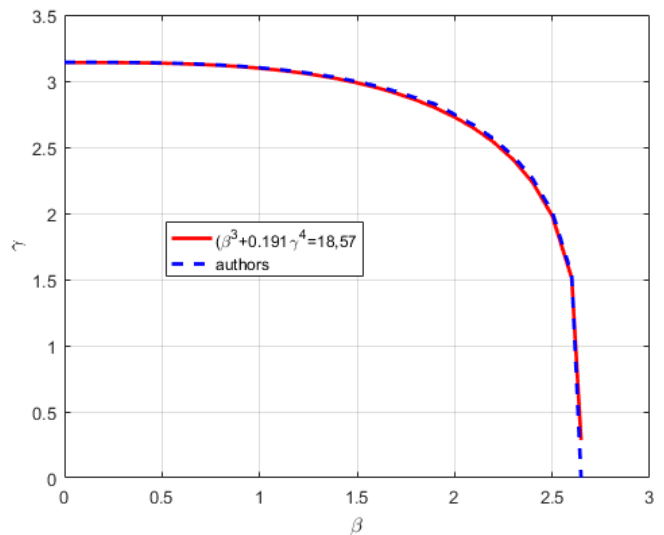
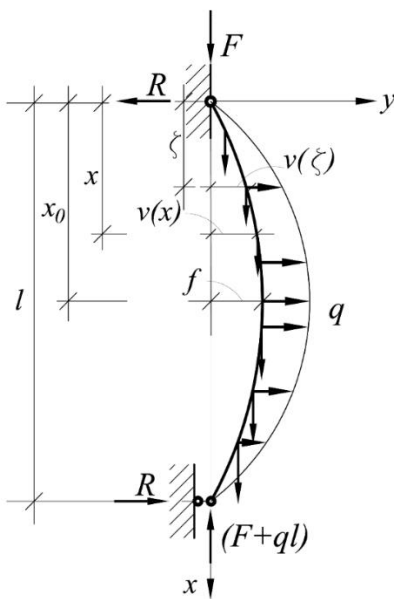


Рисунок 3.30 – Расчетные схема «Шарнир-Шарнир»

Рисунок 3.31 – Зависимость между  $\beta, \gamma$  «Шарнир-Шарнир»

Наибольшее значение прогиба (рисунок 3.30) будет при

$$0,50l < x_0 < 0,54l \quad (3.123)$$

В случае если материал стержня обладает реологическими свойствами, то для деформаций ползучести в формуле (1.122) модуль Юнга необходимо заменить на длительный модуль.

Эти замечания справедливы и для последующих задач.

### Задача 2. Вариант закрепления стержня «шарнир-зашемление»

Рассмотрим стержень, у которого верхний конец шарнирный, а нижний конец зашемлен (рисунок 3.32).

В данном случае  $m = 0$ . Согласно условию закрепления,  $v(0) = 0$ ;  $\frac{d^2v(0)}{d\xi^2} = 0$ ; надо положить  $A_0 = 0$ .

Далее, при  $x = l$ ,  $\xi = 1$ ,  $v(1) = 0$  и  $\frac{dv(1)}{d\xi} = 0$  и числовой поиск аналогичен предыдущему. Полученные данные сведены в таблицу 3.6.

Зависимость между  $\beta$  и  $\gamma$  на рисунке 3.33. При  $\beta = 0$  и  $\gamma = 3,926601$ , учитывая (3.101), получаем формулу:

$$\omega_{кр} = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{gEI_z}{q}}; \quad (3.124)$$

Таблица 3.6 – Зависимость коэффициентов  $\gamma$  от  $\beta$  «Шарнир-Зашемление»

$\beta$	$\gamma$	$\beta$	$\gamma$	$\beta$	$\gamma$	$\beta$	$\gamma$
0	3,926601	1.0	3,908745	2.0	3,775352	3.0	3,302624
0.1	3,926584	1.1	3,902766	2.1	3,749547	3.1	3,211094
0.2	3,926460	1.2	3,895570	2.2	3,720518	3.2	3,103203
0.3	3,926116	1.3	3,887002	2.3	3,687812	3.3	2,973437
0.4	3,925466	1.4	3,876929	2.4	3,650998	3.4	2,812444
0.5	3,924385	1.5	3,865199	2.5	3,609539	3.5	2,602383
0.6	3,922708	1.6	3,851648	2.6	3,562789	3.6	2,300404
0.7	3,920508	1.7	3,836099	2.7	3,509918	3.7	1,725310
0.8	3,917493	1.8	3,818350	2.8	3,449903	3.744450	0
0.9	3,913611	1.9	3,798186	2.9	3,381398		

При  $\gamma = 0$  и  $\beta = 3,744452$ , учитывая (3.101), получаем формулу А.Н. Динника [55],

$$l_{кр} = 3,74 \sqrt[3]{\frac{EI_z}{q}} \quad (3.125)$$

Приближенная зависимость (3.120) в данном случае имеет следующий вид:

$$\beta^3 + 0,221\gamma^4 = 52,50 \quad (3.126)$$

Или, учитывая соотношения (3.101) окончательно получим:

$$ql + 0,221 \frac{q\omega^2 l^2}{g} = 52,50 \frac{EI_z}{l^2}; \tag{3.127}$$

Наибольшее значение прогиба (рисунок 3.32) будет при

$$0,42l < x_0 < 0,46l \tag{3.128}$$

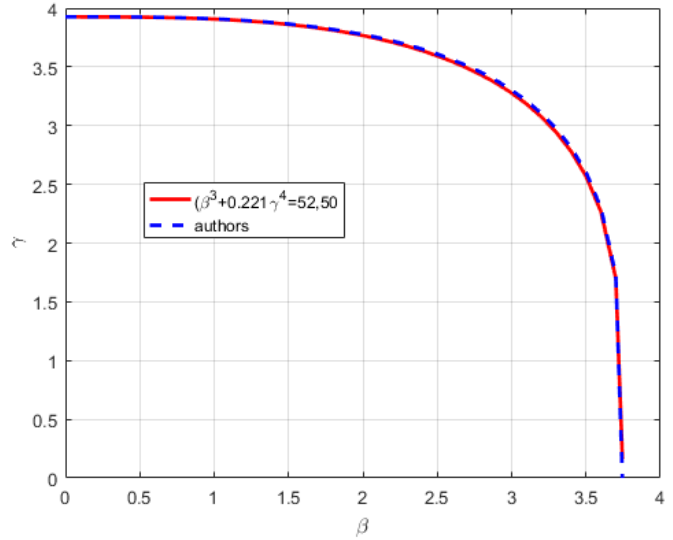
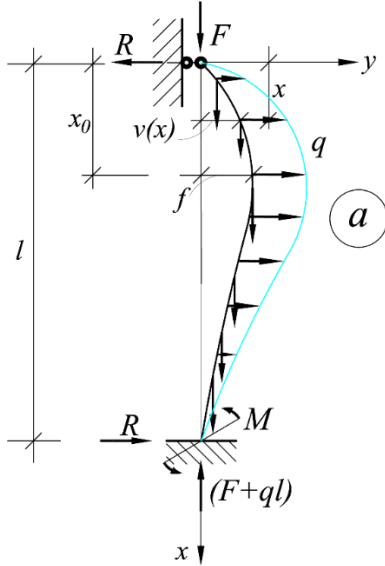


Рисунок 3.32 – Расчетная схема: Рисунок 3.33 – Зависимость между  $\beta, \gamma$  «Шарнир-Защемление»

**Задача 3. Вариант закрепления стержня «защемление-шарнир»**

Рассмотрим стержень, у которого верхний конец защемлен, а нижний конец шарнирно закреплён (рисунок 3.34). Согласно условию закрепления, при  $x = 0, \xi = 0, v(0) = 0, \frac{dv(1)}{d\xi} = 0$  надо положить  $A_0 = 0$  и  $A_1 = 0$ . Далее, при  $x = l, \xi = 1, v(1) = 0$  и  $\frac{d^2v(1)}{d\xi^2} = 0$  Используя эти условия, получаем данные, которые занесены в таблицу 3.7.

Графическая зависимость между  $\beta$  и  $\gamma$  на рисунке 3.35.

При  $\beta = 0$  и  $\gamma = 3,926601$ , учитывая (3.101), получаем формулу:

$$\omega_{кр} = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{gEI_z}{q}}; \tag{3.129}$$

При  $\gamma = 0$  и  $\beta = 3,107555$ , учитывая (3.101), получаем формулу А.Н. Динника [55],

$$l_{кр} = 3,74 \sqrt[3]{\frac{EI_z}{q}} \tag{3.130}$$

Приближенная зависимость (3.120) в данном случае имеет следующий вид:

$$\beta^3 + 0,126\gamma^4 = 30,01 \tag{3.131}$$

Или, учитывая соотношения (3.101) окончательно получим:

$$ql + 0,126 \frac{q\omega^2 l^2}{g} = 30,01 \frac{EI_z}{l^2}; \quad (3.132)$$

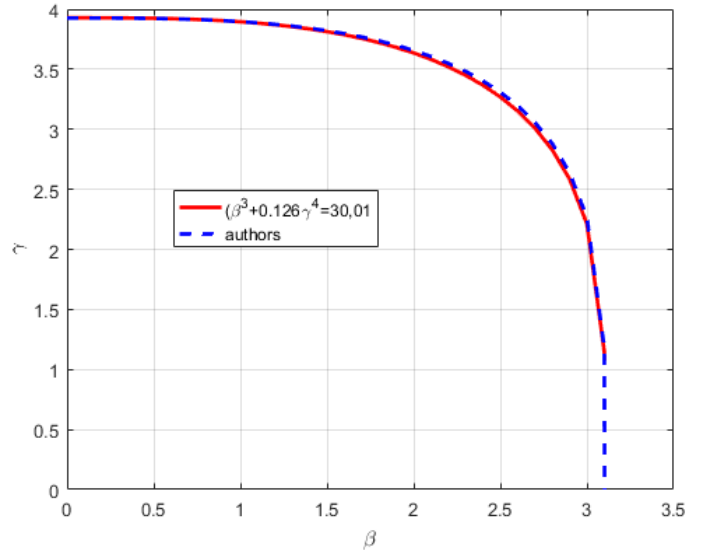
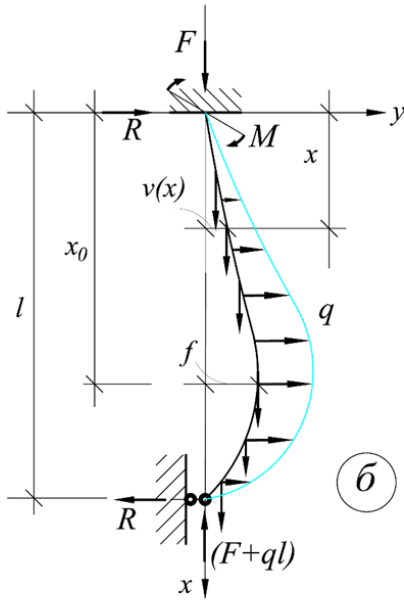


Рисунок 3.34 – Расчетная схема: Рисунок 3.35 – Зависимость между  $\beta, \gamma$  «Защемление - Шарнир»,

Наибольшее значение прогиба (рисунок 3.34) будет при  $0,58l < x_0 < 0,63l$  (3.133)

Таблица 3.7 — Зависимость коэффициентов  $\gamma$  от  $\beta$  «Защемление-Шарнир»

$\beta$	$\gamma$	$\beta$	$\gamma$	$\beta$	$\gamma$	$\beta$	$\gamma$
0	3,926601	0.8	3,911223	1.6	3,796891	2.4	3,402683
0.1	3,926542	0.9	3,904640	1.7	3,769003	2.5	3,309117
0.2	3,926363	1.0	3,896359	1.8	3,736721	2.6	3,196416
0.3	3,925796	1.1	3,886159	1.9	3,699423	2.7	3,057496
0.4	3,924689	1.2	3,873793	2.0	3,656346	2.8	2,879933
0.5	3,922868	1.3	3,858999	2.1	3,606553	2.9	2,638393
0.6	3,920141	1.4	3,841478	2.2	3,548770	3.0	2,263040
0.7	3,916322	1.5	3,820902	2.3	3,481570	3.1	1,178248
						3.107555	0

**Задача 4. Вариант закрепления стержня «защемление-защемление»**

Рассмотрим стержень, у которого верхний и нижний конец защемлен (рисунок 3.36). Согласно условию закрепления, при  $x = 0, \xi = 0, v(0) = 0, \frac{dv(0)}{d\xi} = 0$  надо положить  $A_0 = 0$  и  $A_1 = 0$ .

Далее, при  $x = l, \xi = 1, v(1) = 0$  и  $\frac{dv(1)}{d\xi} = 0$



Используя эти условия, получаем данные, которые занесены в таблицу 3.8.

Таблица 2.8 – Зависимость коэффициентов от  $\beta$  «Защемление-Защемление»

$\beta$	$\gamma$	$\beta$	$\gamma$	$\beta$	$\gamma$	$\beta$	$\gamma$
0	4,730041	1.1	4,710554	2.2	4,565386	3.3	4,058989
0.1	4,730023	1.2	4,704680	2.3	4,540033	3.4	3,972412
0.2	4,729922	1.3	4,697712	2.4	4,511933	3.5	3,873019
0.3	4,729645	1.4	4,689406	2.5	4,480604	3.6	3,757454
0.4	4,729108	1.5	4,680051	2.6	4,445740	3.7	3,620883
0.5	4,728217	1.6	4,669062	2.7	4,407039	3.8	3,455904
0.6	4,726896	1.7	4,656630	2.8	4,363960	3.9	3,248373
0.7	4,725041	1.8	4,642437	2.9	4,315970	4.0	2,971196
0.8	4,722576	1.9	4,626379	3.0	4,262404	4.1	2,549062
0.9	4,719401	2.0	4,608316	3.1	4,202454	4.2	1,416523
1.0	4,715427	2.1	4,588034	3.2	4,135092	4.210175	0

Графическая зависимость между  $\beta$  и  $\gamma$  на рисунке 3.120.

При  $\beta = 0$  и  $\gamma = 4,730041$ , учитывая (3.101), получаем формулу,

$$\omega_{кр} = \frac{22.37}{l^2} \sqrt{\frac{gEI_z}{q}}; \quad (3.134)$$

При  $\gamma = 0$  и  $\beta = 4,210175$ , учитывая (3.101), уточняем формулу А.Н. Динника [55],

$$l_{кр} = 4,21 \sqrt[3]{\frac{EI_z}{q}} \quad (3.135)$$

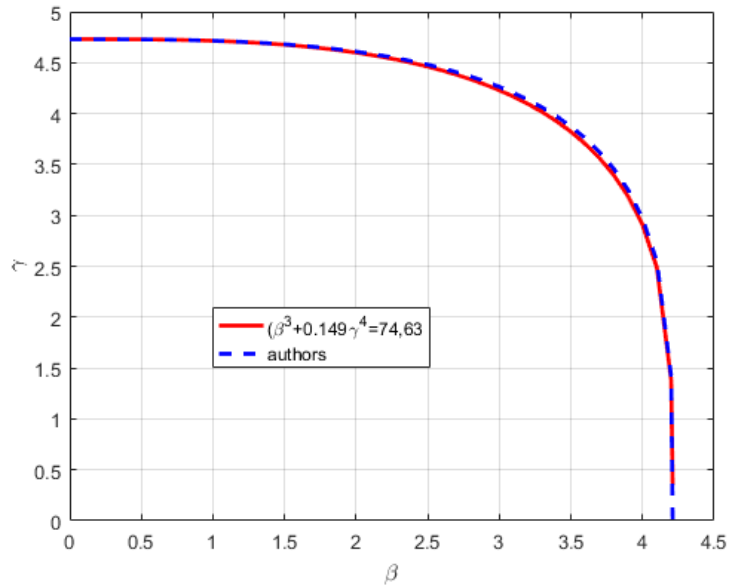
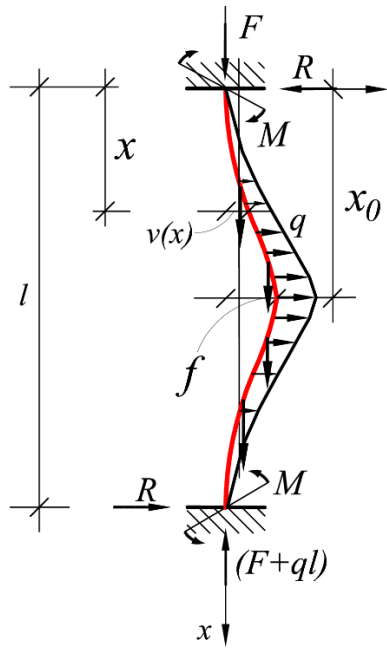


Рисунок 3.36 – Расчетная схема; Рисунок 3.37 – Зависимость между  $\beta, \gamma$  «Защемление – Защемление»

Приближенная зависимость (3.120) в данном случае имеет следующий вид:

$$\beta^3 + 0,149\gamma^4 = 74,63 \quad (3.136)$$

Или, учитывая соотношения (3.101) окончательно получим:

$$ql + 0,149 \frac{q\omega^2 l^2}{g} = 74,63 \frac{EI_z}{l^2}; \quad (3.137)$$

Наибольшее значение прогиба (рисунок 3.36) будет при

$$0,50l < x_0 < 0,545l \quad (3.138)$$

#### Задача 5. Вариант крепления стержня «свободный край-защемление»

Рассмотрим стержень, у которого верхний конец свободный от закрепления, а нижний конец жестко заделан (рисунок. 3.38).

Дифференциальное уравнение изогнутой оси имеет вид:

$$\frac{d^2 v}{d\xi^2} + \int_0^x \beta^3 \psi \frac{dv}{d\psi} d\psi - \iint_{00}^{xz} \gamma^4 v(\psi) d\psi dz = -\gamma^4 \frac{f \xi^2}{l^2} \quad (3.139)$$

здесь

$$\beta^3 = \frac{ql^3}{EI_z}; \quad m = \frac{Ml}{EI_z}; \quad r = \frac{Rl^2}{EI_z}; \quad \gamma^4 = \frac{q\omega^2 l^4}{gEI_z}; \quad (3.140)$$

$$x = \xi l; \quad \zeta = l\psi; \quad y(x) = lv(x)$$

Решение уравнения (3.139) ищем в виде ряда (2.10).

Продлав процедуры вычислений, как и ранее, получим:

$$A_2 = 0 \text{ и } A_3 = 0 \quad A_4 = -\frac{\beta^3}{24}A_1 + \frac{\gamma^4}{24}A_0 - \frac{\gamma^4 f}{24 l}$$

Последующие коэффициенты ряда определяются по формуле

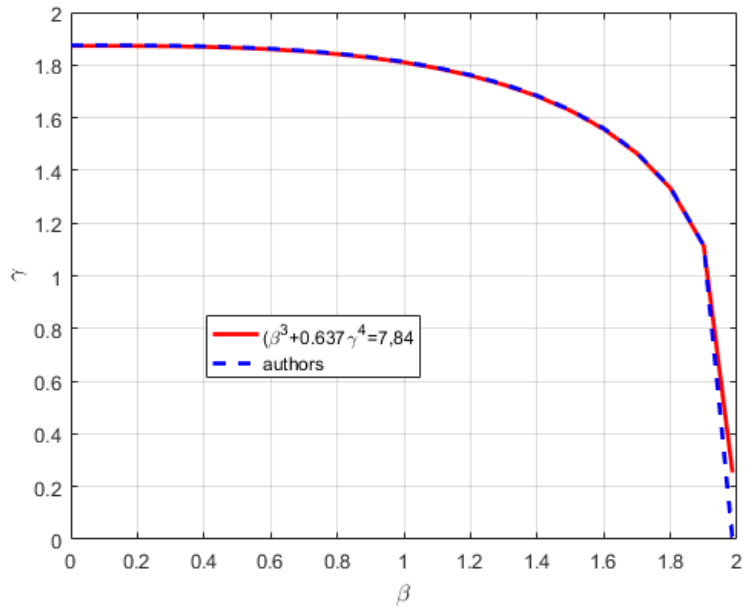
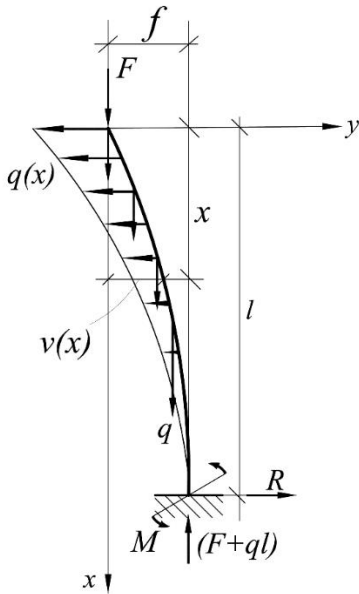


Рисунок 3.38 – Расчетная схема: Рисунок 3.39 – Зависимость между  $\beta, \gamma$  «Зашемление-Свободный край»

$$A_k = \frac{1}{k(k-1)} \left[ -\beta^3 A_{k-3} + \frac{\gamma^4}{(k-3)} A_{k-4} \right]; \quad k = 5, 6, 7, \dots, n$$

Окончательное решение уравнения (3.139) будет в виде

$$v(\xi) = A_0 + A_1 \xi + A_2 \xi^2 + A_3 \xi^3 + \sum_{k=4}^n A_k \xi^k; \quad (3.141)$$

с учетом найденных коэффициентов  $A_2, A_3, A_4$ . Числовой поиск аналогичен предыдущему. Полученные данные сведены в таблицу 3.9. График зависимости между  $\gamma$  и  $\beta$  типичный (рисунок. 3.39). При  $\gamma = 1,875104$  и  $\beta = 0$ , учитывая (3.140), получаем частный случай формулу:

$$\omega_{кр} = \frac{3.51}{l^2} \sqrt{\frac{gEI_z}{q}}; \quad (3.142)$$

При  $\gamma = 0$  и  $\beta = 1,986353$ , получаем формулу Л. Эйлера [235],

$$l_{кр} = 1,986 \sqrt[3]{\frac{EI_z}{q}} \quad (3.143)$$

Приближенная зависимость (3.120) в такой последовательности закрепления имеет следующий вид:

$$\beta^3 + 0,637\gamma^4 = 7,84$$

или, учитывая (3.140)

$$ql + 0,637 \frac{q\omega^2 l^2}{g} = 7,84 \frac{EI_z}{l^2}; \quad (3.144)$$

Таблица 2.9 — Зависимость коэффициентов  $\gamma$  от  $\beta$  «Зашемление-Свободный край»

$\beta$	$\gamma$	$\beta$	$\gamma$	$\beta$	$\gamma$
0	1,875104	0.7	1,854326	1.4	1,684206
0.1	1,875044	0.8	1,843824	1.5	1,629572
0.2	1,874627	0.9	1,830067	1.6	1,559497
0.3	1,873494	1.0	1,812436	1.7	1,466515
0.4	1,871280	1.1	1,790170	1.8	1,334707
0.5	1,867613	1.2	1,762309	1.9	1,115655
0.6	1,862101	1.3	1,727579	1.986353	0

### 3.5 Методика решения интегро-дифференциального уравнения изогнутой оси балки

Известно, что дифференциальное уравнение изогнутой оси стержня постоянной или переменной жёсткости, можно свести к следующему интегро-дифференциальному соотношению:

$$\frac{d^2 v}{d\xi^2} + \int_0^\xi F(\psi) \frac{dv}{d\psi} d\psi = Q(\xi) \quad (3.145)$$

где  $F(\psi)$ ,  $Q(\xi)$  — некоторые непрерывные функции.

В свою очередь, соотношение (3.145) можно привести к линейному неоднородному интегральному уравнению Вольтерра второго рода. Введем обозначения:

$$\frac{d^2 v}{d\xi^2} = z(\xi) \quad (3.146)$$

Проинтегрируем (2.146) правую и левую часть в пределах от 0 до  $\xi$  :

$$\frac{dv}{d\xi} + \int_0^\xi z(\psi) d\psi + C_1 \quad (3.147)$$

здесь  $C_1 = \frac{dv(0)}{d\xi}$

Второе слагаемое входящее в (3.145) проинтегрируем по частям:

$$\int_0^\xi F(\psi) \frac{dv}{d\psi} d\psi = - \left( \int_0^\xi [k(\psi) - k(\xi)] z(\psi) d\psi - C_1 k(\xi) + C_2 \right), \quad (3.148)$$

где

$$k(\psi) = \int F(\psi) d\psi, \quad C_2 = C_1 k(0) \quad (3.149)$$

Подставив (3.146) и (3.148) в соотношение (3.145), получим соответственно линейное неоднородное интегральное уравнение Вольтерра второго рода:

$$z(\xi) = \int_0^{\xi} [k(\psi) - k(\xi)] z(\psi) d\psi + Q(\xi) - C_1 k(\xi) + C_2 \quad (3.150)$$

Здесь  $k(\xi, \psi) = k(\psi) - k(\xi)$  — ядро уравнения,  $f(\xi) = Q(\xi) - C_1 k(\xi) + C_2$  — свободный член. Зададимся решением уравнения (2.150) в виде ряда, расположенного по степеням параметра  $\lambda$  и имеющий следующий вид:

$$z(\xi) = \sum_{k=0}^n \lambda^k z_k(\xi) \quad (3.151)$$

Ряд (3.151) подставим в (3.150):

$$\sum_{k=0}^n \lambda^k z_k(\xi) = \sum_{k=0}^n \lambda^{k+1} \int_0^{\xi} k(\xi, \psi) z_k(\psi) d\psi + f(\xi), \quad (3.152)$$

Отсюда получим формулы для последовательного определения функций  $z_k(\xi)$

$$\begin{aligned} z_k(\xi) &= f(\xi), \\ z_1(\xi) &= \int_0^{\xi} k(\xi, \psi) z_0(\psi) d\psi, \\ z_2(\xi) &= \int_0^{\xi} k(\xi, \psi) z_1(\psi) d\psi, \\ \dots \\ z_n(\xi) &= \int_0^{\xi} k(\xi, \psi) z_{n-1}(\psi) d\psi, \end{aligned} \quad (3.153)$$

Чтоб продемонстрировать, на сколько просто решение уравнения вида (3.145), рассмотрим классические случаи нагружения и закрепления стержня.

Уравнение (2.3) запишем иначе, так как теперь жесткости переменные:

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \int_0^x \left( \frac{F}{EI_z} + \frac{q}{EI_z} \zeta \right) \frac{dv}{d\zeta} d\zeta = \frac{M}{EI_z} - \frac{R}{EI_z} x \quad (3.154)$$

Далее удобно рассматривать разрешающие уравнения в безразмерных величинах. Сделаем следующую замену:

$$x = a\xi; \quad \zeta = a\psi; \quad y(x) = av(x) \quad (3.155)$$

Здесь  $a$  — некоторая положительная постоянная

$$\frac{d^2 v}{d\xi^2} = \int_0^\xi \left( \frac{F a^2}{EI_z} + \frac{q a^3}{EI_z} \psi \right) \frac{dv}{d\psi} d\psi = m - r \xi \quad (3.156)$$

Отмечая соответствия уравнений (2.156) и уравнения (2.145) имеем:

$$F(\psi) = \left( \frac{F a^2}{EI_z} + \frac{q a^3}{EI_z} \psi \right), \quad Q(\xi) = m - r \xi \quad (3.157)$$

1. При шарнирном закреплении стержня  $m = 0$  и при действии только силы  $F$  при  $r = 0$  уравнение (3.156) принимает вид:

$$\frac{d^2 v}{d\xi^2} = \int_0^\xi \frac{dv}{d\psi} d\psi = 0 \quad (3.158)$$

где принято

$$a = \sqrt{\frac{EI_z}{F}} \quad (3.159)$$

Интегральное уравнение (3.150) примет более упрощенный вид:

$$z(\xi) = \int_0^\xi (\psi - \xi) z(\psi) d\psi - C_1 k(\xi) \quad (3.160)$$

Решение (2.160) по формулам (2.153) такое:

$$z(\xi) = -C_1 \cdot \left( \xi - \frac{\xi^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{\xi^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \dots \right) \quad (2.161)$$

или

$$z(\xi) = \frac{d^2 v}{d\xi^2} = -C_1 \sin \xi \quad (2.162)$$

Проинтегрируем (2.162) дважды, получим:

$$v = C_1 \sin \xi \quad (2.163)$$

При

$$x = l \quad \xi = \left( \frac{x}{a} \right) = \left( \frac{l}{a} \right), \quad v \left( \frac{l}{a} \right) = 0$$

Следовательно,

$$v = C_1 \sin \left( \frac{l}{a} \right) = 0 \quad (2.164)$$

$C_1 \neq 0$ , значит  $\sin \left( \frac{l}{a} \right) = 0$ . Откуда. Взяв наименьший корень, имеем:

$$\frac{l}{a} = \pi$$

Учитывая соотношение (3.159), находим, что

$$l_{кр} = \pi \sqrt{\frac{EI_z}{F}} \quad \text{или} \quad F_{кр} = \frac{\pi^2 EI_z}{l^2} \quad (3.165)$$

т.е. получили формулу Эйлера.

При шарнирном закреплении стержня и учете собственного веса, соотношение (3.156) примет вид:

$$\frac{d^2 v}{d\xi^2} = \int_0^\xi \frac{dv}{d\psi} d\psi = r\xi \quad (3.166)$$

Здесь

$$a = \sqrt[3]{\frac{EI_z}{q}}$$

Решение  $z(\xi)$  имеет вид:

$$z(\xi) = \int_0^\xi \frac{1}{2} (\psi^2 - \xi^2) z(\psi) d\psi + r\xi - \frac{C_1}{2} \xi^2 \quad (3.167)$$

Как и ранее по формуле (3.153) получим решение:

$$z(\xi) = r \cdot \left( \xi - \frac{\xi^4}{2 \cdot 4} + \frac{\xi^7}{2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7} - \dots \right) - \frac{C_1}{2} \left( \xi^2 - \frac{\xi^5}{3 \cdot 5} + \frac{\xi^8}{3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8} - \dots \right) \quad (3.168)$$

или

$$z(\xi) = \frac{d^2 v}{d\xi^2} = r \cdot \xi \cdot B_1(\xi) - \frac{C_1}{2} \xi^2 C_1(\xi) \quad (3.169)$$

здесь

$$B_1(\xi) = \left( 1 - \frac{\xi^4}{2 \cdot 4} + \frac{\xi^7}{2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7} - \dots \right) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \xi^{3n}}{2 \cdot 4 \dots (3n-1)(3n+1)},$$

или

$$B_1(\xi) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3 \dots 3n}{(3n+1)!} \xi^{3n}, \quad (3.170)$$

$$C_1(\xi) = \left( 1 - \frac{\xi^5}{3 \cdot 5} + \frac{\xi^8}{3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8} - \dots \right) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \xi^{3n}}{3 \cdot 5 \dots 3n(3n+2)}$$

или

$$C_1(\xi) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n 4 \dots (3n+1)}{(3n+2)!} \xi^{3n}, \quad (3.171)$$

Используя граничные условия, определяем наименьший корень  $\frac{l}{a} = 2,64$  или, учитывая  $a = \sqrt[3]{\frac{EI_z}{q}}$  получим формулу Динника [55].

Предложенная методика решения интегро-дифференциальных уравнений (3.145) и в частности, уравнение (2.156), проще классических методов решения уравнения такого типа. Это позволяет рассматривать различные варианты нагружения.

### 3.6 Выводы по главе 3

Представлен вывод разрешающего уравнения для расчета на устойчивость плоской формы изгиба балок прямоугольного сечения с учетом ползучести и начальных несовершенств. Данное уравнение применимо и для балок переменной жесткости, а также для конструкций из вязкоупругопластического материала. Кроме того, оно позволяет использовать произвольный закон ползучести, в том числе и нелинейный.

Исследован процесс потери устойчивости при ползучести для полимерной балки с использованием нелинейного уравнения Максвелла-Гуревича, а также для деревянной балки с использованием линейного закона Максвелла-Томпсона.

Установлено, что как в случае линейного, так и нелинейного уравнения связи между деформациями ползучести и напряжениями существует величина длительной критической нагрузки. Если действующая на балку нагрузка меньше длительной критической, то ползучесть носит ограниченный характер, и потеря устойчивости не наблюдается. При нагрузке равной длительной критической перемещения растут с постоянной скоростью, а при превышении этой величины скорость роста перемещений возрастает во времени.

Проведено исследование ползучести деревянной и полимерной балки на примере консольной конструкции с сосредоточенной силой на конце при нагрузке выше длительной критической  $F_{дл}$ . Установлено, что при  $F > F_{дл}$  начальные несовершенства оказывают существенное влияние на величину критического времени, поэтому нагрузки, действующие на балку, не должны превышать длительную критическую. Также установлено, что при  $F > F_{дл}$  максимальная величина нормального напряжения сначала убывает во времени, а затем с определенного момента начинается рост напряжений  $\sigma_x$ . Время, соответствующее на графиках  $\sigma_x(t)$  точке минимума нормальных напряжений, можно принять за критическое. Изменение касательных напряжений во времени носит исключительно возрастающий характер.



Анализируя сходимость для варианта  $F = 0$ , можно сказать (таблица 1), что результат довольно быстро приближается к точному решению, начиная с четвертого приближения. Отклонение от точного решения при  $n = 4$  составляет 0,1047%.

Что касается варианта  $q = 0$ , то (таблица 2), отклонение от точного решения при  $n = 10$  составляет 4,07% в случае использования тригонометрического ряда с  $f_i = 1 - \cos\left(\frac{\pi i \xi}{2}\right)$ , а при использовании степенного ряда - 1,71%. Для функций  $f_i = 1 - \cos\left(\frac{\pi i \xi}{2}\right)$  при больших  $n$  вычислительный процесс был устойчив, но значение 4,01 с точностью до 3-го знака после запятой было получено лишь при 1000 членах ряда.

Также при  $n \geq 12$  для степенного ряда  $f_i = \xi^{i+1}$  наблюдалась потеря устойчивости вычислительного процесса (мнимые собственные значения).

Для решения авторов с базисными функциями (9) при  $n = 3$  отклонение от точного решения составляет лишь 0,078%. Таким образом, сходимость метода существенно зависит от правильного выбора базисных функций.

Исследован процесс потери устойчивости при ползучести для полимерной балки с использованием нелинейного уравнения Максвелла-Гуревича, а также для деревянной балки с использованием линейного закона Максвелла-Томпсона. Установлено, что как в случае линейного, так и нелинейного уравнения связи между деформациями ползучести и напряжениями существует величина длительной критической нагрузки. Если действующая на балку нагрузка меньше длительной критической, то ползучесть носит ограниченный характер, и потеря устойчивости не наблюдается. При нагрузке равной длительной критической перемещения растут с постоянной скоростью, а при превышении этой величины скорость роста перемещений возрастает во времени.

Получены уравнения выпучивание упругих вращающихся стержней при действии осевых сжимающих сил с учетом собственного веса постоянного и переменного поперечного сечения.

Предложена методика решения интегро-дифференциальных уравнений что проще классических методов решения уравнения такого типа. Это позволяет рассматривать различные варианты нагружения.

## 4 УСТОЙЧИВОСТЬ СТЕРЖНЕЙ И АРОК С УЧЕТОМ ВЯЗКОУПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ СВОЙСТВ МАТЕРИАЛА

### 4.1 Уравнение связи для вязкоупругопластической модели наследственного старения. Вывод разрешающих уравнений.

Древесина относится к материалам с выраженной нелинейностью деформирования как при кратковременных, так и при длительных воздействиях. Базирующиеся на линейных теориях модели ползучести древесины устанавливают ее мгновенные свойства на основе закона Гука, что не отвечает нелинейной диаграмме упругопластического типа, характерной для сжатой древесины.

Впервые вопросы совместного учета мгновенных упругопластических свойств древесины и ее ползучести стал исследовать К.П. Пятикрестовский [236]. Эти свойства им были объединены в методе длительного модуля деформации.

Указанный метод базируется на уравнении ползучести, содержащем время в явном виде, что делает невозможным его применение при сложных режимах нагружения и переменных нагрузках. В качестве закона, устанавливающего связь между напряжениями и деформациями, будем использовать уравнение вязкоупругопластической модели наследственного старения предложенное А.Г. Тамразяном [163]:

$$\varepsilon(t) = \frac{f[\sigma(t)]}{E_0(t)} - \int_{t_0}^t f[\sigma(\tau)] \cdot \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau. \quad (4.1)$$

В представленном уравнении  $f[\sigma(\tau)]$  — нелинейная функция напряжений, определяющая связь между напряжениями и мгновенными деформациями,  $C(t, \tau)$  — мера ползучести.

В качестве соотношения, устанавливающего связь между напряжениями и мгновенными деформациями для сжатой древесины, воспользуемся формулой Ф.И. Герстнера:

$$\sigma = E_0 \cdot \varepsilon - \frac{E_0^2}{4R} \varepsilon^2. \quad (4.2)$$

Значения начального модуля упругости древесины  $E_0$  и прочности  $R$  примем по К.П. Пятикрестовскому [236]:  $E_0 = 1.48 \cdot 10^4$  МПа,  $R = 55$  МПа. Сжимающие напряжения и деформации в формулу (4.2) подставляются со знаком «+». Для растянутой зоны будем предполагать упругую работу вплоть до разрушения.

Выражая из (4.2) деформацию через напряжение, получим:

$$\varepsilon = \frac{2R}{E_0} \left[ 1 - \left( \sqrt{1 - \frac{\sigma}{R}} \right) \right]. \quad (4.3)$$

Из (4.3) следует, что функция напряжений имеет следующий вид:

$$f(\sigma) = 2R \left[ 1 - \left( \sqrt{1 - \frac{\sigma}{R}} \right) \right]. \quad (4.4)$$

Для меры ползучести  $C(t, \tau)$  древесины воспользуемся формулой, в соответствии с работой В.А. Зедгенидзе и И.Е. Прокоповича [100]:

$$C(t, \tau) = (C_0 + A_0 \exp(-\gamma\tau)) \cdot [1 - B_1 \exp(-\gamma_1\tau(t - \tau))], \quad (4.5)$$

где

$$C_0 = 2,87 \cdot 10^{-5} (\text{МПа})^{-1}, A_0 = 10,95 \cdot 10^{-5} (\text{МПа})^{-1}, B_1 = 1, \gamma_1 = \gamma = 0,15 \frac{1}{\text{сут}},$$

Уравнение (4.1) представим, как и ранее, в виде суммы деформаций:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E(\sigma, t)} + \varepsilon^* \quad (4.6)$$

где

$$E = \frac{E_0 \sigma}{f(\sigma)} - \text{секущий модуль}, \quad \varepsilon^* = - \int_{t_0}^t f[\sigma(\tau)] \cdot \frac{\partial C(t, \tau)}{\partial \tau} d\tau - \text{деформация ползучести}$$

При использовании меры ползучести в виде (4.5) деформацию ползучести можно представить в виде суммы двух составляющих:

$$\varepsilon^* = \varepsilon_1^* + \varepsilon_2^*,$$

$$\varepsilon_1^* = \gamma C_0 B_1 \int_{t_0}^t f[\sigma(\tau)] \exp(-\gamma_1\tau(t - \tau)) d\tau; \quad \varepsilon_2^* = A_0 \gamma \int_{t_0}^t f[\sigma(\tau)] \exp(-\gamma\tau) d\tau \quad (4.7)$$

Дифференцируя (4.7) по времени, получим:

$$\frac{\partial \varepsilon_1^*}{\partial t} = \gamma \{ C_0 B_1 f[\sigma(\tau)] \exp(-\gamma_1\tau(t - \tau)) \}; \quad \frac{\partial \varepsilon_2^*}{\partial t} = A_0 \gamma \{ f[\sigma(\tau)] \exp(-\gamma\tau) \}; \quad (4.8)$$

Дифференциальная форма (4.8) позволяет осуществлять расчет во времени пошагово, определяя деформации ползучести на следующем шаге по деформациям и напряжениям на предыдущем шаге с использованием метода Эйлера или Рунге-Кутты. При использовании метода Эйлера приращение деформации ползучести последующего момента времени можно записать:

$$\Delta \varepsilon^* = \left( \frac{\partial \varepsilon_1^*}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon_2^*}{\partial t} \right) \Delta t \quad (4.9)$$

Вывод уравнения и методику расчета рассмотрим на примере шарнирно опертого ко концам стержня с начальной погибью  $v_0 = f(x)$  (рисунок 4.1). Физически нелинейную задачу сведем к последовательному решению упругих задач для стержня, у которого модуль упругости изменяется по высоте сечения и длине, т.е.  $E = f(x, y)$ .

Деформация стержня в соответствии с гипотезой плоских сечений представляется в виде:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + y\chi \quad (4.10)$$

где  $\varepsilon_0$  — осевая деформация,  $\chi = - \left( \frac{d^2 v}{dx^2} \right)$  — изменение кривизны.

Подставляя (4.10) в (4.6) и выражая напряжение через деформацию, получим:

$$\sigma = E(y)(\varepsilon - \varepsilon^*) = E(y)(\varepsilon_0 + y\chi - \varepsilon^*) \quad (4.11)$$

Продольная сила и изгибающий момент связаны с напряжением интегральными зависимостями:

$$N = -F = \int_A \sigma dA; \quad M = \int_A \sigma \cdot y dA; \quad (4.12)$$

где  $A$  – площадь поперечного сечения элемента.

Подставив (4.11) в (4.12), имеем:

$$\begin{aligned} N &= \int_A \sigma dA = \int_A E(y)(\varepsilon_0 + y\chi - \varepsilon^*) dA = \varepsilon_0 \int_A E(y) dA + \chi \int_A E(y)y dA - \\ &\quad \underbrace{\int_A E(y)\varepsilon^* dA}_{N^*}; \\ M &= \int_A \sigma \cdot y dA = \int_A E(y)y(\varepsilon_0 + y\chi - \varepsilon^*) dA = \varepsilon_0 \int_A E(y)y dA + \chi \int_A E(y)y^2 dA - \\ &\quad \underbrace{\int_A E(y)\varepsilon^* y dA}_{M^*}; \end{aligned}$$

Полученные соотношения представим в матричном виде:

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = [D] \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_0 \\ \chi \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} N^* \\ M^* \end{Bmatrix} \quad (4.13)$$

где

$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_0 \\ \chi \end{Bmatrix}$  – вектор обобщённых деформаций,

$$N^* = -F = \int_A E(y)\varepsilon^* dA; \quad M^* = \int_A E(y) \cdot y\varepsilon^* dA;$$

$[D] = \begin{bmatrix} EA & ES \\ ES & EI \end{bmatrix}$  – матрица приведенных жесткостей сечения, которые определяются по

формулам:

$$EA = \int_A E(y) dA; \quad ES = \int_A E(y) \cdot y dA; \quad EI = \int_A E(y) \cdot y^2 dA; \quad (4.14)$$

Выразим из (4.13) величины  $\varepsilon_0$  и  $\chi$ :

$$\chi = -\frac{ES(F - N^*) + EA(M + M^*)}{ES^2 - EI \cdot EA} \quad (4.15)$$

$$\varepsilon_0 = \frac{ES \cdot (M + M^*) + EI(F - N^*)}{ES^2 - EI \cdot EA} \quad (4.16)$$

Учитывая, что  $\chi = -\left(\frac{d^2v}{dx^2}\right)$ ;  $M = F(v + v_0)$ , получим из (4.15) основное разрешающее уравнение:

$$\frac{d^2v}{dx^2} \left( EI - \frac{ES^2}{EA} \right) + Fv = -Fv_0 - \frac{ES}{EA}F - M^* + \frac{ES}{EA}N^* \quad (4.17)$$

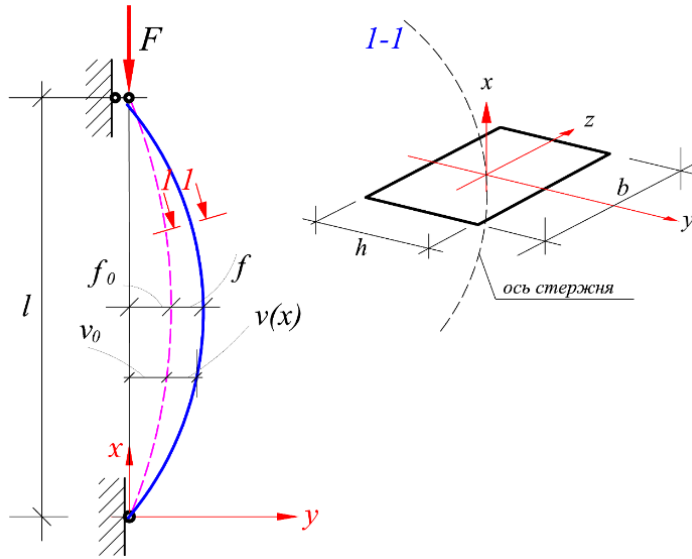


Рисунок 4.1. Расчетная схема

При приложении нагрузки порциями  $\Delta F$  уравнение (4.17), а также равенство (4.16) следует записать в приращениях. Приращение изгибающего момента определяется как:

$$\Delta M = (F + \Delta F)(v + v_0 + \Delta v) - F(v + v_0) = F\Delta v + \Delta F(v_0 + \Delta v) + \Delta F\Delta v \quad (4.18)$$

Последним слагаемым в (4.18) можно пренебречь в виду его более высокого порядка малости. Выражения (4.16) и (4.17) в приращениях примут вид:

$$\frac{d^2\Delta v}{dx^2} \left( EI - \frac{ES^2}{EA} \right) + F\Delta v = -F(v + v_0) - \Delta M^* - \frac{ES}{EA}\Delta F + \frac{ES}{EA}N^*; \quad (4.19)$$

$$\Delta\varepsilon_0 = \frac{ES \cdot (\Delta M + \Delta M^*) + EI(\Delta F - \Delta N^*)}{ES^2 - EI \cdot EA} \quad (4.20)$$

При вычислении жесткостей в формулах (4.19), (4.20) следует использовать касательный модуль, определяемый для сжатой зоны по формуле:

$$E_{\text{кас}} = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = E_0 - \frac{E_0^2}{2R}\varepsilon \quad (4.21)$$

На первом этапе выполняется расчет при  $t = 0$ . Решение уравнения (4.19) выполняется методом конечных разностей. На каждом шаге по нагрузке после определения приращения прогиба определяются приращения напряжений и полных деформаций, выполняется

корректировка касательного модуля и приведенных жесткостей. Затем аналогичным образом производится расчет на ползучесть. Приращения фиктивных нагрузок от ползучести определяются как:

$$\Delta N^* = \int_A E_{\text{кас}}(y) \Delta \varepsilon^* dA; \quad \Delta M^* = \int_A E_{\text{кас}}(y) \cdot y \Delta \varepsilon^* dA; \quad (4.22)$$

#### 4.1.1 Решение модельной задачи.

Была решена серия тестовых задач для деревянного стержня с квадратным сечением. Сечение  $b \times h = 3 \times 3$  см длиной  $l = 63$  см. Гибкость  $\lambda$  данного стержня составляет около 73, Эйлера сила – 24,8 кН. Начальная погибь задавалась синусоидой  $v_0 = f_0 \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right)$

На рисунке 4.2 представлена зависимость стрелы прогиба от величины нагрузки при кратковременном нагружении при различных значениях  $f_0$ . Из приведенного графика видно, что начальные несовершенства существенно влияют на величину критической нагрузки.

Определим для рассмотренного стержня критическую нагрузку на основе касательно-модульной теории. В соответствии с данной теорией критическое напряжение определяется:

$$\sigma = \frac{\pi^2 E_{\text{кас}}}{\lambda^2} \quad (4.23)$$

Подставив (4.21) в (4.23), получим:

$$\sigma = \frac{\pi^2}{\lambda^2} \left( E_0 - \frac{E_0^2}{2R} \varepsilon \right) \quad (4.24)$$

Далее вместо  $\varepsilon$  подставим в (4.24) выражение (4.3):

$$\sigma = \sigma_3 \sqrt{1 - \frac{\sigma}{R}} \quad (4.25)$$

где  $\sigma_3 = \frac{E_0 \pi^2}{\lambda^2}$  — Эйлера критическое напряжение.

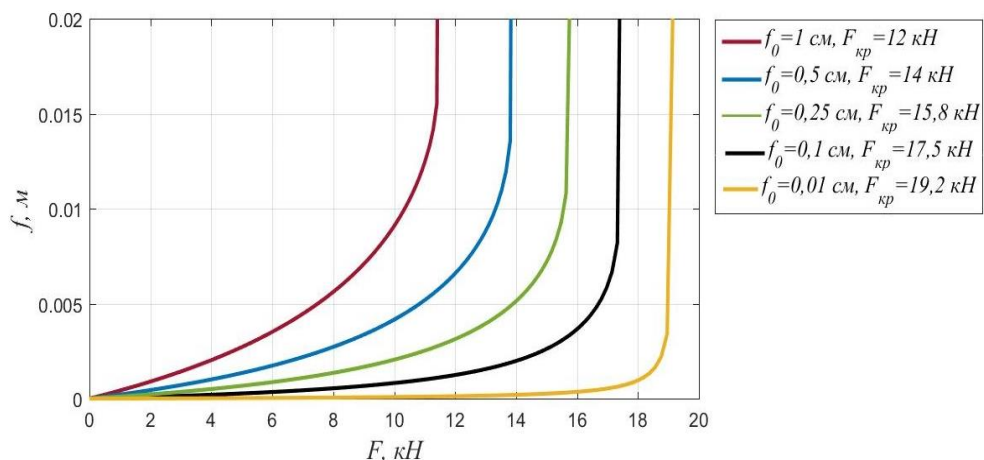


Рисунок 4.2. Зависимость стрелы прогиба от нагрузки при различных несовершенствах.

Решая данное уравнение относительно  $\sigma$ , получим следующую формулу критического напряжения:

$$\sigma_{кр} = \frac{\sigma_э}{2} \sqrt{\frac{\sigma_э^2}{R^2} + 4} - \frac{\sigma_э}{R} \quad (4.26)$$

Вычисленная с использованием формулы (4.26) критическая сила  $F_{кр} = \sigma_{кр}A = 19,4$  кН.

Касательно-модульная теория применима для идеальных стержней. Полученное нами значение критической силы для стержня, близкого к идеальному ( $F_{кр} = 19,2$  кН при  $f_0 = 0,01$  см) хорошо согласуется с решением на основе касательно-модульной теории, что свидетельствует о достоверности результатов.

Перейдем далее к случаю длительного действия нагрузки.

На рисунке 4.3 приведены графики роста прогиба в середине пролета по отношению к первоначальному, построенные при  $F = 10$  кН для трех значений стрелы начальной погиби:  $f_0 = 0,01$  см,  $f_0 = 0,015$  см,  $f_0 = 0,02$  см.

Из представленных графиков видно, что начальные несовершенства при одной и той же нагрузке существенно влияют на величину критического времени. В первом случае наблюдается заметный рост прогиба (в 12 раз), но он приходит к конечному значению, во втором случае происходит потеря устойчивости через 50 суток, а в третьем – через 15,8 суток.

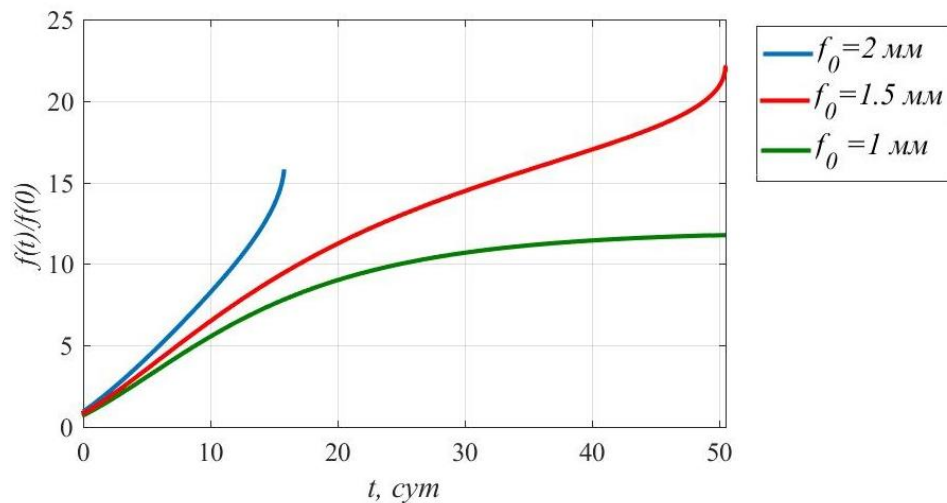


Рисунок 4.3. Изменение максимального прогиба во времени при различных значениях стрелы начальной погиби

#### 4.2 Метод конечных элементов в задаче расчета на устойчивость деревянных арок с учетом геометрической нелинейности

Решение задачи с учетом физически и геометрически нелинейности авторами будет выполнено при помощи метода конечных элементов. Используемый конечный элемент представлен на рисунок 4.4. Осевая деформация при учете геометрической нелинейности представляет сумму линейной и нелинейной составляющей:

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_0^l + \varepsilon_0^n = \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left( \frac{dv}{dx} \right)^2. \quad (4.27)$$

Где  $\varepsilon_0^l$  – относительные линейные деформации,  $\varepsilon_0^n$  – относительные нелинейные деформации

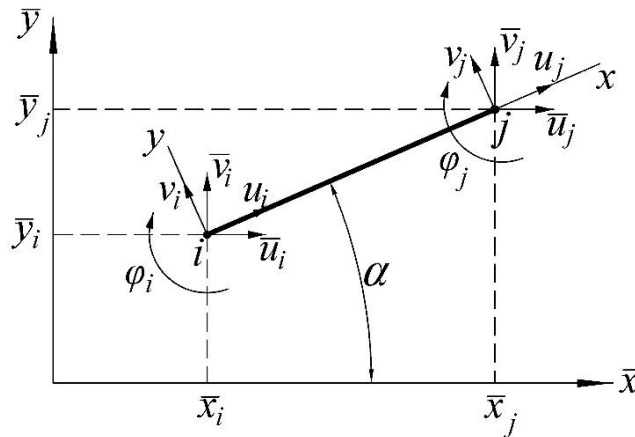


Рисунок 4.4. Стержневой конечный элемент

Второе слагаемое  $\frac{1}{2} \left( \frac{dv}{dx} \right)^2$  в (4.27) вызванную продольным изгибом, отвечает за геометрическую нелинейность.

Используя вариационный принцип Лагранжа, получим систему уравнений МКЭ. Энергия деформации стержневого КЭ, как и ранее приведем в следующем виде:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V \sigma \varepsilon^{el} dV = \frac{1}{2} \int_V E(y) (\varepsilon_0^l + \varepsilon_0^n + y\chi - \varepsilon^*)^2 dV, \quad (4.28)$$

Распишем интеграл потенциальной энергии (4.28) в виде составляющих четырех интегралов:



$$\begin{aligned} \Pi = \frac{1}{2} & \left( \int_V E(y) \varepsilon_0^l (\varepsilon_0^l + \varepsilon_0^n + y\chi - \varepsilon^*) dV + \int_V E(y) \varepsilon_0^n (\varepsilon_0^l + \varepsilon_0^n + y\chi - \varepsilon^*) dV \right. \\ & + \int_V E(y) y\chi (\varepsilon_0^l + \varepsilon_0^n + y\chi - \varepsilon^*) dV \\ & \left. - \int_V E(y) \varepsilon^* (\varepsilon_0^l + \varepsilon_0^n + y\chi - \varepsilon^*) dV \right) \end{aligned} \quad (4.29)$$

Первый интеграл в (4.29) запишется в виде:

$$\begin{aligned} \int_V E(y) \varepsilon_0^l (\varepsilon_0^l + \varepsilon_0^n + y\chi - \varepsilon^*) dV &= \int_0^l \varepsilon_0^l \int_A E(y) (\varepsilon_0^l + y\chi - \varepsilon^*) dAdx + \\ &+ \int_0^l \varepsilon_0^l \cdot \varepsilon_0^n \int_A E(y) dAdx = \int_0^l \varepsilon_0^l N dx + \int_0^l \varepsilon_0^l \cdot \varepsilon_0^n \cdot E A dx, \end{aligned} \quad (4.30)$$

где  $l$  – длина конечного элемента.

Второй интеграл в (4.29) представим в следующей форме:

$$\begin{aligned} \int_V E(y) \varepsilon_0^n (\varepsilon_0^l + \varepsilon_0^n + y\chi - \varepsilon^*) dV &= \int_0^l \varepsilon_0^l \cdot \varepsilon_0^n \int_A E(y) dAdx + \int_V E(y) (\varepsilon_0^n)^2 dV + \\ &+ \int_0^l \varepsilon_0^n \cdot \chi \int_A E(y) y dAdx - \int_0^l \varepsilon_0^n \int_A E(y) \varepsilon^* dAdx. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Вторым слагаемым в правой части (4.31) можно пренебречь ввиду его более высокого порядка малости. Третий интеграл в (4.29) записывается в виде:

$$\begin{aligned} \int_V E(y) y\chi (\varepsilon_0^l + \varepsilon_0^n + y\chi - \varepsilon^*) dV &= \int_0^l \chi \int_A E(y) y (\varepsilon_0^l + y\chi - \varepsilon^*) dAdx + \\ &+ \int_0^l \varepsilon_0^n \chi \cdot E S dx = \int_0^l M \chi dx + \int_0^l \varepsilon_0^n \chi \cdot E S dx. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Четвертый интеграл в (4.29) представим в следующем виде:

$$\begin{aligned}
\int_V E(y)\varepsilon^*(\varepsilon_0^l + \varepsilon_0^n + y\chi - \varepsilon^*)dV &= \int_0^l \chi \int_A E(y)y\varepsilon^*dAdx + \\
+ \int_0^l \varepsilon_0^l \int_A \varepsilon^*E(y)dAdx - \int_V (\varepsilon^*)^2E(y)dV &+ \int_0^l \varepsilon_0^n \int_A \varepsilon^*E(y)dAdx = \\
= \int_0^l \chi M^*dx + \int_0^l \varepsilon_0^l N^*dx + \int_0^l \varepsilon_0^n N^*dx - \int_V &(\varepsilon^*)^2E(y)dV.
\end{aligned} \tag{4.33}$$

Слагаемое  $\int_V (\varepsilon^*)^2E(y)dV$  при минимизации по вектору узловых перемещений обратится в нуль.

Завершенное выражение для энергии деформации:

$$\begin{aligned}
\Pi &= \frac{1}{2} \left( \int_0^l \varepsilon_0^l N dx + 2 \int_0^l \varepsilon_0^l \varepsilon_0^n EA dx + \int_0^l M \chi dx + 2 \int_0^l \varepsilon_0^n \chi ES dx - \int_0^l \chi M^* dx - \right. \\
&+ \left. \int_0^l \varepsilon_0^l N^* dx + 2 \int_0^l \varepsilon_0^n N^* dx \right) = \frac{1}{2} \int_0^l \{ \varepsilon_0^l \quad \chi \}^T \left( \{ N \}_M - \{ N^* \}_M \right) dx + N_{av} \int_0^l \varepsilon_0^n dx,
\end{aligned} \tag{4.34}$$

где  $N_{av} = \varepsilon_0^l EA + \chi_{av} ES - N^*$  – средняя продольная сила в элементе,  $\chi_{av}$  – среднее изменение кривизны элемента.

С учетом (4.13) формула (4.34) примет вид:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^l \{ \varepsilon_0^l \quad \chi \}^T \left( [D] \{ \varepsilon \} - 2 \{ N^* \}_M \right) dx + N_{av} \int_0^l \varepsilon_0^n dx \tag{4.35}$$

Для перемещений конечного элемента примем следующую аппроксимацию:

$$u(x) = u_1 + \frac{u_2 - u_1}{l} x; \tag{4.36}$$

$$v(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3; \tag{4.37}$$

$$\varphi(x) = \frac{dv}{dx} = \alpha_2 + 2\alpha_3 x + 3\alpha_4 x^2. \tag{4.38}$$

Коэффициенты полинома (4.37) определяются путем подстановки в (4.37) и (4.38) координат узлов:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & l & l^2 & l^3 \\ 0 & 1 & 2l & 3l^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \varphi_1 \\ v_2 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}. \tag{4.39}$$

Из (4.39) вектор  $\{ \alpha \} = \{ \alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4 \}^T$  определяется как:

$$\{\alpha\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & l & l^2 & l^3 \\ 0 & 1 & 2l & 3l^2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \varphi_1 \\ v_2 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{l^2} & -\frac{2}{l} & 0 & \frac{3}{l^2} & -\frac{1}{l} \\ 0 & \frac{2}{l^3} & \frac{1}{l^2} & 0 & -\frac{2}{l^3} & \frac{1}{l^2} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \varphi_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \varphi_2 \end{pmatrix} = [\Phi]\{U\} \quad (4.40)$$

С учетом (4.40) выражение (4.37) примет вид:

$$v = \{\Psi\}\{U\}, \quad (4.41)$$

где  $\Psi = \{1 \quad x \quad x^2 \quad x^3\}[\Phi]$ .

Вектор  $\{\varepsilon\}$  запишется в виде:

$$\{\varepsilon\} = \begin{pmatrix} \frac{du}{dx} \\ d^2v \\ -\frac{d^2v}{dx^2} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -1/l & 0 & 0 & 1/l & 0 & 0 \\ -\frac{d^2\{\Psi\}}{dx^2} \end{bmatrix} \cdot \{U\} = [B]\{U\}. \quad (4.42)$$

После подстановки (4.42) и (4.41) в (4.35) энергия деформации окончательно представляет:

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2} \{U\}^T \int_0^l [B]^T [D] [B] dx \{U\} + \{U\}^T N_{av} \cdot \frac{1}{2} \int_0^l \frac{d\{\Psi\}^T}{dx} \frac{d\{\Psi\}}{dx} dx \{U\} - \\ & - \{U\}^T \int_0^l [B]^T dx \begin{Bmatrix} N^* \\ M^* \end{Bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Минимизация функционала полной энергии по неизвестным вектору узловых перемещений задача сводится к системе алгебраических уравнений:

$$([K] + [K_g])\{U\} = \{F\} + \{F^*\}, \quad (4.44)$$

здесь

$[K]$  – матрица жесткости,  $[K_g]$  – геометрическая матрица жесткости,  $\{F^*\}$  – вклад в вектор нагрузки деформаций ползучести,  $\{F\}$  – вектор внешних нагрузок.

Матрица  $[K]$  и матрица  $[K_g]$  имеют вид соответственно:

$$[K] = \begin{bmatrix} EA/l & 0 & -ES/l & -EA/l & 0 & ES/l \\ 0 & 12EI/l^3 & 6EI/l^2 & 0 & -12EI/l^3 & 6EI/l^2 \\ -ES/l & 6EI/l^2 & 4EI/l & ES/l & -6EI/l^2 & 2EI/l \\ -EA/l & 0 & ES/l & EA/l & 0 & -ES/l \\ 0 & -12EI/l^3 & -6EI/l^2 & 0 & 12EI/l^3 & -6EI/l^2 \\ ES/l & 6EI/l^2 & 2EI/l & -ES/l & -6EI/l^2 & 4EI/l \end{bmatrix}; \quad (4.45)$$

$$[K_g] = N_{av} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6/(5l) & 1/10 & 0 & -6/(5l) & 1/10 \\ 0 & 1/10 & 2l/15 & 0 & -1/10 & -l/30 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6/(5l) & -1/10 & 0 & 6/(5l) & -1/10 \\ 0 & 1/10 & -l/30 & 0 & -1/10 & 2l/15 \end{bmatrix}; \quad (4.46)$$

$$\{F^*\} = \{-N^* \quad 0 \quad M^* \quad N^* \quad 0 \quad -M^*\}^T. \quad (4.47)$$

Отметим, что приведенные матрицы записаны в локальной системе координат элемента. При составлении глобальной матрицы жесткости для каждого элемента выполняется преобразование координат. Решение физически и геометрически нелинейной задачи осуществляется при помощи метода Ньютона Рафсона.

Первым этапом производится расчет при  $t = \tau_0$ . Приращение нагрузки выполняется квазистатически небольшими порциями с последовательным вычислением дополнительных перемещений элементов, обусловленных невязкой сил, корректировкой на каждом шаге касательного модуля упругости и координат узлов.

Расчет на ползучесть выполняется аналогично расчету на статическую нагрузку. Приращение деформаций ползучести в момент времени  $t + \Delta t$  можно определить с использованием линейной аппроксимации Эйлера.

$$\Delta \varepsilon^* = \left( \frac{\partial \varepsilon_1^*}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon_2^*}{\partial t} \right) \Delta t. \quad (4.48)$$

Предложенный подход позволяет использовать и схемы более высокого порядка точности, например, метод Рунге-Кутты четвертого порядка.

#### 4.2.1 Решение модельной задачи

Представленные уравнения и алгоритм расчета реализованы в виде программы в среде MatLab.

Был выполнен расчет шарнирно неподвижно опертой по концам арки параболического очертания под действием равномерно распределенной по длине нагрузки (рисунок 4.5) при следующих исходных данных:

$$E_0 = 1,48 \cdot 10^4 \text{ Мпа}, R = 55 \text{ Мпа}, L = 16 \text{ м}, f = 3,2 \text{ м}$$

Поперечное сечение арки прямоугольное с размерами  $b = 10 \text{ см}, h = 15 \text{ см}$ .

Арка разбивалась по длине на 40 конечных элементов, по высоте сечение делилось на 100 отрезков, количество шагов по времени принималось равным 600, а по нагрузке – 200. Максимальное количество итераций на каждом шаге – 20.

На (рисунке 4.6) приведен график зависимости прогиба в середине пролета арки от нагрузки. Штриховой линии соответствует расчету в упругой постановке.

Для контроля правильности результатов решение **упругой задачи** также выполнялось в программном комплексе ANSYS с использованием стержневых конечных элементов BEAM 188.

Количество конечных элементов принималось такое же, как и в MatLab. Существенной разницы результатов выявлено не было. При расчете в упругой постановке резкий рост перемещений, соответствующий потере устойчивости, наблюдается при  $q = 10,5 \text{ кН/м}$ , а при учете мгновенной нелинейности деформирования – при  $q = 10 \text{ кН/м}$ .

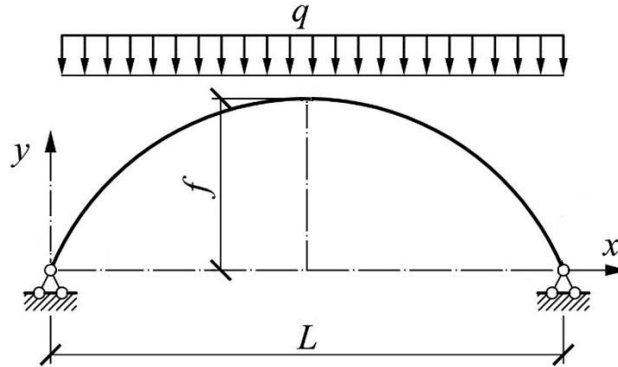


Рисунок 4.5. Расчетная схема арки

Расчет с учетом ползучести для данной арки показал, что даже при нагрузках, достаточно близких к мгновенной критической, рост перемещений носит ограниченный характер.

На (рисунке 4.7) приведен график изменения во времени прогиба в середине пролета при нагрузке  $q = 8 \text{ кН/м}$ . Штриховой линии на данном графике соответствует решение в вязкоупругой постановке. Существенной разницы в результатах не выявлено.

Также при указанных выше исходных данных был выполнен расчет трехшарнирной арки с промежуточным шарниром в середине пролета.

В этом случае мгновенная критическая нагрузка оказалась существенно ниже.

При расчете в упругой постановке она составила  $4 \text{ кН/м}$ , а мгновенная критическая нагрузка с учетом нелинейной зависимости между напряжениями и мгновенными деформациями –  $3,3 \text{ кН/м}$ .

Кривые прогиба в середине пролета от нагрузки приведены на (рисунке 4.8).

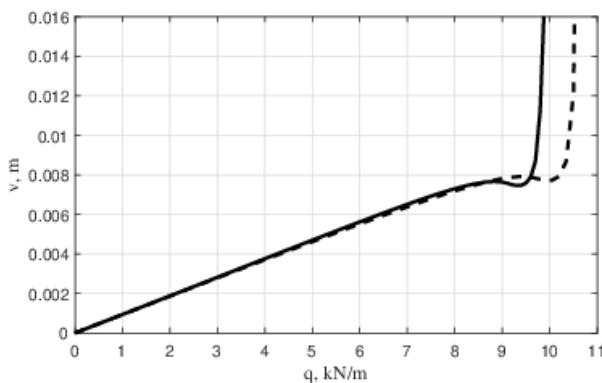


Рисунок 4.6. Зависимость максимального прогиба арки от нагрузки

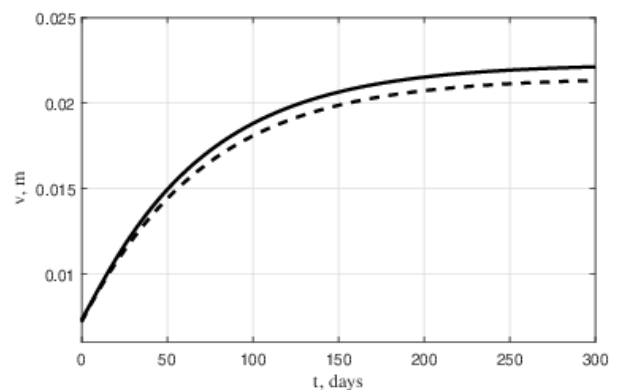


Рисунок 4.7. Развитие максимального прогиба от нагрузки  $q = 8 \text{ кН/м}$  во времени

Как и в предыдущем примере, даже при нагрузке, достаточно близкой к мгновенной критической, ползучесть носит затухающий характер. Кривые изменения во времени максимального прогиба при  $q = 3 \text{ кН/м}$  приведены на (рисунке 4.8). Обозначения такие же, как на (рисунке 4.9).

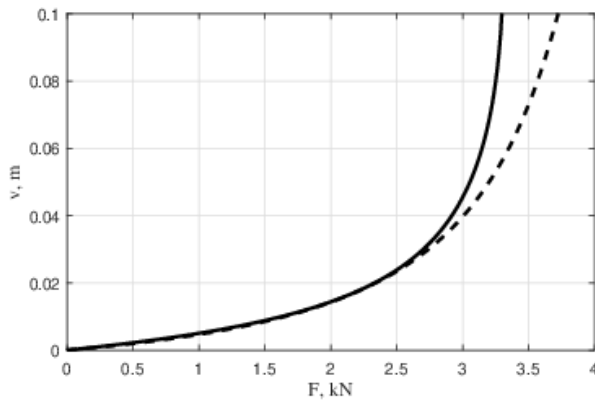


Рисунок 4.8. Зависимость максимального прогиба от нагрузки для арки с промежуточным шарниром в середине пролета: штриховая линия – упругое решение, сплошная линия – решение с учетом мгновенной нелинейности деформирования

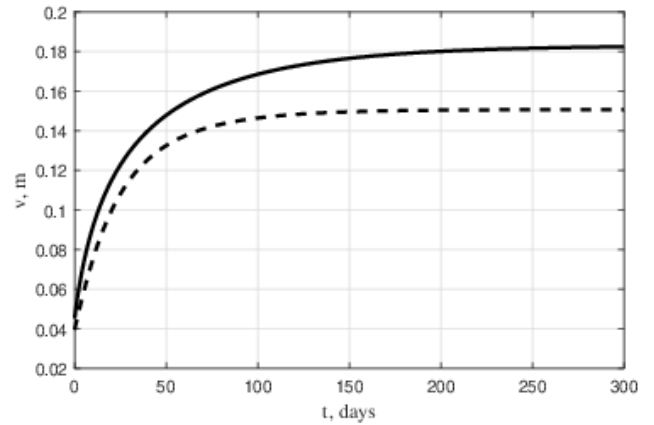


Рисунок 4.9. Кривые максимального прогиба для арки с промежуточным шарниром в середине пролета с течением времени

### 4.3 Равновесие железобетонных арок при ползучести и ее конечно-элементная реализация.

Как правило, арки являются брусками малой кривизны и соответственно их расчёт можно рассматривать согласно формулам для внецентренно сжатых железобетонных стержней.

Приведем расчетную схему и поперечное сечение железобетонного элемента (рисунке 4.10), подверженного действию изгибающего момента и продольной силы, где за положительными будем считать растягивающие напряжения.

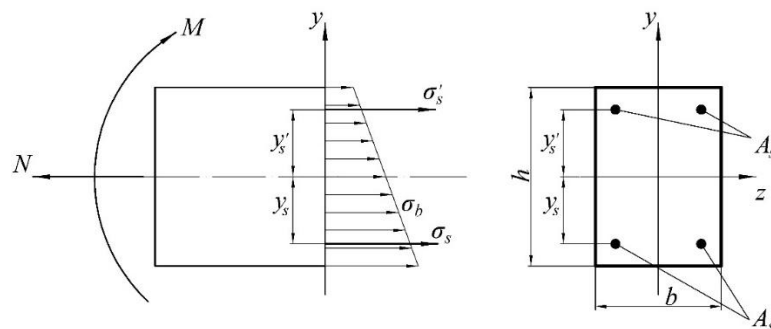


Рисунок 4.10. Расчетную схема и поперечное сечение железобетонного элемента

Как и ранее, деформация бетона представляет собой сумму осевой деформации  $\varepsilon_0$  и изгибной деформации:

$$\varepsilon_b = \varepsilon_0 - y\chi, \quad (4.49)$$

где  $\chi$  – изменение кривизны стержня.

Из условия совместности работы арматуры и бетона выражение для деформаций нижней и верхней арматуры:

$$\varepsilon_S = \varepsilon_0 + y_S\chi; \quad \varepsilon'_S = \varepsilon_0 - y'_S\chi. \quad (4.50)$$

Расстояния  $y_S$  и  $y'_S$  подставляются в формулу (4.50) по абсолютному значению.

Рассматривая физическую сторону задачи для модели вязкоупругого тела, полная деформация имеет вид:

$$\varepsilon_b = \frac{\sigma_b}{E_b} + \varepsilon_b^*. \quad (4.51)$$

Напряжения в бетоне и в арматуре определяются соответственно:

$$\begin{aligned} \sigma_b &= E_b(\varepsilon_b - \varepsilon_b^*) = E_b(\varepsilon_0 - y\chi - \varepsilon_b^*) \\ \sigma_S &= E_S\varepsilon_S = E_S(\varepsilon_0 + y_S\chi), \quad \sigma'_S = E_S\varepsilon'_S = E_S(\varepsilon_0 - y'_S\chi). \end{aligned} \quad (4.52)$$

Рассмотрев уравнение суммы моментов относительно оси  $z$  и сумму проекций всех сил на ось  $x$  имеем:

$$\begin{aligned} M &= \sigma_S A_S y_S - \sigma'_S A'_S y'_S - \int_A \sigma_b y dA = E_S A_S y_S (\varepsilon_0 + y_S \chi) - E_S A'_S y'_S (\varepsilon_0 - y'_S \chi) - \\ &\quad - b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E_b(y) [\varepsilon_0 - y\chi - \varepsilon_b^*] y dy = EI_{red} \chi - ES_{red} \varepsilon_0 + M^*, \end{aligned} \quad (4.53)$$

где  $EI_{red}$  – приведенная изгибная жёсткость.

$$EI_{red} = E_S [A_S y_S^2 + A'_S (y'_S)^2] + b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E_b(y) y^2 dy, \quad (4.54)$$

где  $M^*$  — фиктивный изгибающий момент, который нужно дополнительно приложить к упругому стержню, чтобы его изменение кривизны было такое же, как у вязкоупругого стержня;

$$M^* = b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E_b(y) \varepsilon_b^* y dy. \quad (4.55)$$

Для продольной силы справедливо следующее уравнение:

$$N = \sigma_S A_S + \sigma'_S A'_S + \int_A \sigma_b dA = E_S A_S (\varepsilon_0 + y_S \chi) + E_S A'_S (\varepsilon_0 - y'_S \chi) + \quad (4.56)$$

$$+ b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E_b(y) [\varepsilon_0 - y\chi - \varepsilon_b^*] dy = EA_{red}\varepsilon_0 - \chi ES_{red} - N^*,$$

где  $EA_{red}$  – приведенная жёсткость при центральном растяжении (сжатии),

$$EA_{red} = E_S(A_S + A'_S) + b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E_b(y) dy. \quad (4.57)$$

Величина  $ES_{red}$  для стержня с переменным по высоте модулем упругости представляет собой аналог произведения модуля упругости однородного стержня на статический момент сечения и определяется следующим образом:

$$ES_{red} = b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E_b(y) y dy + E_S(A'_S y'_S - A_S y_S). \quad (4.58)$$

Интегральная величина  $N^*$  имеет такую же размерность, как и продольная сила  $N$  и определяется как:

$$N^* = b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E_b(y) \varepsilon_b^* dy. \quad (4.59)$$

Данную величину можно охарактеризовать как фиктивную продольную силу, которую нужно дополнительно приложить к упругому стержню, чтобы его осевая деформация была такая же, как у вязкоупругого стержня.

Таким образом, для осевой деформации и изменения кривизны имеем систему из двух уравнений:

$$\begin{bmatrix} EA_{red} & -ES_{red} \\ -ES_{red} & EI_{red} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_0 \\ \chi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N + N^* \\ M - M^* \end{Bmatrix} \quad (4.60)$$

Приведем блок схему для расчёта статически определимых арок с учётом вязкоупругопластичности представлена на рисунке 4.11.



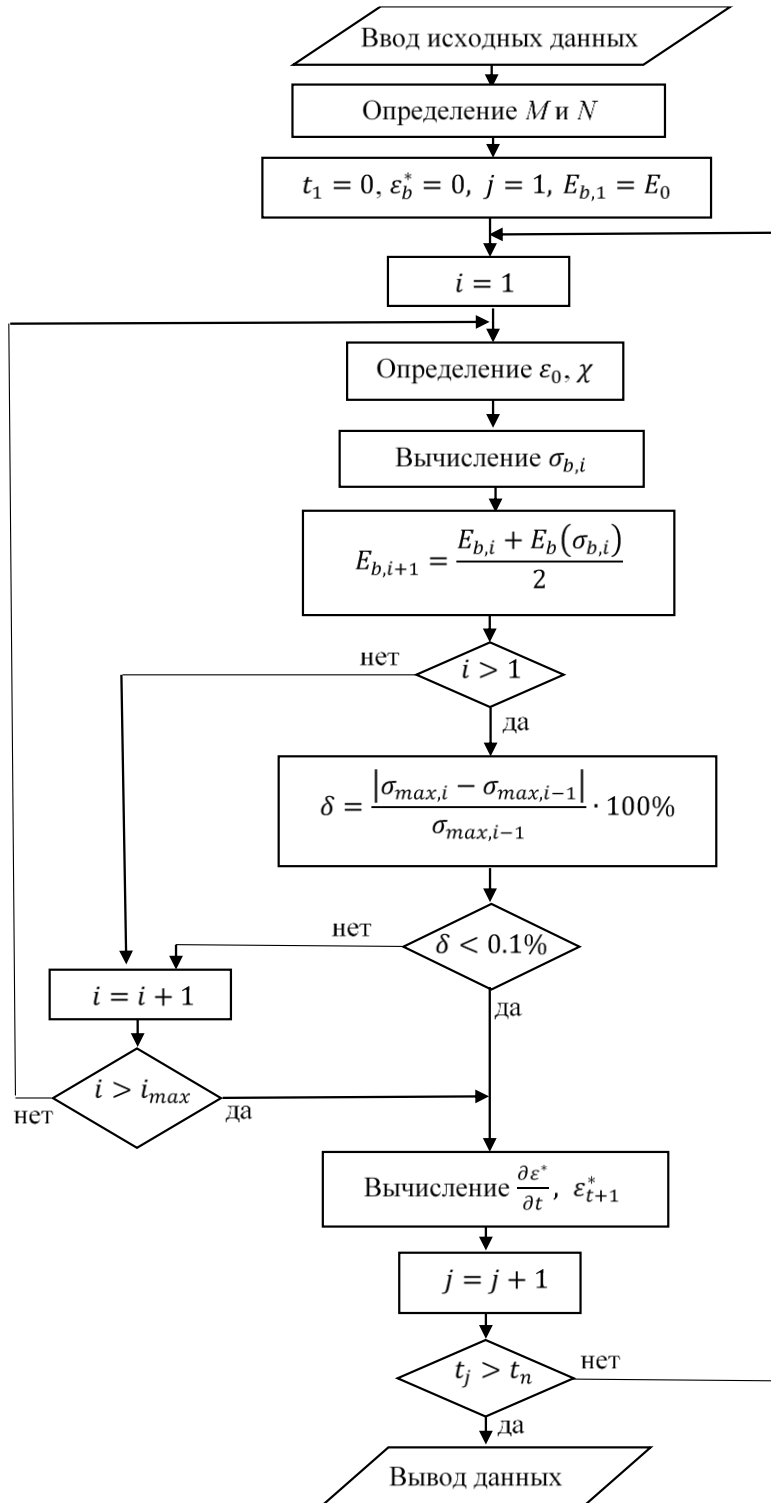


Рисунок 4.11. Блок схема для расчета статически определимых балок при ползучести

В зависимости от формы задания функции ползучести, ее определение можно представить следующим образом (таблица 4.1).

Таблица 4.1. Формы задания функции ползучести и ее определение

№	Закон ползучести	Вычисление	
1	Дифференциальная форма: $\frac{\partial \varepsilon_b^*}{\partial t}$	$\varepsilon_b^*(t + \Delta t) = \varepsilon_b^*(t) + \frac{\partial \varepsilon_b^*}{\partial t} \Delta t.$	(4.61)
2	Явная форма: $\varepsilon_b^* = f(\sigma_b, t)$	$\varepsilon_b^*(t + \Delta t) = f(\sigma_b(t), t + \Delta t).$	(4.62)
3	Интегральная форма: $\varepsilon_b^* = \int_0^t K(t, \tau) f[\sigma(\tau)] d\tau$	$\varepsilon_b^*(t) = \sum_{i=1}^k \frac{\Delta \tau_i}{6} (2f[\sigma_b(\tau_i)]K(t, \tau_i) + 2f[\sigma_b(\tau_{i+1})]K(t, \tau_{i+1}) + f[\sigma_b(\tau_{i+1})]K(t, \tau_i) + f[\sigma_b(\tau_i)]K(t, \tau_{i+1})), \tau_{k+1} = t.$	(4.63)

#### 4.3.1 Разрешающие уравнения метода конечных элементов

Потенциальная энергия для деформации бетона имеет вид:

$$\begin{aligned}
 \Pi_b &= \frac{1}{2} \int_V \sigma_b \varepsilon_b^{el} dV = \frac{1}{2} \int_V E_b(y) [\varepsilon_0 - y\chi - \varepsilon_b^*]^2 dV = \\
 &= \frac{1}{2} \int_V E_b(y) [\varepsilon_0^2 + y^2 \chi^2 + (\varepsilon_b^*)^2 - 2\varepsilon_0 \varepsilon_b^* - 2\varepsilon_0 y\chi + 2y\chi \varepsilon_b^*] dV = \\
 &= \frac{1}{2} \left( \int_{(l)} \varepsilon_0^2 dx \cdot b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E_b(y) dy + \int_V E_b(y) (\varepsilon_b^*)^2 dV + \right. \\
 &+ \int_{(l)} \chi^2 dx \cdot b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E_b(y) y^2 dy - 2 \int_{(l)} \varepsilon_0 dx \cdot b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E_b(y) \varepsilon_b^* dy - \\
 &\left. - 2 \int_{(l)} \varepsilon_0 \chi dx \cdot b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E_b(y) y dy + 2 \int_{(l)} \chi dx \cdot b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E_b(y) \varepsilon_b^* y dy \right).
 \end{aligned} \tag{4.64}$$

Потенциальная энергия деформации арматуры, расположенной у нижней и верхней грани, может быть найдена соответственно следующим образом:

$$\Pi_S = \frac{1}{2} \int_{V_S} \sigma_S \varepsilon_S dV = \frac{1}{2} E_S A_S \int_{(l)} \left( \varepsilon_0^2 + 2\varepsilon_0 y_S \frac{d^2 v}{dx^2} + y_S^2 \left( \frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 \right) dx. \quad (4.65)$$

$$\Pi'_S = \frac{1}{2} \int_{V'_S} \sigma'_S \varepsilon'_S dV = \frac{1}{2} E_S A'_S \int_{(l)} \left( \varepsilon_0^2 - 2\varepsilon_0 y'_S \frac{d^2 v}{dx^2} + (y'_S)^2 \left( \frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 \right) dx. \quad (4.66)$$

В случае симметричного армирования ( $A_S = A'_S$ ,  $y_S = y'_S$ ) для потенциальной энергии деформации всей арматуры получим:

$$\Pi_S + \Pi'_S = \frac{1}{2} E_S \left( A_{S, \text{общ}} \int_{(l)} \varepsilon_0^2 dx + I_S \int_{(l)} \left( \frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 dx \right), \quad (4.67)$$

где  $I_S = A_S y_S^2 + A'_S (y'_S)^2$  — момент инерции арматуры.

Окончательно выражение для потенциальной энергии деформации железобетонного элемента примет вид:

$$\begin{aligned} \Pi = \frac{1}{2} \left( EA_{red} \int_{(l)} \varepsilon_0^2 dx - 2ES_{red} \int_{(l)} \varepsilon_0 \chi dx + EI_{red} \int_{(l)} \chi^2 dx + 2M^* \int_{(l)} \chi dx \right. \\ \left. - 2N^* \int_{(l)} \varepsilon_0 dx + \int_V E_b(y) (\varepsilon_b^*)^2 dV \right). \end{aligned} \quad (4.68)$$

Рассмотрим интегралы в (4.68), включающие осевую деформацию:

$$\int_{(l)} \varepsilon_0^2 dx = \int_{(l)} \left( \frac{du}{dx} \right)^2 dx + \int_{(l)} \frac{du}{dx} \left( \frac{dv}{dx} \right)^2 dx + \frac{1}{4} \int_{(l)} \left( \frac{dv}{dx} \right)^4 dx. \quad (4.69)$$

Пренебрегая величиной  $\left( \frac{dv}{dx} \right)^4$ , а также учитывая, что при принятой ранее аппроксимации  $\frac{du}{dx} = const$ , получим:

$$\int_{(l)} \varepsilon_0^2 dx = l \left( \frac{du}{dx} \right)^2 + \frac{du}{dx} \int_{(l)} \left( \frac{dv}{dx} \right)^2 dx. \quad (4.70)$$

Остальные интегралы, где имеются осевые деформации  $\varepsilon_0$ , примут вид:

$$\int_{(l)} \varepsilon_0 dx = \int_{(l)} \left( \frac{du}{dx} \right) dx + \frac{1}{2} \int_{(l)} \left( \frac{dv}{dx} \right)^2 dx = l \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \int_{(l)} \left( \frac{dv}{dx} \right)^2 dx; \quad (4.71)$$

$$\int_{(l)} \varepsilon_0 \chi dx = \int_{(l)} \frac{du}{dx} \chi dx + \frac{1}{2} \int_{(l)} \left( \frac{dv}{dx} \right)^2 \chi dx = \frac{du}{dx} \int_{(l)} \chi dx + \frac{1}{2} \int_{(l)} \left( \frac{dv}{dx} \right)^2 \chi dx. \quad (4.72)$$

Подставив (4.70), (4.71) и (4.72) в (4.68), получим:

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2}(EA_{red} l \left(\frac{du}{dx}\right)^2 + EA_{red} \frac{du}{dx} \int_{(l)} \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 dx + \\ & + EI_{red} \int_{(l)} \chi^2 dx + 2M^* \int_{(l)} \chi dx - 2N^* \frac{du}{dx} l + \int_V E_b(y)(\varepsilon_b^*)^2 dV - \\ & - N^* \int_{(l)} \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 dx - 2ES_{red} \frac{du}{dx} \int_{(l)} \chi dx - ES_{red} \int_{(l)} \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 \chi dx). \end{aligned} \quad (4.73)$$

Представим интеграл, входящий в последнее слагаемое (4.73), в виде:

$$\int_{(l)} \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 \chi dx \approx \chi_{cp} \int_{(l)} \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 dx, \quad (4.74)$$

где  $\chi_{cp}$  — среднее изменение кривизны элемента.

Так как изменение кривизны является функцией от  $x$ , то из выражения (4.56) следует, что в пределах элемента не постоянна и продольная сила. Определим среднюю продольную силу в элементе как:

$$N_{cp} = EA_{red}\varepsilon_0 - \chi_{cp}ES_{red} - N^* \approx EA_{red} \frac{du}{dx} - \chi_{cp}ES_{red} - N^*. \quad (4.75)$$

С учётом (4.74) и (4.75) потенциальная энергия деформации запишется в виде:

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2}(EA_{red} l \left(\frac{du}{dx}\right)^2 + N_{cp} \int_{(l)} \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 dx - 2ES_{red} \frac{du}{dx} \int_{(l)} \chi dx + \\ & + EI_{red} \int_{(l)} \chi^2 dx + 2M^* \int_{(l)} \chi dx - 2N^* \frac{du}{dx} l + \int_V E_b(y)(\varepsilon_b^*)^2 dV). \end{aligned} \quad (4.76)$$

Второе слагаемое в (4.76), при принятой ранее в главах аппроксимации определяется следующим образом:

$$N_{cp} \int_{(l)} \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 dx = \{U\}^T [K_g] \{U\}, \quad (4.77)$$

где  $[K_g]$  — геометрическая матрица жёсткости;

$$[K_g] = N_{cp} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6}{5l} & -\frac{1}{10} & -\frac{6}{5l} & -\frac{1}{10} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{10} & \frac{2l}{15} & \frac{1}{10} & -\frac{l}{30} \\ 0 & 0 & \frac{6}{5l} & \frac{1}{10} & \frac{6}{5l} & \frac{1}{10} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{10} & -\frac{l}{30} & \frac{1}{10} & \frac{2l}{15} \end{bmatrix}. \quad (4.78)$$

Окончательно система уравнений МКЭ с учётом геометрической нелинейности принимает вид:

$$([K] + [K_g])\{U\} = \{F_q\} + \{F_b^*\}. \quad (4.79)$$

где  $[K]$  — матрица жёсткости;  $\{F_b^*\} = \{-N^* \quad N^* \quad 0 \quad -M^* \quad 0 \quad M^*\}^T$  — вклад в вектор нагрузки деформаций ползучести;

$$[K] = \begin{bmatrix} [K_c] & \\ & [K_w] \end{bmatrix} + \frac{ES_{red}}{l} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad (4.80)$$

$$[K_c] = \frac{EA_{red}}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix};$$

$$[K_w] = EI_{red} \begin{bmatrix} \frac{12}{l^3} & -\frac{6}{l^2} & -\frac{12}{l^3} & -\frac{6}{l^2} \\ -\frac{6}{l^2} & \frac{4}{l} & \frac{6}{l^2} & \frac{2}{l} \\ \frac{12}{l^3} & \frac{6}{l^2} & \frac{12}{l^3} & \frac{6}{l^2} \\ -\frac{6}{l^2} & \frac{2}{l} & \frac{6}{l^2} & \frac{4}{l} \end{bmatrix}.$$

#### 4.3.2 Итерационный анализ устойчивости с применением квазистатической процедуры метода конечных элементов

Элементы геометрической матрицы жесткости  $[K_g]$  являются нелинейными функциями продольных усилий в сжато-изогнутых стержневых элементах. Поэтому вычислительный процесс метода конечных элементов должен быть реализован по схеме ступенчатого увеличения нагрузки с одновременной корректировкой матриц  $[K]$  и  $[K_g]$ , и контролем несущей способности по найденным перемещениям  $\{U\}$  в конце каждого шага нагружения [249].

Полагаем, что приращение нагрузки  $F_i$  на  $i$  – ом шаге происходит квазистатически и небольшой порцией. Построенный на вычислении дополнительных перемещений на каждой итерации, вызванных невязкой сил (разницей вектора внутренних сил, полученного на основе напряжений в элементах, и вектора внешних нагрузок) [249].

Описанный подход изображён схематично на рисунке 4.12 и рисунке 4.13 на примере трёх шагов нагружений. Рассмотрим итерационный алгоритм на примере первого шага нагружения при  $t = t_0$ , когда деформации ползучести отсутствуют.

Вычислительный процесс организуется следующим образом:

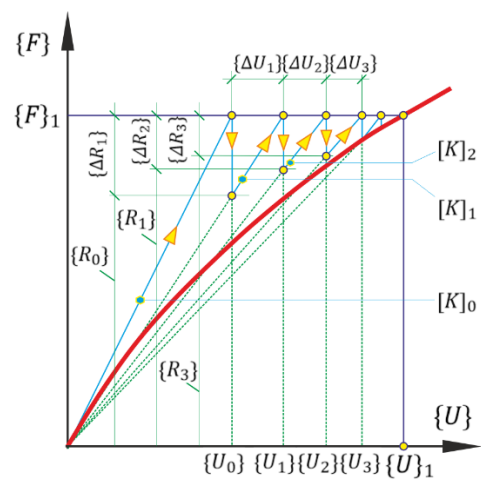
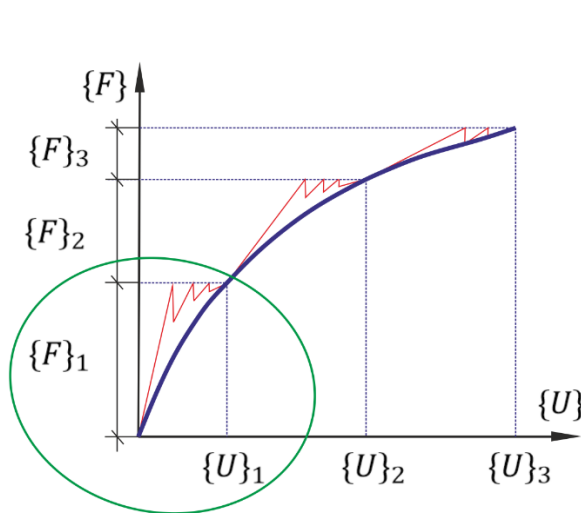


Рисунок 4.12. Схема итерационного процесса

Рисунок 4.13. Схема итерационного процесса на первом шаге нагружения

1. Без учёта геометрической матрицы жёсткости при  $E_b = E_0 = const$  вычисляется матрица жёсткости  $[K]_0$

2. Далее определяется начальное приращение вектора узловых перемещений:

$$\{U\}_0 = ([K]_0)^{-1}\{F\}_1,$$

где  $\{F\}_1$  — вектор нагрузки на первом шаге нагружения.

3. Запускается итерационный цикл и на  $i$  – ой итерации ( $i = 1 \dots N_{iter}$ ) вычисляется геометрическая матрица жёсткости  $[K_g]$  (часть матрицы жёсткости, зависящая от узловых перемещений) и суммируется с начальной матрицей жёсткости  $[K]_0$ .

$$[K]_i = [K]_0 + [K_g(U_{i-1})]$$

4. Далее вычисляются внутренние силы (вектор узловых нагрузок), соответствующие вектору перемещений на предыдущей итерации, напряжения и текущий модуль:

$$\{R\}_{i-1} = [K]_i \cdot \{U\}_{i-1}$$

5. Вычисляется невязка узловых сил:

$$\{\Delta R\}_i = \{F\}_1 - \{R\}_{i-1},$$

где  $i$  – номер итерации.

6. Определяется вектор дополнительных узловых перемещений  $\{\Delta U\}_i$ , соответствующих вектору невязки  $\{\Delta R\}_i$ :

$$\{\Delta U\}_i = ([K]_i)^{-1}\{\Delta R\}_i.$$

7. Итоговый вектор узловых перемещений после  $i$  итераций определяется по формуле:

$$\{U\}_i = \{U\}_{i-1} + \{\Delta U\}_i.$$

8. Управление сходимости проверяется из условия:

$$\sqrt{\frac{(\{\Delta U\}_i)^T \cdot \{\Delta U\}_i}{(\{U\}_i)^T \cdot \{U\}_i}} \leq \delta$$

где  $\delta$  – допустимый уровень погрешности (например,  $\delta = 10^{-3}$ ).

Итерационный процесс на шаге нагружения осуществляется до тех пор, пока условие 8 не выполнится.

9. Расчёт на следующем шаге нагружения производится аналогично первому, при этом в качестве матрицы жёсткости на первой итерации берётся матрица, вычисленная на основе перемещений, полученных на предыдущем шаге. Итоговый вектор узловых перемещений вычисляется с учётом суммы векторов на всех предшествующих шагах нагружения.

При учёте деформаций ползучести расчёт ведётся до сходимости при полных значениях внешних нагрузок в момент времени  $t_0 = 0$ . Затем выполняется шаг во времени  $\Delta t$ , и запускается итерационный процесс в момент времени  $t_1 = t_0 + \Delta t$  до удовлетворения критерия пункта 8, после чего выполняется следующий шаг во времени.

### 4.3.3 Решение модельной задачи

Рассматривается арка параболического очертания, шарнирно опёртую по концам. Внешняя нагрузка – равномерно распределённая нагрузка интенсивностью  $q$ . Расчетная схема приведена на рисунке 4.5.

Входящие параметры для расчёта: Материал – железобетон,  $R_b = 17$  МПа,  $\varepsilon_R = 1.5 \cdot 10^{-3}$ ,  $\alpha = 0.032$ ,  $\gamma = 0.062$ ,  $C = 3.77 \cdot 10^{-5}$  МПа $^{-1}$ , бетон класса В30,  $f = 3.2$  м,  $y_S = y'_S = 12$  см,  $B = 5.68 \cdot 10^{-5}$  МПа $^{-1}$ ,  $E_0 = 32.5 \cdot 10^3$  МПа,  $\varepsilon_{bu} = 2 \cdot 10^{-3}$ ,  $E_S = 2 \cdot 10^5$  МПа,  $\mu = 2\%$ , сечение квадратное  $30 \times 30$  см,  $L = 20$  м. Старение бетона не учитывается.

За уравнение состояния принимается формула Сарджина.

На рисунке 4.14 приведена графическая зависимость прогиба от нагрузки при кратковременном нагружении в середине пролета.

Нагрузку  $q_{\text{мгн}} \approx 220$  кН/м, при которой прогиб стремиться к бесконечности, будем считать за мгновенно критической.

Далее на рисунке 4.15 представлены графики развития во времени прогиба в середине пролета арки при следующих величинах вариации нагрузки:

1 –  $q = 165$  кН/м, 2 –  $q = 160$  кН/м, 3 –  $q = 153$  кН/м, 4 –  $q = 140$  кН/м.

Из рисунка 4.15 следует, что к конечному значению прогиб стремится только при  $q = 140$  кН/м.

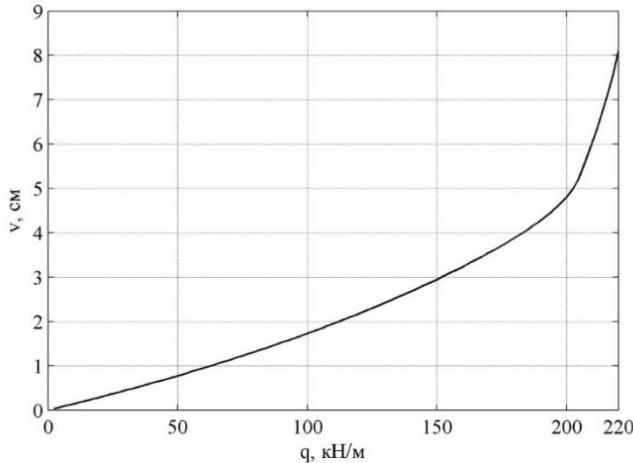


Рисунок 4.14 – Рост прогиба в середине пролета при кратковременном нагружении

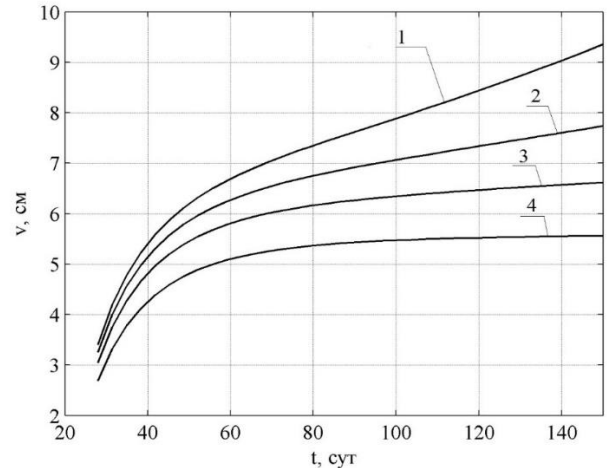


Рисунок 4.15 - Зависимость прогиба арки от времени при различных величинах нагрузки: 1 —  $q = 165$  кН/м; 2 —  $q = 160$  кН/м; 3 —  $q = 153$  кН/м; 4 —  $q = 140$  кН/м

При бóльших величинах нагрузки участок затухающей ползучести сменяется участком с постоянной скоростью роста прогиба, а на кривой 1 имеется и участок, на котором скорость прогиба возрастает.

За длительную критическую нагрузку  $q_{дл}$  примем такую, начиная с которой рост прогиба имеет незатухающий характер, т. е. при  $t \rightarrow \infty v \rightarrow \infty$ . В данной задаче  $q_{дл} \approx 153$  кН/м.

Отношение мгновенной критической нагрузки к длительной составляет  $\frac{q_{мгн}}{q_{дл}} = 1.44$ .

На рисунке 4.16 представлены зависимость роста стрелы прогиба при  $q = q_{дл}$ :

- чёрная сплошная линия – результат с учётом геометрической нелинейности и нелинейной ползучести;
- чёрная штриховая – без учёта геометрической нелинейности, но с учётом физической нелинейной ползучести;
- синяя сплошная – при линейной ползучести с учётом геометрической нелинейности;
- синяя штриховая – при линейной ползучести без учёта геометрической нелинейности.



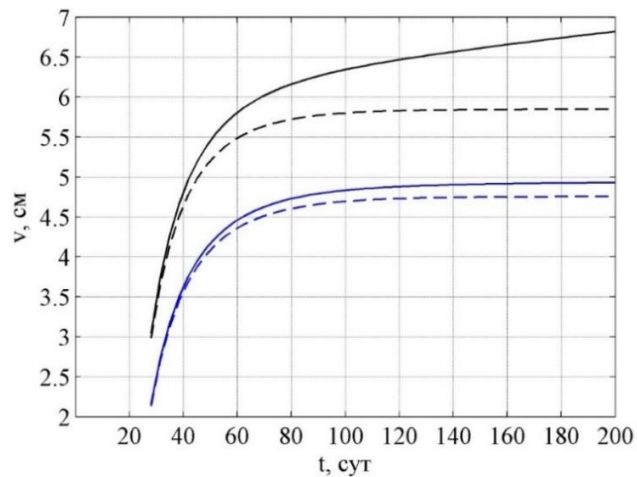


Рисунок 4.16 - Графики роста прогиба при  $q = q_{дл}$

Из приведенных графиков видно, что пренебрежение как геометрической нелинейностью, так и нелинейной составляющей ползучести приводит к существенному расхождению между результатами.

#### 4.4 Выводы к главе 4

Установлено существенное влияние начальных несовершенств на величину мгновенной критической нагрузки и критического времени. Предложенная методика допускает использовать произвольные зависимости между напряжениями и мгновенными деформациями, что позволяет применять ее не только для дерева и полимера. Достоверность результатов подтверждена анализом величины критической нагрузки на основе касательно-модульной теории.

Предложен теоретический расчет в исследовании устойчивости шарнирно опертой по концам арок с учетом деформаций ползучести при действии равномерно распределенной нагрузки. Адаптирован к исследуемым объектам итерационный алгоритм расчёта, основанный на методе Ньютона–Рафсона.

Получены разрешающие уравнения и разработана методика расчета на устойчивость сжатых стержней при нелинейной ползучести с учетом мгновенной нелинейности деформирования. Установлено существенное влияние начальных несовершенств на величину мгновенной критической нагрузки и критического времени. Предложенная методика допускает использовать произвольные зависимости между напряжениями и мгновенными деформациями, что позволяет применять ее не только для дерева. Достоверность результатов подтверждена анализом величины критической нагрузки на основе касательно-модульной теории.

Установлено, что при некотором значении нагрузки, которое было принято за длительную критическую, на кривых изменения прогиба во времени возникает участок с постоянной и отличной от нуля скоростью роста прогиба.

По результатам расчета дано сравнение результатов, полученных без учёта геометрической нелинейности, а также без учёта нелинейной составляющей ползучести. Доказано, что пренебрежение хотя бы одним видом нелинейности приводит к существенному расхождению между результатами.

Приведены примеры расчета для параболических арок, соединённых по концам «шарнир-шарнир» без промежуточного шарнира и с промежуточным шарниром в середине пролета под действием равномерно распределенной нагрузки. Выполнено сравнение результатов, получаемых в вязкоупругопластической и вязкоупругой постановке.

Для рассмотренных арок установлено, что даже при нагрузке, близкой к мгновенной критической, рост перемещений во времени носит ограниченный характер. Таким образом, характер их работы в условиях ползучести сильно отличается от характера деформирования сжатых стержней. Полученные уравнения и разработанная методика являются универсальными и допускают использование произвольных зависимостей между напряжениями и мгновенными деформации, а также произвольных функций для меры ползучести.

Это позволяет выполнять расчет конструкций не только из дерева, но и из любого другого материала. В результате проведенного анализа ползучести деревянных арок установлено, что в отличие от сжатых стержней, для них ползучесть носит ограниченный характер даже при нагрузках, близких к мгновенной критической.

## 5 ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАДАЧ ИЗГИБА И УСТОЙЧИВОСТИ ГИБКИХ ВЯЗКОУПРУГИХ ПЛАСТИН

Одной из актуальных проблем теории пластин является их расчет в условиях ползучести, что подтверждает большое число изданных в последнее время публикаций по этой теме в отечественных и зарубежных изданиях. В настоящее время много статей посвящены проблеме устойчивости вязкоупругих пластин и оболочек при динамических и следящих нагрузках, где, кстати, ставятся вопросы и для пластины средней толщины.

Существует необходимость в универсальных методах расчета при произвольных уравнениях состояния, в том числе нелинейных.

Настоящий раздел посвящен в получение разрешающих уравнений для задачи изгиба и устойчивости гибкой круглой пластинки, а также устойчивости нелинейно вязкоупругих прямоугольных пластин, находящихся под действием усилий в срединной плоскости, с учетом геометрической нелинейности.

Необходимо отметить, что проблема выпучивания при ползучести не является задачей чистой устойчивости. Здесь, как и ранее, требуется задание начальных несовершенств, которые, как правило, принимаются в виде начального искривления, либо некоторого эксцентриситета.

### 5.1 Изгиб круглой гибкой пластины в условиях нелинейной ползучести

Как и для стержней, в задачах расчета пластин в вязкоупругой постановке из основных соотношений теории изгиба упругих гибких пластин (уравнения равновесия Навье, геометрические соотношения Коши и физические уравнения) корректируются только физические:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{r,whole} \\ \varepsilon_{\theta,whole} \end{Bmatrix} = \frac{1}{E} \begin{bmatrix} 1 & \nu \\ -\nu & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \varepsilon_{r,m}^*(r) \\ \varepsilon_{\theta,m}^*(r) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \varepsilon_{r,bend}^*(r,z) \\ \varepsilon_{\theta,bend}^*(r,z) \end{Bmatrix} \quad (5.1)$$

В формуле (5.1) для произвольной точки пластины с координатами  $r$  и  $z$ :

$\varepsilon_{r,m}^*(r)$ ,  $\varepsilon_{\theta,m}^*(r)$  – деформации ползучести в срединной поверхности

$\varepsilon_{r,bend}^*(r,z)$ ,  $\varepsilon_{\theta,bend}^*(r,z)$  – деформации ползучести, детерминированные изменением кривизны пластины.

$\varepsilon_{r,whole}(r,z)$ ,  $\varepsilon_{\theta,whole}(r,z)$  – полные деформации.

Полные деформации и напряжения представим в виде сумм их составляющих:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{r,whole}(r,z) \\ \varepsilon_{\theta,whole}(r,z) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{r,m}(r) \\ \varepsilon_{\theta,m}(r) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \varepsilon_{r,bend}(r,z) \\ \varepsilon_{\theta,bend}(r,z) \end{Bmatrix}; \quad \begin{Bmatrix} \sigma_r(r,z) \\ \sigma_\theta(r,z) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_{r,m}(r) \\ \sigma_{\theta,m}(r) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \sigma_{r,bend}(r,z) \\ \sigma_{\theta,bend}(r,z) \end{Bmatrix};$$

В системе координат  $r$  и  $\theta$  напряжения и деформации, обусловленные изгибом пластины, запишутся в виде:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{r,bend}(r,z) \\ \varepsilon_{\theta,bend}(r,z) \end{Bmatrix} = -\frac{z}{r} \begin{Bmatrix} r \frac{d^2 w}{dr^2} \\ \frac{dw}{dr} \end{Bmatrix}; \quad (5.2)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{r,bend}(r,z) \\ \sigma_{\theta,bend}(r,z) \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & -1 & -\nu \\ \nu & 1 & -\nu & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{r,bend} \\ \varepsilon_{\theta,bend} \\ \varepsilon_{r,bend}^* \\ \varepsilon_{\theta,bend}^* \end{Bmatrix}; \quad (5.3)$$

При этом изгибающие моменты с учетом (5.2) и (5.3) имеют вид:

$$\begin{Bmatrix} M_r \\ M_\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{r,bend} z dz & \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \sigma_{\theta,bend} z dz \end{Bmatrix}^T = -D \begin{bmatrix} 1 & \nu \\ \nu & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{d^2 w}{dr^2} \\ \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} M_r^* \\ M_\theta^* \end{Bmatrix}; \quad (5.4)$$

где  $h$  – толщина пластинки;  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$  – цилиндрическая жесткость;

$$\begin{Bmatrix} M_r^* \\ M_\theta^* \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{Bmatrix} \int_{\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [1 \quad \nu] \begin{Bmatrix} \varepsilon_{r,bend} \\ \varepsilon_{\theta,bend} \end{Bmatrix} z dz & \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [\nu \quad 1] \begin{Bmatrix} \varepsilon_{r,bend} \\ \varepsilon_{\theta,bend} \end{Bmatrix} z dz \end{Bmatrix}^T;$$

Согласно [147], связь напряжений в срединной поверхности и напряжений, вызванных изгибом через уравнение равновесие относительно моментов имеет вид:

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{r} & -\frac{1}{r} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{dM_r}{dr} \\ M_r \\ M_\theta \end{Bmatrix} = -\psi - h\sigma_{r,m} \frac{dw}{dr}, \quad (5.5)$$

здесь

$$\psi = \frac{1}{r} \int_0^r q r dr - \text{функция нагрузки}$$

Если нагрузка равномерно распределенная по площади, то  $\psi = \frac{qr}{2}$ .

Введем функцию напряжений Эри  $\Phi(r)$  в полярных координатах по формулам:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{r,m} \\ \sigma_{\theta,m} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{d\Phi}{dr} \\ \frac{d^2\Phi}{dr^2} \end{Bmatrix}; \quad (5.5a)$$

Постановкой (5.4) в (5.5) придем к первому разрешающему уравнению:

$$D \left[ 1 \quad \frac{1}{r} \quad -\frac{1}{r^2} \right] \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^3 w}{dr^3} \\ \frac{d^2 w}{dr^2} \\ \frac{dw}{dr} \end{array} \right\} = \psi + \frac{h}{r} \frac{d\Phi}{dr} \frac{dw}{dr} - \left[ 1 \quad \frac{1}{r} \quad -\frac{1}{r} \right] \left\{ \begin{array}{l} \frac{dM_r^*}{dr} \\ M_r^* \\ M_\theta^* \end{array} \right\} \quad (5.6)$$

Уравнение равновесия [147], содержащее напряжения в срединной поверхности, записывается в виде:

$$\left[ 1 \quad \frac{1}{r} \quad -\frac{1}{r} \right] \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\sigma_{r,m}}{dr} \\ \sigma_{r,m} \\ \sigma_{\theta,m} \end{array} \right\} = 0, \quad (5.7)$$

Уравнение неразрывности деформаций в срединной поверхности:

$$\left[ r \quad 1 \quad -1 \right] \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\varepsilon_{\theta,m}}{dr} \\ \varepsilon_{\theta,m} \\ \varepsilon_{r,m} \end{array} \right\} = -\frac{1}{2} \left( \frac{dw}{dr} \right)^2, \quad (5.8)$$

Через функцию напряжений Эри  $\Phi$  деформации срединной поверхности имеют вид:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{r,m} \\ \varepsilon_{\theta,m} \end{array} \right\} = \frac{1}{E} \left[ \begin{array}{cc} \frac{1}{r} & -\nu \\ -\frac{\nu}{r} & 1 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\Phi}{dr} \\ \frac{d^2\Phi}{dr^2} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{r,m}^* \\ \varepsilon_{\theta,m}^* \end{array} \right\}; \quad (5.9)$$

Постановкой соотношений (5.9) в (5.8) придем ко второму разрешающему уравнению:

$$\frac{d^3\Phi}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2\Phi}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{d\Phi}{dr} = -\frac{E}{r} \left( \frac{1}{2} \left( \frac{dw}{dr} \right)^2 + r \frac{d\varepsilon_{\theta,m}^*}{dr} + \varepsilon_{\theta,m}^* - \varepsilon_{r,m}^* \right). \quad (5.10)$$

Понизим порядок уравнения (5.10). Для этого введем обозначение:  $\varphi = \frac{d\Phi}{dr}$ . Это связано с тем, что функцию  $\Phi$  в (5.10) определять, собственно, не требуется, достаточно найти ее первую производную. Тогда уравнение (5.10) примет вид:

$$\left[ 1 \quad \frac{1}{r} \quad -\frac{1}{r^2} \right] \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2\varphi}{dr^2} \\ \frac{d\varphi}{dr} \\ \varphi \end{array} \right\} = -\frac{E}{r} \left[ \frac{1}{2} \quad r \quad 1 \quad -1 \right] \left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{dw}{dr} \right)^2 \\ \frac{d\varepsilon_{\theta,m}^*}{dr} \\ \varepsilon_{\theta,m}^* \\ \varepsilon_{r,m}^* \end{array} \right\}. \quad (5.11)$$

В итоге задача осесимметричного изгиба круглой гибкой пластины в условиях ползучести свелась к системе из двух дифференциальных уравнений (5.6) и (5.11).

Для соотношения (5.11) граничные условия имеют вид:

а) Свободное перемещение точек опорного контура:

$$\sigma_{r,m} = \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dr} = \frac{\varphi}{r} = 0. \quad (5.12)$$

б) Опорный контур препятствует смещению, то тогда радиальное перемещение:

$$u_m = r\varepsilon_{\theta,m} = r \left[ \frac{1}{E} \left( \frac{d^2\Phi}{dr^2} - \frac{\nu}{r} \frac{d\Phi}{dr} \right) + \varepsilon_{\theta,m}^* \right] = r \left[ \frac{1}{E} \left( \frac{d\varphi}{dr} - \frac{\nu}{r} \varphi \right) + \varepsilon_{\theta,m}^* \right] = 0. \quad (5.13)$$

Приведем блок схему решения данной системы уравнений (Рисунок 5.1а.).

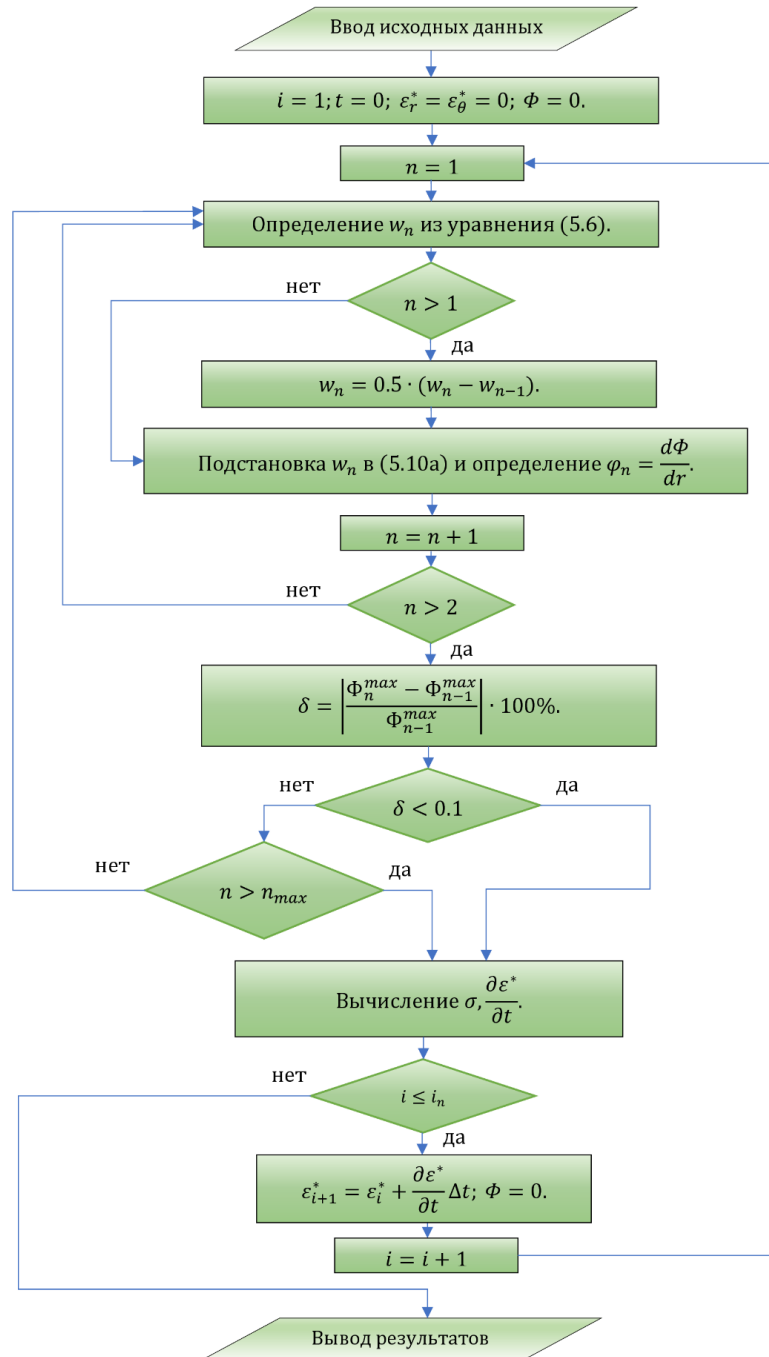


Рисунок 5.1а. Расчетная блок-схема к решению системы разрешающих уравнений

*Методика решения изгиба пластины с учетом ползучести*

Решение ведется методом последовательных приближений в сочетании методом конечных разностей. Имеет место квазистатический процесс. На первой стадии приводим решение упругой задачи, считая, что пластинка жесткая, т.е. последние два слагаемых в уравнении (5.6) правой части равны нулю. Определили функцию прогибов, если точнее, значения прогиба в узловых точках.

Продифференцировав  $w(r)$  по координате  $r$ , подставляем в уравнение (5.11)

Во втором приближении возвращаемся к уравнению (6.6) для определения новых значений прогиба в узлах. Определив среднее значение в каждом узле между прогибом в данном и предыдущем приближении, вновь дифференцируем  $w_{medium}(r)$  и подставляем в (5.11) для определения функции  $\Phi$ .

Количество итераций зависит от заданной точности, то есть разница между максимальным значением  $\Phi$  в предыдущем и последующем приближении не превышает например (0,01%).

После переходим к процессу ползучести, разбив временной интервал на  $n$  шагов  $\Delta t$ . Как и ранее, достигнув заданной точности в упругой задаче, по найденному значению функции  $\Phi$ , из (5.5.a) определяем напряжения и далее скорость деформаций ползучести  $\frac{\partial \varepsilon_{i,j}^*}{\partial t}$ , где  $i = r, \theta, j = 1, 2, \dots n$ . Деформация  $\varepsilon_{i,j+1}^*$  в момент времени  $t_{j+1}$  определялась с использованием метода Рунге-Кутты четвертого порядка, описанного в разделе 3.2.

Для отождествления правильности работы программы было выполнено сравнение упругой задачи с решением доцента А.С Чепурненко (рисунок 5.1) [237].

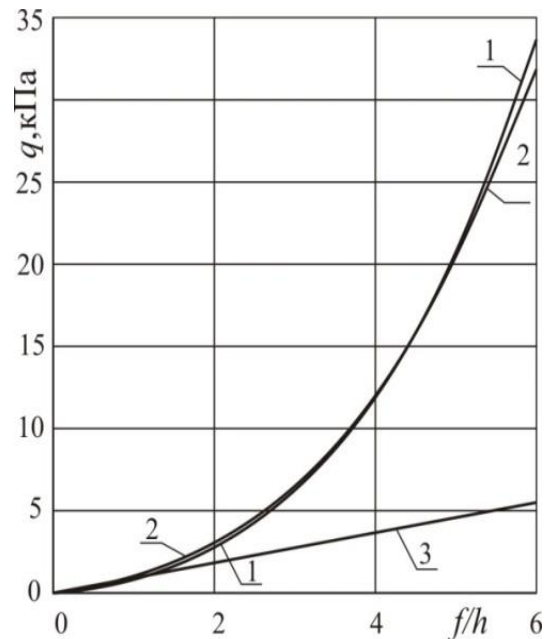


Рисунок 5.1 — Кривые решения упругой задачи в линейной и нелинейной постановках

На рисунке 5.1. представлено сравнение результатов решения упругой задачи автором и доцентом А.С. Чепурненко при  $\nu = 0,3$ ,  $E = 3035$  МПа,  $c = 1$  м,  $h = 15$  мм. Доцент А.С. Чепурненко [82] решил данную задачу методом Бубнова-Галеркина. Кривая 1 соответствует решению доц. А.С. Чепурненко, кривая 2 — решению автора,

Отметим, кривой линии 3 соответствует результат, получаемый без учета геометрической нелинейности (рисунок 5.1). Из графиков, во-первых, видно, что результат, полученный автором, практически совпадает с решением доц. А. С. Чепурненко. Также из графиков видно, что расчет по геометрически линейной теории может давать значения прогибов, завышенные в несколько раз.

## 5.2 Устойчивость круглой гибкой пластины с начальной погибью под действием радиальных сжимающих усилий в условиях ползучести

Вопрос устойчивости пластин при ползучести рассмотрим на примере жестко защемленной по контуру круглой пластины с начальной погибью под действием радиальных сжимающих усилий (рисунок 5.2).

Разрешающие уравнения, аналогичные уравнениям (5.6) и (5.11) в цилиндрических координатах можно вывести согласно выше приведенным выкладкам:

$$D \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{r} & -\frac{1}{r^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{d^3 w}{dr^3} \\ \frac{d^2 w}{dr^2} \\ \frac{dw}{dr} \end{Bmatrix} = \psi + \frac{h}{r} \frac{d\Phi}{dr} \left( \frac{dw}{dr} + \frac{dw_0}{dr} \right) - \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{r} & -\frac{1}{r} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{dM_r^*}{dr} \\ M_r^* \\ M_\theta^* \end{Bmatrix} \quad (5.14)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{r} & -\frac{1}{r^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{d^2 \varphi}{dr^2} \\ \frac{d\varphi}{dr} \\ \varphi \end{Bmatrix} = -\frac{E}{r} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \left( \frac{dw}{dr} \right)^2 \\ \frac{dw}{dr} \frac{dw_0}{dr} \\ \frac{d\varepsilon_{\theta, \text{cp}}^*}{dr} \\ \varepsilon_{\theta, \text{cp}}^* \\ \varepsilon_{r, \text{cp}}^* \end{Bmatrix}. \quad (5.15)$$

Так как имеет место только сжатие, то  $\psi = 0$ .

Кинематические и статические условия на границе для системы (5.14) и (5.15):

$$w|_{r=c} = 0, \quad \frac{dw}{dr}|_{r=c} = 0, \quad \sigma_{r, \text{cp}}|_{r=c} = \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dr}|_{r=c} = -p. \quad (5.16)$$

При малых прогибах, когда напряжения в срединной поверхности не зависят от вертикальных перемещений, уравнение (5.14) переписывается в виде:



$$D \left[ 1 \quad \frac{1}{r} \quad -\frac{1}{r^2} \right] \left\{ \begin{array}{l} d^3 w \\ \frac{dr^3}{dr^2} \\ \frac{dw}{dr} \end{array} \right\} = -ph \left( \frac{dw}{dr} + \frac{dw_0}{dr} \right) - \left[ 1 \quad \frac{1}{r} \quad -\frac{1}{r} \right] \left\{ \begin{array}{l} dM_r^* \\ M_r^* \\ M_\theta^* \end{array} \right\} \quad (5.17)$$

Общеизвестно, что в упругой постановке для идеальной пластинки мгновенная потеря устойчивости:

$$p_{кр} = \frac{14,68D}{c^2 h} \quad (5.18)$$

В работах [148,82,83,154] при исследовании устойчивости сжатых стержней с учетом линейной ползучести используется понятие длительной критической силы, равной  $F_{дл} = \frac{\pi^2 H l}{l^2}$ , где  $H$  — длительный модуль упругости. При  $F < F_{дл}$  ползучесть затухает, и стрела прогиба стержня стремится к конечному значению. При  $F > F_{дл}$  стрела прогиба неограниченно возрастает. При  $F = F_{дл}$  скорость роста стрелы прогиба  $\frac{\partial f}{\partial t}$  постоянна.

Введем по аналогии работ [148,82,83,154] с понятием длительной критической силы величину длительного критического давления:

$$p_{дл} = \frac{14,68D_\infty}{c^2 h} \quad (5.19)$$

$$D_\infty = \frac{\tilde{E} h^3}{12(1 - \tilde{\nu}^2)} \quad (5.20)$$

где  $D_\infty$  — длительная цилиндрическая жесткость.

Величина  $D_\infty$  была предложена автором в работе [82], однако представлялась несколько иначе:

$$D_\infty = \frac{\alpha^* h^3}{12(\alpha^{*2} - \beta^{*2})}, \quad (5.21)$$

здесь 
$$\alpha^* = \frac{1}{E} + \frac{1}{E_\infty}, \quad \beta^* = \frac{\nu}{E} + \frac{1}{2E_\infty}.$$

Связь параметров  $\alpha^*$  и  $\beta^*$  с величинами  $\tilde{E}$  и  $\tilde{\nu}$  имеет вид [237]:

$$\tilde{E} = \frac{1}{\alpha^*}; \quad \tilde{\nu} = \frac{\beta^*}{\alpha^*}. \quad (5.22)$$

Нетрудно видеть, что выражения для  $D_\infty$  (5.20) и выражение для  $D_\infty$  (5.21) из [82] эквивалентны.

Чтобы проверить, насколько справедлива данная аналогия, была решена модельная задача для пластинки из полимера ЭДТ-10 при различных значениях давления  $p$ .

Вычисления выполнялись при следующих исходных данных:  $\nu = 0.3$ ,  $E = 3035$  МПа,  $E_\infty = 2310$  МПа,  $m^* = 4,44$  МПа,  $\eta_0^* = 1,8 \cdot 10^8$  МПа · с, размеры:  $c = 1$  м,  $h = 5$  мм.

Заданная пластинка имеет  $p_{кр} = 0,1$  МПа,  $p_{дл} = 0,47 p_{кр}$ . Начальная погибь задавалась выражением:

$$w_0 = f_0 \left( 1 - \frac{r^2}{c^2} \right)^2 \quad (5.23)$$

где  $f_0 = 0.01$  мм.

На рисунке 5.3 приведены графики роста стрелы прогиба при различных величинах нагрузки ( $p < p_{дл}$ ,  $p = p_{дл}$  и  $p > p_{дл}$ ). Сплошным линиям соответствует решение системы (5.14) и (5.15) при помощи МКР, штриховым – решение на основе МКЭ.

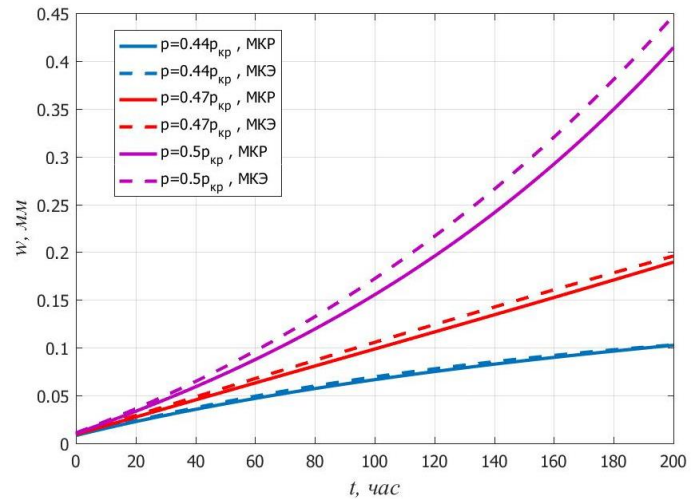
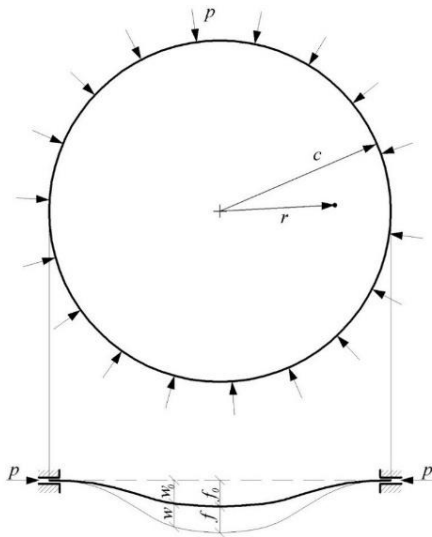


Рисунок 5.2 – Круглая пластинка, жестко защемленная по контуру, сжимаемая радиальными усилиями, Рисунок 5.3 – Эволюционная зависимость роста стрелы прогиба от времени.

Из рисунок 5.3 видно, что при  $p < p_{дл}$  скорость роста прогиба затухает, при  $p = p_{дл}$  прогиб растет с постоянной скоростью, а при  $p > p_{дл}$  скорость роста прогиба возрастает. Аналогичный характер кривых роста стрелы прогиба был получен для сжатых стержней на основе линейного уравнения Максвелла-Томпсона. Результаты, полученные двумя методами, достаточно хорошо согласуются между собой.

На рисунке 5.4. показаны сравнительные графики роста прогиба при  $p = 0.3 p_{кр}$  полученные МКР и МКЭ.

Хотелось бы обратить внимание на немаловажный факт, что при использовании метода конечных разностей в случае небольшого разбиения количества отрезков по радиусу возможен эффект «ложной» потери устойчивости при  $p < p_{дл}$ . Это явление можно наблюдать из

рисунка 5.4, где при 20 интервалах по  $r$  отрезок затухающей скорости роста прогиба ( $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} < 0$ ) сменяется участком, на котором скорость роста прогиба возрастает ( $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} > 0$ ). При сгущении конечно-разностной сетки указанный эффект пропадает [237]. Интересно, что при больших прогибах напряжения в срединной поверхности перестают быть постоянными, и ползучесть затухает, то есть за счет мембранных напряжений прогиб не может быть бесконечно большим.

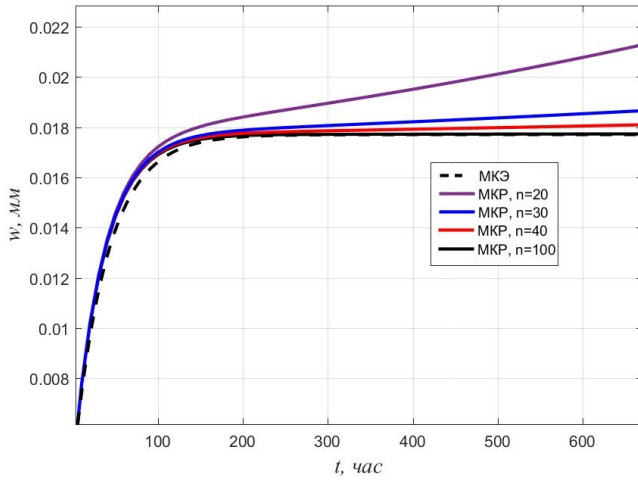


Рисунок 5.4 – Зависимости прогиба от времени при  $p = 0,3 p_{кр}$  (Решение МКР и МКЭ)

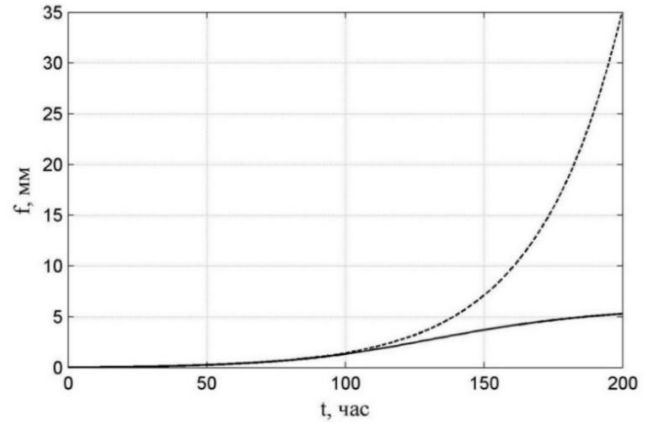


Рисунок 5.5 – Сравнение результатов, полученных с учетом геометрической нелинейности и без ее учета при  $p = 0,6 p_{кр}$

На рисунке 5.5 показано сравнение результатов, полученных с учетом влияния прогибов на напряжения в срединной поверхности (сплошная линия) и без учета влияния прогибов (штриховая линия) при  $p = 0,6 p_{кр}$ .

Расхождение появляется при прогибах порядка  $\frac{1}{4}$  толщины.

### 5.3 Изгиб прямоугольной гибкой пластинки в условиях ползучести.

Как и для круглой пластинки, приведем деформации ползучести, а также полные деформации и напряжения в виде суммы двух составляющих для прямоугольной пластинки:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x,whole} \\ \varepsilon_{y,whole} \\ \gamma_{xy,whole} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x,m} \\ \varepsilon_{y,m} \\ \gamma_{xy,m} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x,bend} \\ \varepsilon_{y,bend} \\ \gamma_{xy,bend} \end{Bmatrix}; & \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^* \\ \varepsilon_y^* \\ \gamma_{xy}^* \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x,m}^* \\ \varepsilon_{y,m}^* \\ \gamma_{xy,m}^* \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x,bend}^* \\ \varepsilon_{y,bend}^* \\ \gamma_{xy,bend}^* \end{Bmatrix}; \\ \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \sigma_{x,m} \\ \sigma_{y,m} \\ \tau_{xy,m} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \sigma_{x,bend} \\ \sigma_{y,bend} \\ \tau_{xy,bend} \end{Bmatrix}. \end{aligned}$$

Вызванные изгибом пластины, напряжения и изменение кривизн срединной поверхности имеют вид:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{x,bend} \\ \sigma_{y,bend} \\ \tau_{xy,bend} \end{pmatrix} = -\frac{zE}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu) \end{bmatrix} \left( \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{pmatrix} + \frac{1}{z} \begin{pmatrix} \varepsilon_{x,bend}^* \\ \varepsilon_{y,bend}^* \\ \frac{1}{2} \gamma_{xy,bend}^* \end{pmatrix} \right); \quad (5.24)$$

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{x,bend} \\ \varepsilon_{y,bend} \\ \gamma_{xy,bend} \end{pmatrix} = -z \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right\}^T$$

Соотношения для изгибных и крутящих моментов относительно прогиба  $w$ :

$$\begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{x,bend} z dz \\ \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{y,bend} z dz \\ \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy,bend} z dz \end{pmatrix} = -D \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} M_x^* \\ M_y^* \\ H^* \end{pmatrix}; \quad (5.25)$$

где

$$\begin{pmatrix} M_x^* \\ M_y^* \\ H^* \end{pmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [1 \quad \nu \quad 0] \begin{pmatrix} \varepsilon_{x,bend}^* \\ \varepsilon_{y,bend}^* \\ \gamma_{xy,bend}^* \end{pmatrix} z dz \\ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [\nu \quad 1 \quad 0] \begin{pmatrix} \varepsilon_{x,bend}^* \\ \varepsilon_{y,bend}^* \\ \gamma_{xy,bend}^* \end{pmatrix} z dz \\ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [0 \quad 0 \quad \frac{(1-\nu)}{2}] \begin{pmatrix} \varepsilon_{x,bend}^* \\ \varepsilon_{y,bend}^* \\ \gamma_{xy,bend}^* \end{pmatrix} z dz \end{pmatrix}; \quad (5.25a)$$

Продольные и сдвигающие силы определяются следующим образом:

$$\begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ S \end{pmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{x,m} \\ \varepsilon_{y,m} \\ \gamma_{xy,m} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} N_x^* \\ N_y^* \\ S^* \end{pmatrix}; \quad (5.25b)$$

Здесь

$$\begin{pmatrix} N_x^* \\ N_y^* \\ S^* \end{pmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \left\{ \begin{array}{l} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [1 \quad \nu \quad 0] \begin{pmatrix} \varepsilon_{x,m}^* \\ \varepsilon_{y,m}^* \\ \gamma_{xy,m}^* \end{pmatrix} z dz \\ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [\nu \quad 1 \quad 0] \begin{pmatrix} \varepsilon_{x,m}^* \\ \varepsilon_{y,m}^* \\ \gamma_{xy,m}^* \end{pmatrix} z dz \\ \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} [0 \quad 0 \quad \frac{(1-\nu)}{2}] \begin{pmatrix} \varepsilon_{x,m}^* \\ \varepsilon_{y,m}^* \\ \gamma_{xy,m}^* \end{pmatrix} z dz \end{array} \right\}; \quad (5.25B)$$

Уравнения равновесия в срединной поверхности:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{x,m} \\ \sigma_{y,m} \\ \tau_{xy,m} \end{pmatrix} = 0$$

Вышеприведенные уравнения обращаются в тождество если ввести функции напряжений Эри:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{x,m} \\ \sigma_{y,m} \\ \tau_{xy,m} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial y^2} & \frac{\partial^2}{\partial x^2} & -\frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \end{bmatrix}^T \{\Phi\} \quad (5.26)$$

Используя основную теорему статики, запишем через функции напряжений:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + h \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) + q = 0; \quad (5.27)$$

Используя связь перерезывающих сил с моментами имеющий вид:

$$\begin{pmatrix} Q_x \\ Q_y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ H \end{pmatrix}; \quad \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} Q_x \\ Q_y \end{pmatrix} = -q. \quad (5.28)$$

и подставив (5.25) в (5.28), затем (5.28) продифференцировав по переменным  $x$  и  $y$  в (5.27), окончательно получим:

$$D\nabla^4 w = q + h \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) - \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 & 0 & \frac{\partial^2}{\partial y^2} & 0 & 0 & \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} M_x^* \\ M_y^* \\ H^* \end{pmatrix}; \quad (5.29)$$

Второе и третье слагаемое в правой части (5.29) обусловлено геометрической и физической нелинейностью соответственно.

Уравнение неразрывности в срединной поверхности имеет вид:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial y^2} & 0 & 0 & \frac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 & 0 & \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x,m} \\ \varepsilon_{y,m} \\ \gamma_{xy,m} \end{Bmatrix} = \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (5.30)$$

Подставив физические уравнения (1.34) с учётом матрицы  $[D]$  из (1.35) в декартовых координатах в (5.30) и учитывая функции напряжений  $\Phi$  из (5.26) имеем второе разрешающее уравнение:

$$\frac{1}{E} \nabla^4 \Phi = \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] - \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 & 0 & \frac{\partial^2}{\partial y^2} & 0 & 0 & \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{x,m}^* \\ \varepsilon_{y,m}^* \\ \gamma_{xy,m}^* \end{Bmatrix}; \quad (5.31)$$

Уравнения (5.29) и (5.31) образуют систему разрешающих нелинейных дифференциальных уравнений изгиба гибкой пластинки с учетом деформации ползучести.

Для решения данной системы может быть использована методика, приведённая ранее.

Граничные условия для уравнения (5.31) при  $x = 0, x = a$ .

а) Нормальное напряжение  $\sigma_x$  вдоль оси  $x$  равно нулю так как точки незагруженного края свободно смещаются вдоль оси:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0.$$

б) Касательные напряжения  $\tau_{xy}$  так же равны нулю так как точки незагруженного края свободно смещаются по направлению самой грани (вдоль оси  $y$ ):

$$\tau_{xy} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = 0.$$

в) Так как края  $x = 0$  и  $x = a$  закреплены таким образом, что взаимное смещение их точек вдоль оси  $x$  отсутствует, то разница перемещений в соответствующих точках имеют вид:

$$u_{x=a} - u_{x=0} = \int_0^a \frac{\partial u}{\partial x} dx = 0.$$

Деформация срединной поверхности  $\varepsilon_{x,m}$  и градиенты перемещений связаны соотношением:

$$\varepsilon_{x,m} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2$$

Но  $\varepsilon_{x,m}$  через функцию напряжений в физических уравнениях связана как

$$\varepsilon_{x,m} = \frac{1}{E} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right) + \varepsilon_{x,m}^*$$

То заключительно граничное условие можно трактовать как:

$$u_{x=a} - u_{x=0} = \int_0^a \left[ \frac{1}{E} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right) + \varepsilon_{x,m}^* - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] dx = 0.$$

Отметим, однако, что последнее соотношение граничного условия неудобно при конечно-разностной аппроксимации.

В начале рассмотрим изгиб тонких жестких пластин, для которых справедлива теория Кирхгофа-Лява. Толщина пластин заключена в пределах:

$$\left( \frac{1}{80} \div \frac{1}{100} \right) \leq h/a \leq \left( \frac{1}{5} \div \frac{1}{8} \right),$$

где  $a$  – наименьший размер пластины в плане

Прямоугольная пластинка, опертая шарнирно по контуру подвержена действию поперечной равномерно распределенной нагрузке  $q = 2$  кПа (рисунок 5.6). Размеры пластинки  $a = 0.8$  м,  $b = 0.6$  м,  $h = 2$  см. Механические характеристики  $E = 1480$  МПа и  $\nu = 0.3$ . В качестве материала – материал, с ярко выраженной реологией вторичный ПВХ.

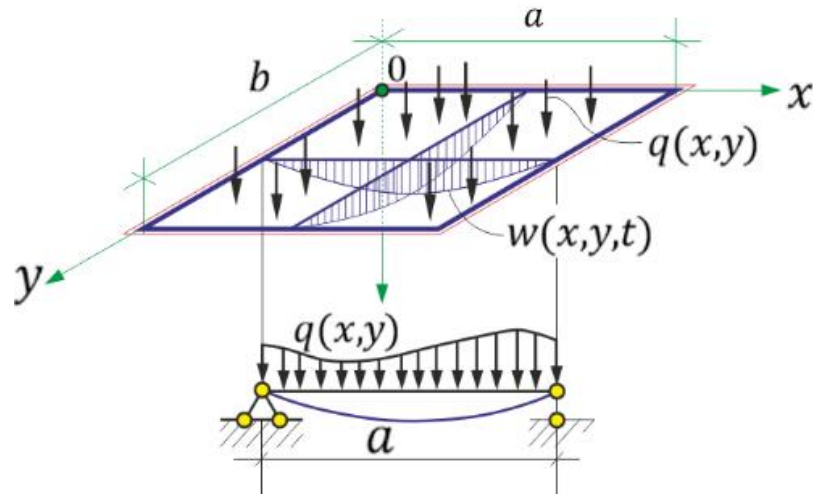


Рисунок 5.6 – Расчетная схема рассматриваемой пластинки

В качестве уравнения состояния использовалось обобщенное нелинейное уравнение Максвелла-Гуревича. Релаксационные константы при комнатной температуре  $E_\infty = 5990$  МПа,  $\eta_0^* = 9.06 \cdot 10^5$  МПа · мин,  $m^* = 12.6$  МПа.

Известно, что для упругой шарнирно опертой по контуру пластинки имеется аналитическое решение Навье в двойных тригонометрических рядах [87]. Обобщим это решение на случай пластинки из вязкоупругого материала.

Из разрешающих уравнений (5.29) и (5.31) останется уравнение (5.29) без учета изменения кривизн срединной поверхности (5.29):

$$D\nabla^4 w = q - \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 & 0 & \frac{\partial^2}{\partial y^2} & 0 & 0 & \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_x^* \\ M_y^* \\ H^* \end{Bmatrix}; \quad (5.31a)$$

Искомый прогиб пластины и функцию напряжений приведем в виде ряда по синусам:

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (5.32)$$

Такое представление прогиба обеспечивает точное выполнение граничных условий шарнирного опирания. С учетом (5.32) уравнение (5.31a) имеет вид:

$$\pi^4 D \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = \overbrace{q(x, y)}^{q^*(x, y)} - \left( \frac{\partial^2 M_x^*}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 H^*}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^*}{\partial y^2} \right), \quad (5.33)$$

Произвольные функции  $q(x, y)$  и  $q^*(x, y)$  должны быть также разложены в двойной тригонометрический ряд по синусам. Им соответствуют коэффициенты разложения при распределении нагрузки по всей площади пластины:

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}; \quad (5.34)$$

$$q^*(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn}^* \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}.$$

$$q_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy; \quad (5.35)$$

$$q_{mn}^* = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q^*(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy.$$

Первый интеграл в (5.35) при некоторых вариантах нагружения может быть вычислен аналитически. Так, при  $q = const$ :

$$q_{mn} = \begin{cases} \frac{16q}{m\pi^2}, & \text{если } m = 2k + 1 \text{ и } n = 2p + 1. \\ 0, & \text{если } m \text{ или } n - \text{ четное} \end{cases}. \quad (5.36)$$

Второй интеграл в (5.35) практически всегда в независимости заданного закона ползучести вычисляем численно.

Примечание: Если функция  $q(x, y) = const$  раскладывается только по нечетным  $m$  и  $n$ , то в разложении функции  $q^*(x, y)$  также будут присутствовать только нечетные члены.

Подставим (5.34) в (5.33):

$$\pi^4 D \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (q_{mn} + q_{mn}^*) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (5.37)$$

Выражение для прогиба получим, приравняв коэффициенты рядов в левой и правой части (5.37), получим:



$$w_{mn} = \frac{(q_{mn} + q_{mn}^*)}{\pi^4 D \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2}. \quad (5.38)$$

Зная распределение прогиба  $w_{mn}$ , можно определить по (5.24) напряжения:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{z\pi^2 E}{1-\nu^2} \left[ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{\nu n^2}{b^2} \right) w_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} - \frac{1}{z\pi^2} (\varepsilon_x^* + \nu \varepsilon_y^*) \right]; \\ \sigma_y &= \frac{z\pi^2 E}{1-\nu^2} \left[ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{\nu m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) w_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} - \frac{1}{z\pi^2} (\varepsilon_y^* + \nu \varepsilon_x^*) \right]; \\ \tau_{xy} &= -\frac{z\pi^2 E}{2(1+\nu)} \left( 2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{mn}{ab} w_{mn} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} + \frac{1}{z\pi^2} \gamma_{xy}^* \right). \end{aligned} \quad (5.39)$$

Высокоэластические деформации и величины  $M_x^*$ ,  $M_y^*$ ,  $H^*$ ,  $q_{mn}^*$  в момент времени  $t + \Delta t$  определяются по известным напряжениям.

При помощи описанного подхода была решена задача, представленная в предыдущем параграфе. Количество интервалов по  $x$ ,  $y$ , и по времени принималось равным 50.

На рисунке 5.7 приведен график роста наибольшей величины прогиба при различном числе членов ряда. Из представленных графиков видно, что при  $k = 4$  ( $m = 1, 3$  и  $n = 1, 3$ ) и  $k = 9$  ( $m = 1, 3, 5$  и  $n = 1, 3, 5$ ) результаты практически совпадают.

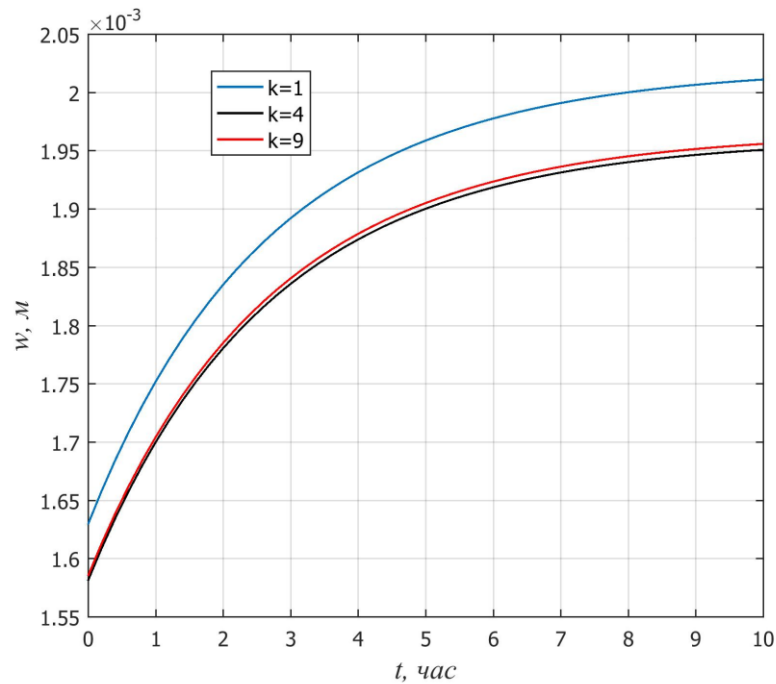


Рисунок 5.7 – Графики распределения наибольшей величины прогиба при различном числе членов ряда

Сравнение наибольших величин прогиба в различные моменты времени, полученных методом конечных элементов (МКЭ) и численно-аналитически (ЧАР) при  $m, n = 1, 3, 5$  приведено в таблице 5.1.

Таблица 5.1 Сравнение прогибов в центре пластины в различные моменты времени, полученных на основе численно аналитического решения ( $w_1$ ), с решением при помощи МКЭ ( $w_2$ )

t, час	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$w_1$ , мм	1.5918	1.7034	1.7981	1.8299	1.8714	1.8992	1.9164	1.9321	1.9364
$w_2$ , мм	1.6134	1.7212	1.8054	1.8544	1.8862	1.9082	1.9155	1.9241	1.9388

В целом совпадение результатов свидетельствует о их достоверности. Однако отметим, наибольшее расхождение – 1,88 %.

Приведем результаты решения задачи для гибкой пластины с использованием уравнений (5.29) и (5.31) с сравнением решением в ПК ANSYS.

Сравнение максимальных прогибов, полученных по авторской методике и в ANSYS, приведено на рисунке 5.8. График показывает, что полученные в ANSYS прогибы несколько выше, что объясняется учетом в данном комплексе деформаций поперечного сдвига для КЭ пластин. В то же время в ANSYS не учитывается нелинейное распределение напряжений по толщине пластины.

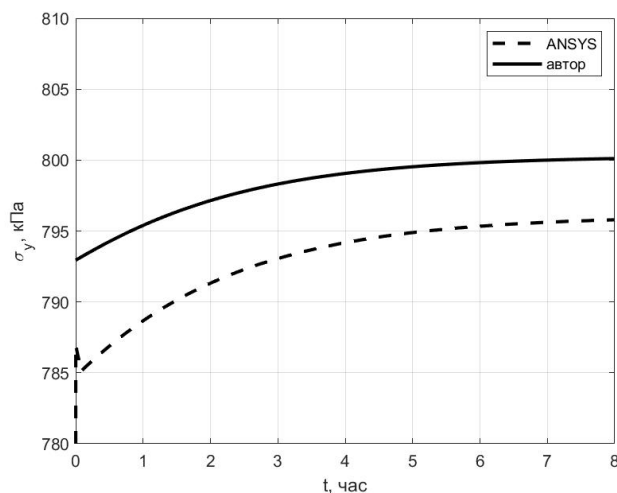
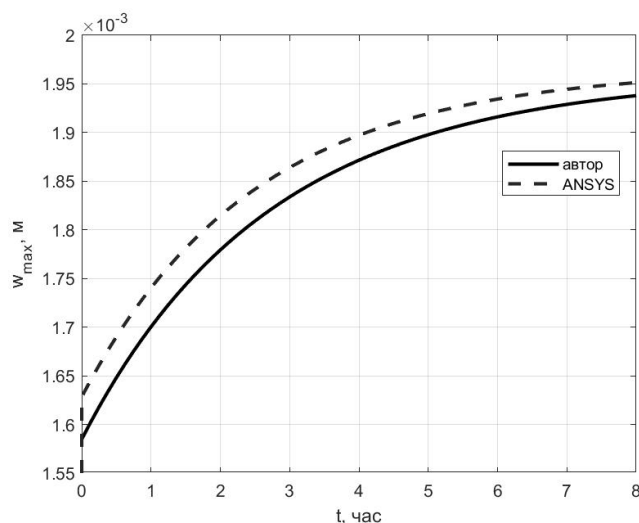


Рисунок 5.8 – Сравнение прогибов, полученных автором, с решением в ПК ANSYS

Рисунок 5.9 – Сравнение максимальных напряжений  $\sigma_y$ , полученных автором, с решением в ПК ANSYS

На рисунке 5.9 представлено сравнение максимальных напряжений  $\sigma_y$ , полученных в ANSYS и по авторской методике. Не учет в ANSYS нелинейности распределения напряжений по толщине пластины приводит к немного заниженным значениям максимальных напряжений. То же самое касается напряжений  $\sigma_x$ , графики которых приведены на рисунке 5.10.

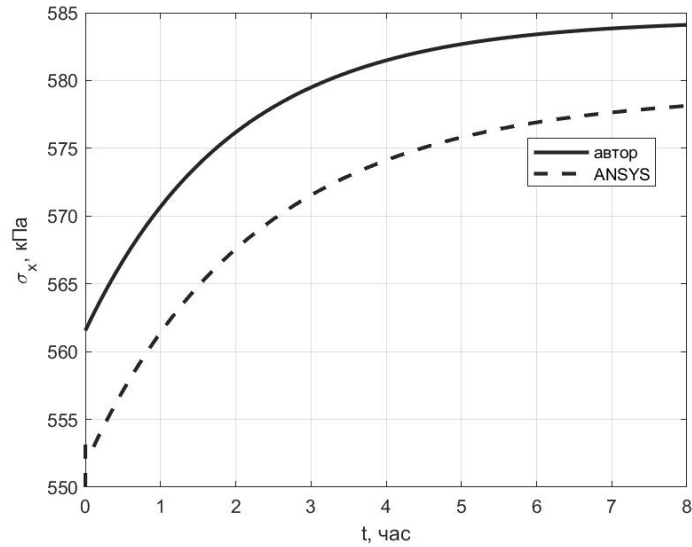


Рисунок 5.10 – Сравнение максимальных напряжений  $\sigma_x$ , полученных автором, с решением в ПК ANSYS

#### 5.4 Устойчивость прямоугольной пластинки из вторичного ПВХ в условиях ползучести

Была решена задача для полимерной пластинки из поливинилхлорида при  $a = 2$  м,  $b = 2$  м,  $E = 1480$  МПа,  $h = 1$  см,  $\nu = 0.3$ .

В качестве закона ползучести использовалось нелинейное уравнение Максвелла-Гуревича, имеющее вид:

$$\frac{\partial \varepsilon_{ij}^*}{\partial t} = \frac{f_{ij}^*}{\eta^*}, \quad i = x, y, \quad j = x, y; \quad f_{ij}^* = \frac{3}{2}(\sigma_{ij} - \sigma_0 \delta_{ij}) - E_\infty \varepsilon_{ij}^*;$$

$$\eta^* = \eta_0^* \exp\left(-\frac{|f_{max}^*|}{m^*}\right); \quad f_{max}^* = \left| \frac{3}{2}(\sigma_{rr} - \sigma_0) - E_\infty \varepsilon_{rr}^* \right|_{max}, \quad (5.40)$$

где  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера,  $\sigma_0 = (\sigma_x + \sigma_y)/3$  – среднее напряжение,  $\eta_0^*$  – начальная релаксационная вязкость,  $E_\infty$  – модуль высокоэластичности,  $m^*$  – модуль скорости, индексы  $rr$  соответствуют направлениям главных напряжений.

Реологические параметры ПВХ  $E_\infty = 5990$  МПа,  $m^* = 12.6$  МПа,  $\eta_0^* = 5.44 \cdot 10^7$  МПа · с.

Начальная погибь  $w_0(x, y)$  задавалась функцией, соответствующей форме потери устойчивости упругой пластинки:

$$w_0(x, y) = f_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}. \quad (5.41)$$

Потеря устойчивости для упругой идеальной пластинки при целом отношении сторон  $a/b$  происходит при нагрузке равной [82]:

$$p_{кр} = \frac{4\pi^2 D}{b^2}. \quad (5.42)$$

Для контроля достоверности результатов на первом этапе была решена упругая задача при указанных выше исходных данных с последующим сравнением с решением МКЭ.

Значение  $f_0$  принималось равным 0.15 мм. При решении методом конечных разностей расчет выполнялся на сетке 20x20, количество шагов - 200. При использовании МКЭ пластина разбивалась треугольными элементами с размером стороны 0.1 м, количество шагов по нагрузке такое же. Мгновенная критическая нагрузка по формуле (5.113) составила 1.34 кН/м.

В таблице 5.2 представлено сравнение прогибов в центре пластины при различных величинах нагрузки, вычисленных на основе решения авторов и в МКЭ. Результаты, полученные двумя методами, хорошо согласуются между собой. При нагрузке 1.33 кН/м наблюдается отклонение, поскольку при приближении к мгновенной критической нагрузке прогибы стремятся к бесконечности.

Таблица 5.2 Сравнение решения авторами упругой задачи с результатами в МКЭ

$p$ , кН/м	0.133	0.266	0.399	0.532	0.665	0.798	0.931	1.064	1.197	1.33
	$w$ , мм									
МКЭ	0.016	0.037	0.063	0.098	0.146	0.218	0.336	0.562	1.163	3.646
МКР	0.016	0.037	0.063	0.099	0.148	0.221	0.342	0.578	1.229	4.229

В работе [82] при анализе устойчивости круглой пластинки с учетом ползучести вводится величина длительной критической нагрузки  $p_\infty$  путем замены мгновенной цилиндрической жесткости  $D$  на длительную  $D_\infty$ , определяемую по формуле:

$$D_\infty = \frac{\alpha h^3}{12(\alpha^2 - \beta^2)}, \quad (5.43)$$

где

$$\alpha = \frac{1}{E} + \frac{1}{E_\infty}; \quad \beta = \frac{\nu}{E} + \frac{1}{2E_\infty}.$$

Для круглой пластинки было установлено, что при  $p < p_\infty$  скорость роста перемещений во времени затухает, при  $p = p_\infty$  перемещения растут с постоянной скоростью, а при  $p > p_\infty$  скорость роста прогибов возрастает.

Также исследовался характер изменения перемещений во времени для  $p < p_\infty$ ,  $p = p_\infty$ ,  $p > p_\infty$  при различных величинах стрелы начальной погиби  $f_0$ .

Было установлено, что при  $p < p_\infty$  скорость роста прогиба всегда носит затухающий характер, независимо от величины начальной погиби. Графики роста прогиба при  $p = 0.9 p_\infty$  приведены на рисунке 5.11.

Однако при  $p \geq p_\infty$  указанный в [186] характер изменения перемещений наблюдался только при небольших прогибах. Графики роста максимального прогиба при  $p = p_\infty$  и  $p > p_\infty$  приведены на рисунках 5.12 и 5.13. При достижении вертикальными перемещениями величин,

соизмеримых с толщиной пластинки скорость их роста начинает затухать даже при нагрузке больше длительной критической.

Интенсивное выпучивание сдерживается перераспределением напряжений в срединной поверхности. Графики изменения усилий  $N_x$ ,  $N_y$  и  $S$  в зависимости от  $x$  и  $y$ , построенные при  $f_0 = 0.05$  мм,  $p = 1.1 p_{дл}$ ,  $t = 10$  ч, приведены на рисунках 5.14 – 5.16. При больших начальных значениях погиби участок с возрастающей скоростью роста прогиба отсутствует вообще.

Интенсивное выпучивание сдерживается перераспределением напряжений в срединной поверхности.

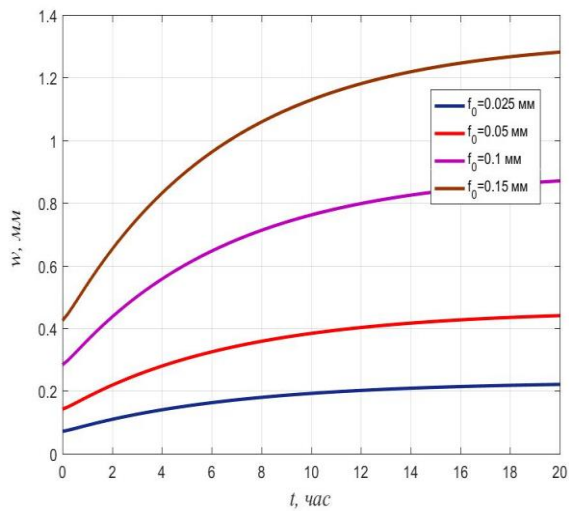


Рисунок 5.11 – Графики роста прогиба при  $p = 0.9p_{\infty}$

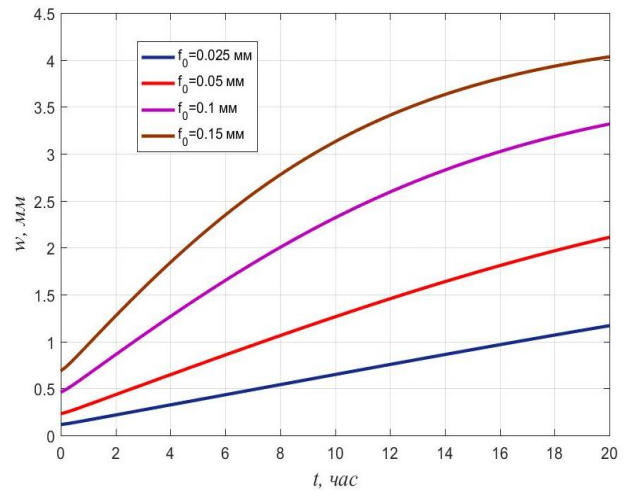


Рисунок 5.12 – Графики роста прогиба при  $p = p_{\infty}$

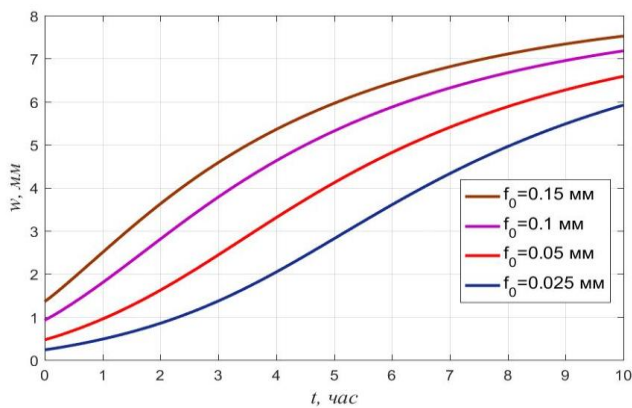


Рисунок 5.13 – Графики роста прогиба при  $p = 1.1p_{\infty}$

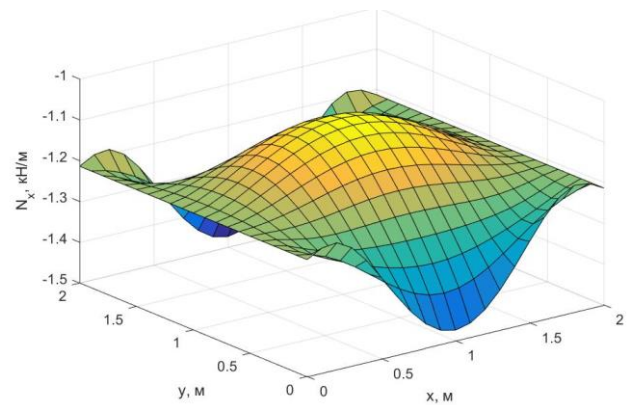


Рисунок 5.14 – Распределение усилий  $N_x$  в зависимости от  $x$  и  $y$

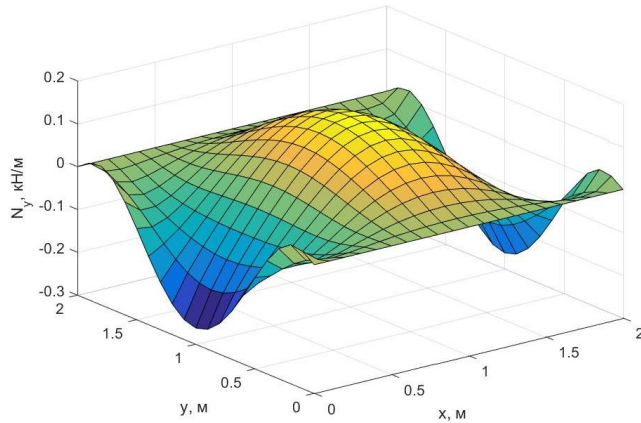


Рисунок 5.15 – Распределение усилий  $N_y$  в зависимости от  $x$  и  $y$

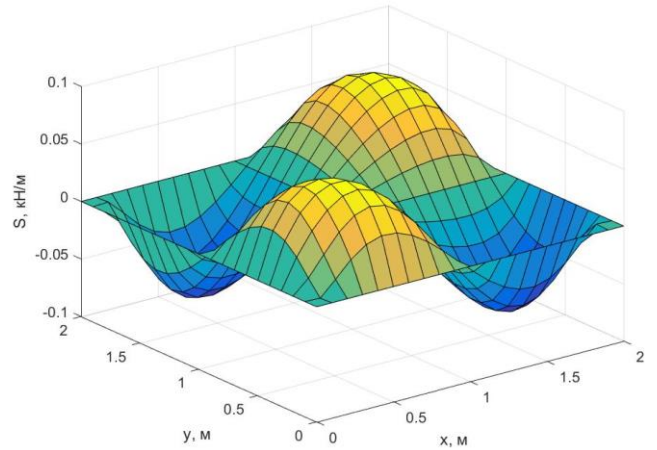


Рисунок 5.16 – Распределение сдвигающих усилий  $S$  в зависимости от  $x$  и  $y$

### 5.5 Изгиб пластин с учетом геометрической нелинейности. Конечно-элементное моделирование ползучести вязкоупругих пластин.

В настоящем разделе приводится вывод уравнений изгиба пластин в задачах ползучести при использовании метода конечных элементов с учетом геометрической нелинейности.

Физические уравнения, в частности, связь напряжений и вектора полных деформаций (суммы деформаций срединной поверхности, деформаций, обусловленных изменением кривизны) запишется в виде:

$$\{\sigma\} = [\bar{D}]\{\varepsilon^{el}\} = [\bar{D}](\{\varepsilon_{whole}\} - \{\varepsilon^*\}) = [\bar{D}][(\{\varepsilon_l^o\} + \{\varepsilon_{nl}^o\} + z\{\chi\}) - \{\varepsilon^*\}]. \quad (5.44)$$

Здесь

$\{\sigma\} = \{\sigma_x \quad \sigma_y \quad \tau_{xy}\}^T$  – вектор напряжений,

$\{\varepsilon^{el}\} = \{\varepsilon_{\varepsilon_{whole}}\} - \{\varepsilon^*\}$  – вектор упругих деформаций

$\{\varepsilon_{whole}\} = \{\varepsilon_l^m\} + \{\varepsilon_{nl}^m\} + z\{\chi\}$ ; – вектор полных деформаций

$\{\varepsilon^*\} = \{\varepsilon_x^* \quad \varepsilon_y^* \quad \gamma_{xy}^*\}^T$  – вектор деформаций ползучести

$$[\bar{D}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \text{ – матрица упругих механических характеристик; } \quad (5.45)$$

Отметим, вектор полных деформаций  $\{\varepsilon_{utter}\}$  включают в себя деформации, обусловленные изменением кривизны и деформации срединной поверхности:

$$\{\varepsilon_{whole}\} = \{\varepsilon^m\} + z\{\chi\}. \quad (5.46)$$

При больших прогибах, деформации срединной поверхности  $\{\varepsilon^m\}$  включают себя линейную и нелинейную составляющую, а также приведем деформации, обусловленных изменением кривизны через прогиб:

$$\{\varepsilon^m\} = \{\varepsilon_l^m\} + \{\varepsilon_{nl}^m\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \\ \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \\ 2\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix}, \quad \{\chi\} = \begin{Bmatrix} \chi_x \\ \chi_y \\ 2\chi_{xy} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (5.47)$$

С учетом выше приведенного, запишем согласно вариационного принципа Лагранжа вид потенциальной энергии деформации:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V \sigma^T \varepsilon^{el} dV = \frac{1}{2} \int_V (\varepsilon^{el})^T [\bar{D}] \varepsilon^{el} dV \quad (5.48)$$

Подставив (5.47), (5.84), (5.85) в (5.87) получим выражение для потенциальной энергии:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_V \sigma^T [\{\varepsilon_l^m\} + \{\varepsilon_{nl}^m\} + z\{\chi\} - \{\varepsilon^*\}] dV = \\ & = \frac{1}{2} \int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} [\{\varepsilon_l^m\}^T + \{\varepsilon_{nl}^m\}^T + z\{\chi\}^T - \{\varepsilon^*\}^T] [\bar{D}] (\{\varepsilon_l^m\} + \{\varepsilon_{nl}^m\} + z\{\chi\} - \{\varepsilon^*\}) dz dA \end{aligned} \quad (5.49)$$

$$\Pi = \frac{1}{2} (\Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3 + \Phi_4 + \Phi_5) \quad (5.50)$$

$$\Phi_1 = \int_A \{\varepsilon_l^m\}^T \left( \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} [\bar{D}] dz \{\varepsilon_l^m\} + \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} [\bar{D}] z dz \{\chi\} - \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} [\bar{D}] \{\varepsilon^*\} dz \right); \quad (5.51)$$

$$\Phi_2 = \int_A \{\chi\}^T \left( \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} [\bar{D}] z dz \{\varepsilon_l^m\} + \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} [\bar{D}] z^2 dz \{\chi\} - \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} [\bar{D}] \{\varepsilon^*\} z dz \right); \quad (5.52)$$

$$\Phi_3 = \int_A -\{\varepsilon_l^m\}^T \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} [\bar{D}] \{\varepsilon^*\} dz - \{\chi\}^T \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} [\bar{D}] \{\varepsilon^*\} z dz; \quad (5.53)$$

$$\Phi_4 = \int_A 2\{\varepsilon_{nl}^m\}^T \left( \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} [\bar{D}] dz \{\varepsilon_l^m\} + \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} [\bar{D}] z dz \{\chi\} - \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} [\bar{D}] \{\varepsilon^*\} dz \right); \quad (5.54)$$

$$\Phi_5 = \int_A \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \{\varepsilon^*\}^T [\bar{D}] \{\varepsilon^*\} dz + \{\varepsilon_{nl}^m\}^T \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} [\bar{D}] dz \{\varepsilon_{nl}^m\} dA; \quad (5.55)$$

Заметим, что предпоследнее слагаемое  $\Phi_4$  после дифференцирования потенциальной энергии по вектору узловых перемещений обратится в нуль.

Расписав отдельно для каждого слагаемого интеграл  $\Phi_i$  и пренебрегая величинами более высокого порядка малости, рассмотрим подынтегральные выражения, в которые входят упругие постоянные  $[\bar{D}]$ :

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} [\bar{D}] dz &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}; \quad \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} [\bar{D}] z dz = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix}; \\ \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} [\bar{D}] z^2 dz &= \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} \end{bmatrix}; \\ \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} [\bar{D}] \{\varepsilon^*\} dz &= \begin{Bmatrix} N_x^* \\ N_y^* \\ S_z^* \end{Bmatrix}; \quad \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} [\bar{D}] \{\varepsilon^*\} z dz = \begin{Bmatrix} M_x^* \\ M_y^* \\ H_z^* \end{Bmatrix}; \end{aligned} \quad (5.56)$$

Соотношения в (5.51) и (5.52) примут вид:

$$\begin{aligned} \left( \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} [\bar{D}] dz \{\varepsilon_l^m\} + \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} [\bar{D}] z dz \{\chi\} - \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} [\bar{D}] \{\varepsilon^*\} dz \right) &= \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ S_z \end{Bmatrix}; \\ \left( \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} [\bar{D}] z dz \{\varepsilon_l^m\} + \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} [\bar{D}] z^2 dz \{\chi\} - \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} [\bar{D}] \{\varepsilon^*\} z dz \right) &= \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ H_z \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (5.57)$$

Потенциальная энергия деформаций, с учетом последних двух соотношений (5.56) и (5.57) имеет вид:

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2} \int_A \left[ \{\varepsilon_l^m\}^T \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ S_z \end{Bmatrix} + \{\chi\}^T \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ H_z \end{Bmatrix} - \{\varepsilon_l^m\}^T \begin{Bmatrix} N_x^* \\ N_y^* \\ S_z^* \end{Bmatrix} - \{\chi\}^T \begin{Bmatrix} M_x^* \\ M_y^* \\ H_z^* \end{Bmatrix} + 2\{\varepsilon_{nl}^m\}^T \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ S_z \end{Bmatrix} \right] dA \\ &= \frac{1}{2} \int_A \{\varepsilon\}^T (\{N\} - \{N^*\}) + \int_A \{\varepsilon_{nl}^m\}^T \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ S_z \end{Bmatrix} dA \end{aligned} \quad (5.58)$$

или связав внутренние усилиями и деформациями в пластинке:



$$\Pi = \frac{1}{2} \int_A \{\varepsilon\}^T ([D]\{\varepsilon\} - 2\{N^*\}) dA + \int_A \{\varepsilon_{nl}^m\}^T \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ S_z \end{Bmatrix} dA \quad (5.59)$$

Связь между узловыми перемещениями и деформациями в МКЭ представляется:

$$\{\varepsilon\} = [B]\{U\} \quad (5.60)$$

где  $\{U\}$  – вектор узловых перемещений.

Первый интеграл в (5.59) с учетом (5.60) примет следующий вид:

$$\frac{1}{2} \int_A \{\varepsilon\}^T ([D]\{\varepsilon\} - 2\{N^*\}) dA = \frac{1}{2} \{U\}^T \overbrace{\int_A \{B\}^T [D] [B] dA}^{[K]} \{U\} - \{U\}^T \underbrace{\int_A \{B\}^T dA}_{\{F\}^*} \{N^*\} \quad (5.61)$$

Второй интеграл в (5.59) с учетом аппроксимации прогиба в виде произведения функции формы и вектора узловых перемещений  $w(x, y) = \{\Psi\}\{U\}$  имеет вид:

$$\begin{aligned} \int_A \{\varepsilon_{nl}^m\}^T \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ S_z \end{Bmatrix} dA &= \frac{1}{2} \int_A \left[ N_x \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + N_y \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + 2S \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] dA = \\ &= \frac{1}{2} \{U\}^T \int_A \underbrace{\left[ N_x \frac{\partial \{\Psi\}^T}{\partial x} \frac{\partial \{\Psi\}}{\partial x} + N_y \frac{\partial \{\Psi\}^T}{\partial y} \frac{\partial \{\Psi\}}{\partial y} + S \left( \frac{\partial \{\Psi\}^T}{\partial x} \frac{\partial \{\Psi\}}{\partial y} + \frac{\partial \{\Psi\}^T}{\partial y} \frac{\partial \{\Psi\}}{\partial x} \right) \right]}_{[K]_g} dA \{U\} \end{aligned} \quad (5.62)$$

Окончательно потенциальная энергия деформаций:

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2} \{U\}^T \overbrace{\int_A \{B\}^T [D] [B] dA}^{[K]} \{U\} - \{U\}^T \underbrace{\int_A \{B\}^T dA}_{\{F\}^*} \{N^*\} - \\ &+ \frac{1}{2} \{U\}^T \int_A \underbrace{\left[ N_x \frac{\partial \{\Psi\}^T}{\partial x} \frac{\partial \{\Psi\}}{\partial x} + N_y \frac{\partial \{\Psi\}^T}{\partial y} \frac{\partial \{\Psi\}}{\partial y} + S \left( \frac{\partial \{\Psi\}^T}{\partial x} \frac{\partial \{\Psi\}}{\partial y} + \frac{\partial \{\Psi\}^T}{\partial y} \frac{\partial \{\Psi\}}{\partial x} \right) \right]}_{[K]_g} dA \{U\} \end{aligned} \quad (5.63)$$

Минимизируя полную энергию, по вектору узловых перемещений, получим систему алгебраических уравнений::

$$([K] + [K]_g)\{U\} = \{F\} + \{F\}^* \quad (5.64)$$

Здесь:

$[K]$  – матрица жесткости геометрически линейного КЭ;

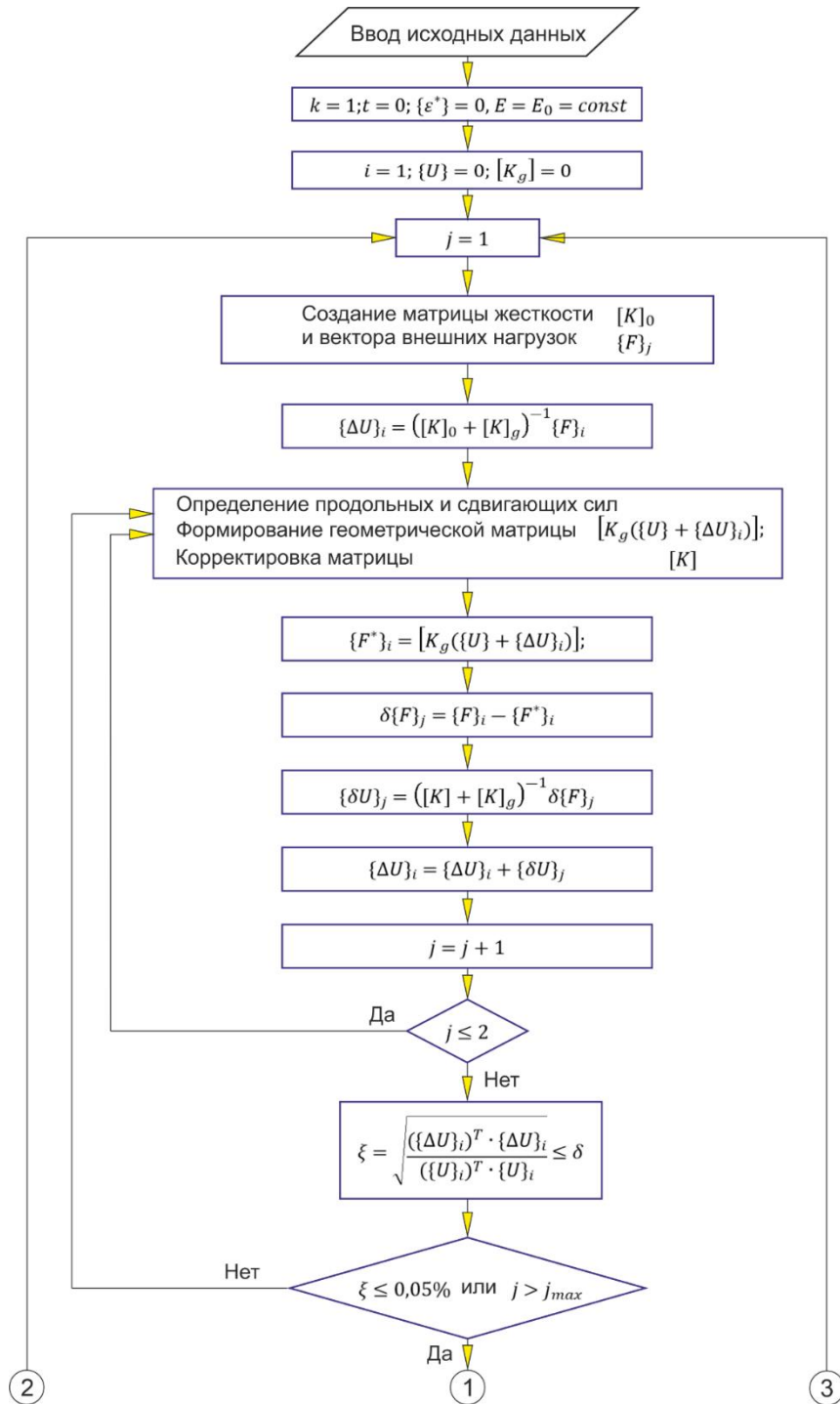
$[K]_g$  – геометрическая матрица жесткости;

$\{F\}^*$  – вклад деформаций ползучести в вектор нагрузки.

Система алгебраических уравнений является нелинейной, поскольку элементы геометрической матрицы жёсткости  $[K_g]$  зависят от продольных и сдвигающих усилий в конечных элементах, которые в свою очередь являются функциями от перемещений.

Вычислительный процесс МКЭ реализуем по схеме ступенчатого увеличения нагрузки с одновременной корректировкой матриц  $[K]$  и  $[K_g]$ .

Расчетная блок-схема приведена на рисунке 5.19.



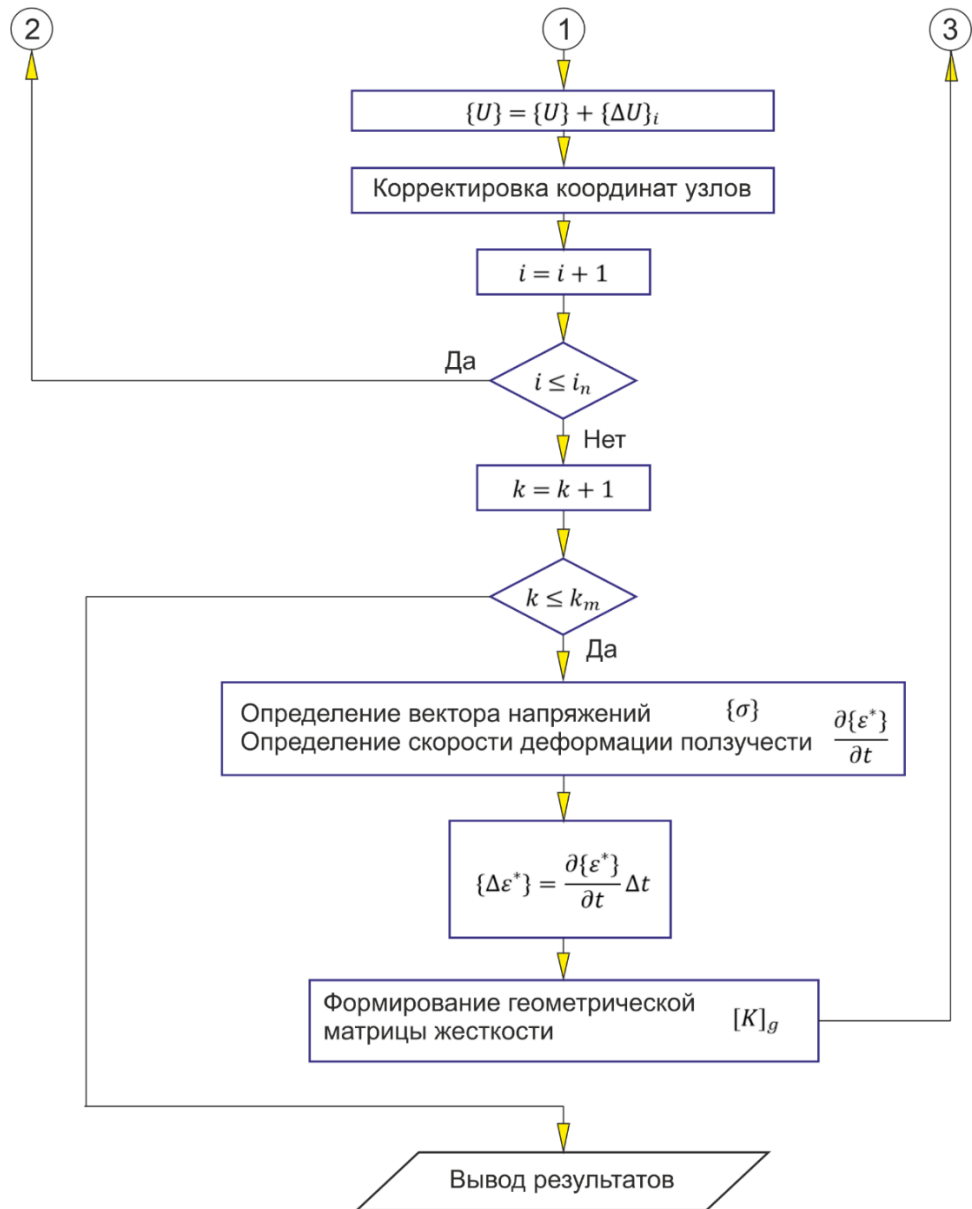


Рисунок 5.19 – Расчетная блок – схема (завершение)

Приращение нагрузки на  $i$ -м шаге выполняется квазистатически и небольшой порцией. Решение геометрически нелинейной задачи осуществляется при помощи метода Ньютона–Рафсона, сущность которого состоит в последовательном вычислении дополнительных перемещений элементов, обусловленных невязкой сил.

*Примечание:* Поскольку после первого шага нагружения срединная плоскость пластины переходит в срединную поверхность, то при решении МКЭ нет никакой разницы между гибкой пластиной и гибкой оболочкой, т.е. разработанная методика применима и для расчета оболочек произвольной формы.

Сравним решение системы (5.6) и (5.11) которая решалась методом последовательных приближений в сочетании с методом конечных разностей для жестко защемленной по контуру пластины из ЭДТ-10, нагруженной равномерно распределенной по площади нагрузкой (рисунок 5.17) при  $\nu = 0.3$ ,  $E = 3035$  МПа,  $E_\infty = 2310$  МПа,  $m^* = 4,44$  МПа,  $\eta_0 = 1,8 \cdot 10^8$  МПа·с,  $c = 1$  м,  $h = 15$  мм.

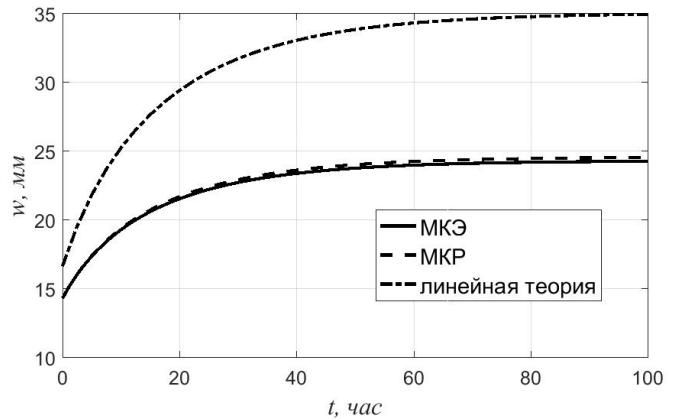
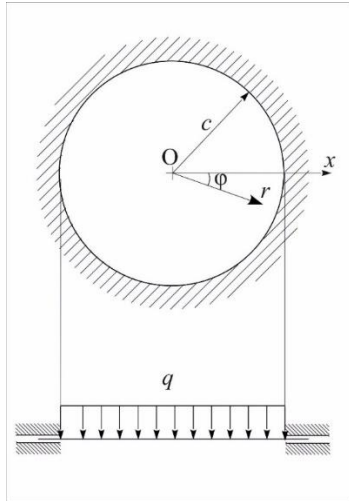


Рисунок 5.17 – Расчетная схема Рисунок 5.18 – Графики роста прогиба пластинки

Для контроля правильности разработанной методики было выполнено решение этой задачи в двумерной постановке при помощи плоских треугольных конечных элементов.

На рисунок 5.18 показан график роста прогиба в центре пластины при  $q = 1$  кПа.

Сплошной линии соответствует результат, полученный при помощи МКЭ, а штриховой – решение в одномерной постановке с помощью МКР. Также штрихпунктирной линией показано решение по геометрически линейной теории.

Разница между перемещениями в конце процесса ползучести, полученными при помощи МКЭ и МКР, составила всего 1.15%. По геометрически линейной теории прогиб при  $t \rightarrow \infty$  оказался завышенным на 42%.

Далее приводится построение вышеперечисленных матриц  $[K]$ ,  $[K]_g$  и вектора нагрузки  $\{F\}^*$  на примере плоского треугольного элемента.

### 5.5.1 Формирование матрицы жесткости плоского треугольного конечного элемента в локальной системе координат с учетом деформации ползучести

В настоящей главе приводится вывод уравнений изгиба с учетом ползучести для плоского треугольного конечного элемента, что позволяет рассчитывать пластины произвольной формы.

Рассматриваемый конечный элемент приведен на рисунке 5.18.

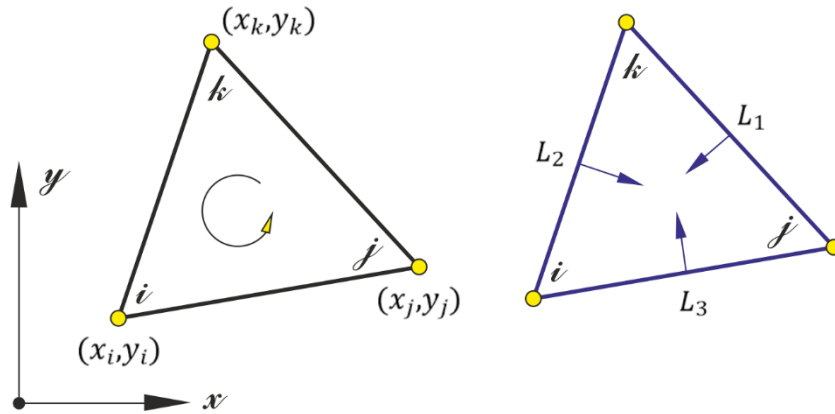


Рисунок 5.18 – Треугольный элемент и L-координаты

Линейный треугольный элемент представляет собой треугольник с прямолинейными сторонами и тремя узлами  $i, j, k$ , по одному в каждой вершине (см. рисунок 5.17).

Выведем вид базисных функций треугольного линейного элемента. При работе с узлами требуется определенная нумерация или направление обхода узлов элемента.

Будем использовать направление против часовой стрелки. Координаты узлов соответственно равны  $(x_i, y_i), (x_j, y_j), (x_k, y_k)$ . Здесь  $i = 1, j = 2, k = 3$ .

Каждый узел данного КЭ имеет 5 степеней свободы: перемещения  $u_i$  и  $v_i$  срединной поверхности, прогиб  $w_i$ , углы поворота  $\varphi_{ix}$  и  $\varphi_{iy}$ . Что касается угла поворота  $\varphi_{iz}$  относительно оси, перпендикулярной плоскости КЭ, то он не входит в число искомых узловых параметров.

*Примечание:* в некоторых МКЭ комплексах (Лира, Scad) библиотека КЭ реализована именно таким образом, и 6-я степень свободы оболочечного КЭ оказывается фиктивной. Будем и мы придерживаться этого подхода, как наиболее простого.

Блочное представление поля перемещения представим в виде:

$$\{U\} = \begin{Bmatrix} \{U_m\} \\ \{U_{bend}\} \end{Bmatrix} \quad (5.65)$$

Где  $\{U_m\} = \{u_1 \ v_1 \ u_2 \ v_2 \ u_3 \ v_3\}^T$  – перемещения элемента в его срединной плоскости  
 $\{U_{bend}\} = \{w_1 \ \varphi_{1,x} \ \varphi_{1,y} \ w_2 \ \varphi_{2,x} \ \varphi_{2,y} \ w_3 \ \varphi_{3,x} \ \varphi_{3,y}\}^T$  – перемещения элемента, вызванный изгибом.

Поле перемещений  $\{U_{bend}\}$  элемента представим в виде:

$$\{U_{bend}\} = \{\{\rho_1\} \ \{\rho_2\} \ \{\rho_3\}\}^T, \quad (5.66)$$

где

$$\{\rho_i\} = \{w_i \ \varphi_{i,x} \ \varphi_{i,y}\}^T = \left\{ w_i \ -\frac{\partial w}{\partial y} \Big|_i \ -\frac{\partial w}{\partial x} \Big|_i \right\}^T.$$

Согласно общему числу изгибных степеней свободы КЭ, функцию прогиба аппроксимируем полиномом с девятью неопределенными коэффициентами  $\alpha_i, (i = 1 \div 9)$ :

$$w = \alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2 + \alpha_3 L_3 + \alpha_4 (L_2^2 L_1 + \frac{1}{2} L_1 L_2 L_3) + \dots + \alpha_9 (L_1^2 L_3 + \frac{1}{2} L_1 L_2 L_3), \quad (5.67)$$

где  $L_1, L_2, L_3$  – естественные координаты.

Коэффициенты  $\alpha_{1..9}$  можно найти путем подстановки в выражение (5.67) узловых значений прогибов и углов поворота. Соотношения для углов поворота  $\varphi_x$  и  $\varphi_y$ , функцию прогиба необходимо продифференцировать соответственно по  $x$  и по  $y$ .

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial L_1}{\partial x} \frac{\partial}{\partial L_1} + \frac{\partial L_2}{\partial x} \frac{\partial}{\partial L_2} + \frac{\partial L_3}{\partial x} \frac{\partial}{\partial L_3} = \frac{1}{2A} \left( b_1 \frac{\partial}{\partial L_1} + b_2 \frac{\partial}{\partial L_2} + b_3 \frac{\partial}{\partial L_3} \right); \\ \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial L_1}{\partial y} \frac{\partial}{\partial L_1} + \frac{\partial L_2}{\partial y} \frac{\partial}{\partial L_2} + \frac{\partial L_3}{\partial y} \frac{\partial}{\partial L_3} = \frac{1}{2A} \left( c_1 \frac{\partial}{\partial L_1} + c_2 \frac{\partial}{\partial L_2} + c_3 \frac{\partial}{\partial L_3} \right).\end{aligned}\quad (5.68)$$

где  $A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$  – площадь треугольника,  $a_i = x_2 y_3 - x_3 y_2$ ,  $b_i = y_2 - y_3$ ,  $c_i = x_3 - x_2$ .

$$L_i = \frac{1}{2A} (a_i + b_i x + c_i y), \quad i = 1..3, \quad (5.69)$$

Коэффициенты  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $c_i$  при  $i = 2$  и  $i = 3$  определяются путем циклической замены индексов  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ .

Определив коэффициенты  $\alpha_{1..9}$ , функция прогиба  $w$  через узловые перемещения имеют вид:

$$w = \{ \{N_1\} \quad \{N_2\} \quad \{N_3\} \} \{U\} = \{ \Psi \} \{U_{bemd}\}, \quad (5.70)$$

здесь  $\{N_1\}$ ,  $\{N_2\}$ ,  $\{N_3\}$  – функции формы.

$$\{N_1\}^T = \left\{ \begin{aligned} &L_1 + L_1^2 L_2 + L_1^2 L_3 - L_1 L_2^2 - L_1 L_3^2 \\ &b_3 \left( L_1^2 L_2 + \frac{1}{2} L_1 L_2 L_3 \right) - b_2 \left( L_3 L_1^2 + \frac{1}{2} L_1 L_2 L_3 \right) \\ &c_3 \left( L_1^2 L_2 + \frac{1}{2} L_1 L_2 L_3 \right) - c_2 \left( L_3 L_1^2 + \frac{1}{2} L_1 L_2 L_3 \right) \end{aligned} \right\}. \quad (5.71)$$

Для выражения  $\{N_2\}$  и  $\{N_3\}$ , следует выполнить в (5.71) циклическую замену индексов  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ .

Вектор изменений кривизн (5.47) представим через функцию  $\Psi$  (5.70):

$$\{\chi\} = \begin{Bmatrix} \chi_x \\ \chi_y \\ 2\chi_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 \{ \Psi \}}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 \{ \Psi \}}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 \{ \Psi \}}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \cdot \{U_{bemd}\} = [B_{bemd}] \cdot \{U_{bemd}\} \quad (5.72)$$

Матрица  $[B_{bemd}]$  размером  $3 \times 9$  была получена при помощи функций пакета Matlab для работы с символьными переменными и соответствующая программа для определения коэффициентов матрицы  $[B]$  приводится в приложении. Формулы для ее элементов использованы из работы [237].  $\{\varepsilon^m\} = \{\varepsilon_l^m\}$

Вектор обобщенных деформаций с узловыми перемещениями связаны соотношением:

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \{\varepsilon_l^m\} \\ \{\chi\} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [B_m] \\ [B_{bend}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{U_m\} \\ \{U_{bend}\} \end{Bmatrix} = [B]\{U\}, \quad (5.73)$$

Матрица  $[B_{bend}]$  соответствует матрице  $[B_u]$  из [237].

Получим матрицу  $[B_m]$ , приняв для перемещений  $u$  и  $v$  в пределах элемента линейную аппроксимацию, запишем:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} L_1 & 0 & L_2 & 0 & L_3 & 0 \\ 0 & L_1 & 0 & L_2 & 0 & L_3 \end{bmatrix} \{U_m\}. \quad (5.74)$$

Деформации срединной поверхности связаны с перемещениями (5.47):

$$\{\varepsilon_l^m\} = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} \quad \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right\}^T. \quad (5.75)$$

Соотношения (5.74) с учетом (5.75) будут иметь вид:

$$\{\varepsilon_l^m\} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} \frac{\partial L_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial L_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial L_3}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial L_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial L_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial L_3}{\partial y} \\ \frac{\partial L_1}{\partial y} & \frac{\partial L_1}{\partial x} & \frac{\partial L_2}{\partial y} & \frac{\partial L_2}{\partial x} & \frac{\partial L_3}{\partial y} & \frac{\partial L_3}{\partial x} \end{bmatrix} \{U_m\} = [B_m]\{U_m\}, \quad (5.76)$$

где

$$[B_m] = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \\ c_1 & b_1 & c_2 & b_2 & c_3 & b_3 \end{bmatrix}.$$

Потенциальная энергия деформации с учетом (5.73) будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2} \int_A [\{\varepsilon\}^T [D] - 2\{N^*\}^T] \{\varepsilon\} dA - \int_V \{\varepsilon^*\}^T [\bar{D}] \{\varepsilon^*\} dV = \\ &= \frac{1}{2} \{U\}^T \int_A [B]^T [D] [B] dA \{U\} - \{U\}^T \int_A [B]^T dA \{N^*\} - \int_V \{\varepsilon^*\}^T [\bar{D}] \{\varepsilon^*\} dV. \end{aligned} \quad (5.77)$$

После минимизации полной энергии по узловым перемещениям приходим к системе линейных алгебраических уравнений, имеющей вид

$$([K] + [K]_g)\{U\} = \{F\} + \{F\}^*$$

Матрицу жесткости  $[K]$  если по толщине пластина однородна, можно записать в блочном виде:

$$[K] = \int_A [B]^T [D] [B] dA = \begin{bmatrix} [K_m] \\ [K_{blend}] \end{bmatrix}, \quad (5.78)$$

где

$$\begin{aligned} [K_m] &= h[B_m]^T [\bar{D}] [B_m] A; \\ [K_{blend}] &= \frac{h^3}{12} \int_A [B_{blend}]^T [\bar{D}] [B_{blend}] dA. \end{aligned}$$

Для вычисления матрицы  $[K_{blend}]$ , как и в предыдущем параграфе, используется численное интегрирование. Вектор  $\{F^*\}$  также можно разбить на блоки если пластина однородна:

$$\{F^*\} = \int_A [B]^T dA \{N^*\} = \left\{ \begin{matrix} \{F_m^*\} \\ \{F_{blend}^*\} \end{matrix} \right\}, \quad (5.79)$$

где

$$\{F_m^*\} = [B_m]^T A \begin{Bmatrix} N_x^* \\ N_y^* \\ S^* \end{Bmatrix};$$

$$\{F_{blend}^*\} = \int_A [B_{blend}]^T dA \begin{Bmatrix} M_x^* \\ M_y^* \\ H^* \end{Bmatrix}.$$

При расчете к локальной матрице жесткости  $[K]$ , вычисляемой по формуле (5.78), добавляются 3 строки и 3 столбца из нулей, отвечающие перемещениям  $\varphi_1^z$ ,  $\varphi_2^z$  и  $\varphi_3^z$ . К вектору  $\{F^*\}$  добавляется 3 нулевых элемента.

Для вычисления глобальной матрицы жесткости и формирования соответствующих уравнений метода конечных элементов следует выполнить переход к глобальным координатам  $x, y, z$ . Данный переход подробно приведен в работе [237] и ими воспользуемся при решении тестовых задач.

## 5.6 Устойчивости прямоугольных пластин с учетом геометрической нелинейности.

Целью настоящего раздела является получение разрешающих уравнений для задачи устойчивости нелинейно вязкоупругих прямоугольных пластин, находящихся под действием усилий в срединной плоскости, с учетом геометрической нелинейности. Необходимо отметить, что проблема выпучивания при ползучести не является задачей чистой устойчивости. Требуется задание начальных несовершенств, которые, как правило, принимаются в виде начального искривления либо эксцентриситета приложения нагрузки.

При решении задачи с учетом ползучести по сравнению с теорией упругих гибких пластин изменения претерпевают только физические уравнения. Полные деформации представляются как сумма деформаций срединной поверхности  $\varepsilon_i^m$  и деформаций, вызванных изменением кривизн:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x^m - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \varepsilon_y = \varepsilon_y^m - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}; \quad \gamma_{xy} = \gamma^m - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \quad (5.80)$$

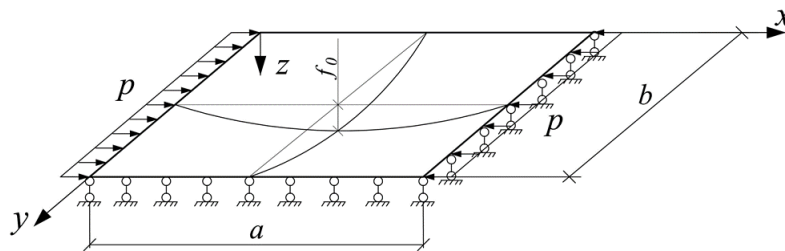


Рисунок 5.44– Расчетная схема задачи



Для деформаций срединной поверхности справедливо уравнение совместности деформаций [87]:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \varepsilon_x^m}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y^m}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma^m}{\partial x \partial y} = \\ & = \left( \frac{\partial^2 (w + w_m)}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 (w + w_0)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 (w + w_m)}{\partial y^2} - \left[ \left( \frac{\partial^2 w_m}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w_m}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_m}{\partial y^2} \right] \end{aligned} \quad (5.81)$$

Для вязкоупругого материала с физической точки зрения полные деформации есть сумма упругих деформаций и деформаций ползучести:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y) + \varepsilon_x^*; \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x) + \varepsilon_y^*; \quad \gamma_{xy} = \frac{2(1 + \nu)}{E} \tau_{xy} + \gamma_{xy}^*, \quad (5.82)$$

где  $\varepsilon_x^*$ ,  $\varepsilon_y^*$ ,  $\gamma_{xy}^*$  – деформации ползучести.

Выражая в (5.99) напряжения через деформации, получим:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1 - \nu^2} [(\varepsilon_x + \nu \varepsilon_y) - (\varepsilon_x^* + \nu \varepsilon_y^*)]; \\ \sigma_y &= \frac{E}{1 - \nu^2} [(\varepsilon_y + \nu \varepsilon_x) - (\varepsilon_y^* + \nu \varepsilon_x^*)]; \quad \tau_{xy} = \frac{E}{2(1 + \nu)} (\gamma_{xy} - \gamma_{xy}^*). \end{aligned} \quad (5.83)$$

Внутренние усилия связаны с напряжениями интегральными зависимостями:

$$\begin{aligned} N_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz; \quad N_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y dz; \quad S = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} dz; \\ M_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz; \quad M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z dz; \quad H = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z dz. \end{aligned} \quad (5.84)$$

Подставляя (5.97) в (5.100) и затем (5.100) в (5.101), получим:

$$\begin{aligned} N_x &= \frac{Eh}{1 - \nu^2} (\varepsilon_x^m + \nu \varepsilon_y^m) - N_x^*; \quad N_y = \frac{Eh}{1 - \nu^2} (\varepsilon_y^m + \nu \varepsilon_x^m) - N_y^*; \\ S &= \frac{Eh}{2(1 + \nu)} \gamma^m - S^*; \\ M_x &= -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) - M_x^*; \quad M_y = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - M_y^*; \\ H &= -D(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - H^*, \end{aligned} \quad (5.85)$$

где

$$\begin{aligned} D &= \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}; \quad N_x^* = \frac{E}{1 - \nu^2} \int_{-h/2}^{h/2} (\varepsilon_x^* + \nu \varepsilon_y^*) dz; \quad N_y^* = \frac{E}{1 - \nu^2} \int_{-h/2}^{h/2} (\varepsilon_y^* + \nu \varepsilon_x^*) dz \\ N_y^* &= \frac{E}{1 - \nu^2} \int_{-h/2}^{h/2} (\varepsilon_y^* + \nu \varepsilon_x^*) dz, \quad S^* = \frac{E}{2(1 + \nu)} \int_{-h/2}^{h/2} \gamma_{xy}^* dz \end{aligned}$$

$$M_x^* = \frac{E}{1-\nu^2} \int_{-h/2}^{h/2} (\varepsilon_x^* + \nu \varepsilon_y^*) z dz; \quad M_y^* = \frac{E}{1-\nu^2} \int_{-h/2}^{h/2} (\varepsilon_y^* + \nu \varepsilon_x^*) z dz$$

$$H^* = \frac{E}{2(1+\nu)} \int_{-h/2}^{h/2} \gamma_{xy}^* z dz.$$

Уравнения равновесия гибкой пластины записываются в виде [87]:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0;$$

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + N_x \frac{\partial^2 (w + w_m)}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 (w + w_m)}{\partial y^2} + 2S \frac{\partial^2 (w + w_m)}{\partial x \partial y} + q$$

$$= 0, \quad (5.86)$$

где  $q$  – поверхностная нагрузка, которая в рассматриваемой задаче отсутствует.

Первые 2 уравнения равновесия удовлетворяются при введении функции напряжений Эри  $\Phi(x, y)$  по формулам:

$$N_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}; \quad N_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}; \quad S = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}. \quad (5.87)$$

Подставив последние 3 равенства (5.102) в третье уравнение равновесия в (5.103) с учетом (5.104), получим первое разрешающее уравнение:

$$D\nabla^4 w = q + q^* + \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 (w + w_m)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 (w + w_m)}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 (w + w_m)}{\partial x \partial y} \right), \quad (5.88)$$

где

$$q^* = - \left( \frac{\partial^2 M_x^*}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 H^*}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y^*}{\partial y^2} \right).$$

Для получения второго разрешающего уравнения выразим из (5.102) деформации срединной поверхности:

$$\varepsilon_x^0 = \frac{N_x - \nu N_y + N_x^* - \nu N_y^*}{Eh} = \frac{1}{Eh} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + N_x^* - \nu N_y^* \right);$$

$$\varepsilon_y^0 = \frac{N_y - \nu N_x + N_y^* - \nu N_x^*}{Eh} = \frac{1}{Eh} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + N_y^* - \nu N_x^* \right); \quad (5.89)$$

$$\gamma^0 = \frac{2(1+\nu)}{Eh} (S + S^*) = \frac{2(1+\nu)}{Eh} \left( -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + S^* \right).$$

Подставив (5.106) в уравнение неразрывности, получим второе уравнение:

$$\frac{1}{Eh} \nabla^4 \Phi = \left( \frac{\partial^2 (w + w_m)}{\partial x \partial y} \right)^2 - \left( \frac{\partial^2 w_m}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 (w + w_m)}{\partial x^2} \frac{\partial^2 (w + w_m)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_m}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_m}{\partial y^2}$$

$$+ \frac{1}{Eh} (2(1+\nu) \frac{\partial^2 S^*}{\partial x \partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 N_x^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 N_y^*}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial^2 N_x^*}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 N_y^*}{\partial x^2}). \quad (5.90)$$

Таким образом, задача свелась к системе из двух нелинейных дифференциальных уравнений (5.105) и (5.107). Граничные условия для представленной на рисунке 5.44 пластины имеют вид:

$$\begin{aligned} \text{при } x = 0, x = a: N_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = -p; S = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = 0; w = 0; M_x = 0; \\ \text{при } y = 0, y = b: N_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 0; S = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = 0; w = 0; M_y = 0. \end{aligned} \quad (5.91)$$

Уравнение (5.105) при малых прогибах и отсутствии деформаций ползучести представляет бигармоническое уравнение плоской задачи теории упругости.

Методику расчета рассмотрим на примере шарнирно опертой по контуру пластинки с начальной погибью  $w_0(x, y)$ , сжимаемой в направлении оси  $x$  распределенной нагрузкой  $p$  [кН/м] (рисунке 5.44).

В качестве граничных условий по функции напряжений для него можно использовать рамную аналогию. Функция напряжений на контуре равна изгибающему моменту  $M$  в раме, а ее производная по нормали к контуру – продольной силе  $N$ . Эпюры  $M$  и  $N$  для рамы можно строить в основной системе метода сил (ОСМС). ОСМС, а также эпюры  $M$  и  $N$  в раме показаны на рисунке 5.45.

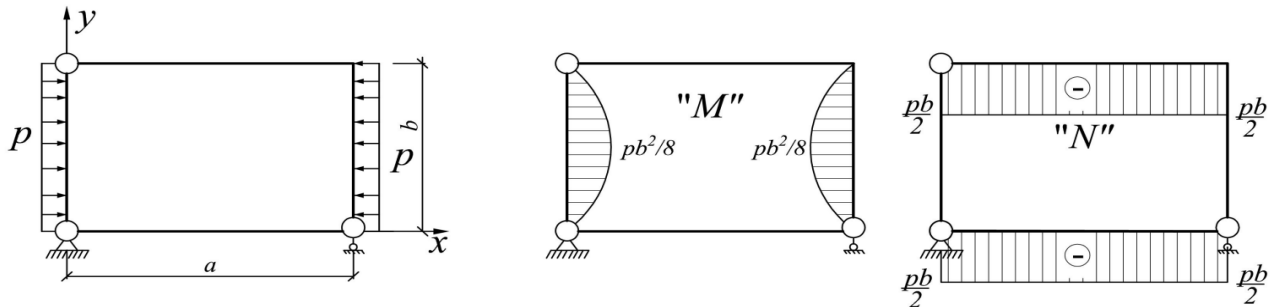


Рисунок 5.45– Основная система метода сил, эпюры изгибающих моментов и продольных сил

Если прогибы малы по сравнению с толщиной пластинки, можно считать, что усилия в срединной поверхности постоянны ( $N_x = -p$ ,  $N_y = S = 0$ ) и выполнять расчет с использованием линейризованного уравнения:

$$D\nabla^4 w + p \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = q^* - p \frac{\partial^2 w_m}{\partial x^2}. \quad (5.92)$$

Решение системы уравнений (5.105) и (5.107) выполняется численно методом конечных разностей в сочетании с методом последовательных приближений и методом Эйлера для определения деформаций ползучести. На первом этапе решается упругая задача. Увеличение нагрузки  $p$  происходит ступенчато небольшими порциями.

Начальные значения прогибов  $w_1$  при малой нагрузке определяются из линейризованного уравнения (5.109). Далее эти значения подставляются в уравнение (5.107), и вычисляется

функция напряжений. Затем выполняется решение уравнения (5.105) с известными значениями функции  $\Phi$ , в результате определяются значения прогибов в узлах  $w_1'$ .

Далее в уравнение (5.105) подставляются значения  $w_2 = (w_1 + w_1')/2$ . Итерационный процесс на каждом шаге повторяется до тех пор, пока относительная разница между максимальными величинами  $w_i$  и  $w_i'$  превышает заданную величину (нами она принималась равной 0.1%).

На втором шаге по нагрузке в качестве начального значения  $w_1$  принимается конечный результат из первого шага. Расчет на ползучесть выполняется аналогично, временной интервал разбивается на заданное количество шагов  $\Delta t$ .

Если закон ползучести задан в дифференциальной форме, деформации ползучести на следующем шаге определяются по известной скорости роста деформаций на текущем шаге при помощи метода Эйлера:

$$\varepsilon_{t+\Delta t}^* = \varepsilon_t^* + \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial t} \Delta t. \quad (5.93)$$

## 5.7 Влияние отверстий на выпучивание прямоугольных пластин при ползучести.

Расчет задачи сжатия пластинки с отверстием с учетом ползучести материала будем вести методом конечных элементов. Используются плоские треугольные конечные элементы, что позволяет рассчитывать пластины произвольной формы.

Перемещения  $u$  и  $v$  в пределах элемента будем аппроксимировать линейными функциями:

$$\begin{aligned} u &= N_1 u_1 + N_2 u_2 + N_3 u_3; \\ v &= N_1 v_1 + N_2 v_2 + N_3 v_3, \end{aligned} \quad (5.94)$$

где  $N_i$  – функции формы, совпадающие с естественными координатами  $L_i$  ( $L_1, L_2, L_3$  –  $L$ -координаты, определяемые следующим образом):

$$L_i = \frac{1}{2A} (a_i + b_i x + c_i y), \quad i = 1 \dots 3, \quad (5.95)$$

где  $A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}$   $A$  – площадь конечного элемента,

$$\begin{aligned} a_1 &= x_2 y_3 - x_3 y_2, & b_1 &= y_2 - y_3, & c_1 &= x_3 - x_2. \\ a_2 &= x_3 y_1 - x_1 y_3, & b_2 &= y_3 - y_1, & c_2 &= x_1 - x_3. \\ a_3 &= x_1 y_2 - x_2 y_1, & b_3 &= y_1 - y_2, & c_3 &= x_2 - x_1. \end{aligned}$$

Связь между деформациями и перемещениями для плоской задачи теории упругости записывается в виде (1.32):

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} \quad \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right\}^T. \quad (5.96)$$

Подставив (5. в (5., получим:

$$\{\varepsilon\} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \\ c_1 & b_1 & c_2 & b_2 & c_3 & b_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = [B]\{U\}. \quad (5.97)$$

Выражение для потенциальной энергии деформации и связь между деформациями и напряжениями также справедливы и для плоской задачи. В итоге потенциальная энергия деформации записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2} \int_V \{\sigma\}^T \{\varepsilon^{el}\} dV = \frac{1}{2} h \int_A ((\{\varepsilon\})^T - \{\varepsilon^*\}^T) [D] (\{\varepsilon\} - \{\varepsilon^*\}) dA = \\ &= \frac{1}{2} h \left( \int_A \{U\}^T [B]^T [D] [B] \{U\} dA - \int_A \{U\}^T [B]^T [D] \{\varepsilon^*\} dA - \right. \\ &\quad \left. - \int_A \{\varepsilon^*\}^T [D] [B] \{U\} dA + \int_A \{\varepsilon^*\}^T [D] \{\varepsilon^*\} dA \right) = \\ &= \frac{1}{2} hA (\{U\}^T [B]^T [D] [B] \{U\} - 2\{U\}^T [B]^T [D] \{\varepsilon^*\} + \{\varepsilon^*\}^T [D] \{\varepsilon^*\}). \end{aligned} \quad (5.98)$$

Минимизируя функционал (5.75) по узловым перемещениям  $\{U\}$ , получим:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \{U\}} = [K]\{U\} - \{F^*\}, \quad (5.99)$$

где

$$[K] = hA [B]^T [D] [B], \quad \{F^*\} = hA [B]^T [D] \{\varepsilon^*\}. \quad (5.84)$$

После минимизации полной энергии  $\mathcal{E} = \Pi - A$  по узловым перемещениям задача сводится к системе линейных алгебраических уравнений:

$$[K]\{U\} = \{F\} + \{F^*\}, \quad (5.100)$$

где  $[K]$  – матрица жесткости,  $\{F\}$  – вектор внешних узловых нагрузок,  $\{F^*\}$  – вклад деформаций ползучести в вектор узловых нагрузок.

$$[K] = \frac{h^3}{12} \int_A [B]^T [D] [B] dA; \quad \{F^*\} = \int_A [B]^T [D] dA \cdot \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \{\varepsilon^*\} z dz. \quad (5.101)$$

Интегралы по площади в выражениях для  $[K]$  и  $\{F^*\}$  вычисляются численно. В матрицу жесткости и вектор нагрузки входят члены со степенью не выше второй, поэтому интегрирование будет точным при использовании всего лишь трех точек (середин сторон элемента) [99].

Формула интегрирования записывается в виде:

$$\int_A f(x, y) dA = \frac{A}{3} \left[ f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right) + f\left(\frac{x_1 + x_3}{2}, \frac{y_1 + y_3}{2}\right) + f\left(\frac{x_2 + x_3}{2}, \frac{y_2 + y_3}{2}\right) \right]. \quad (5.102)$$

Интегралы по толщине пластинки вычисляются методом трапеций. Расчет ведется шаговым методом, на первом шаге решается упругая задача, а далее деформации ползучести в момент времени  $t + \Delta t$  определяются по формуле:

$$\varepsilon_{t+\Delta t}^* = \varepsilon_t^* + \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial t} \Delta t. \quad (5.103)$$

Была решена тестовая задача для квадратной пластинки из ПММА размерами 8x8 см с отверстием радиусом 1 см. Пластика в направлении  $x$  сжимается нагрузкой  $q = 6 \text{ МН/м}^2$ .

Данная задача представляет большой практический интерес, поскольку полиметилметакрилат широко используется в светопрозрачных конструкциях, при монтаже которых необходимы отверстия для крепежа. В силу симметрии рассматривалась четверть пластины.

В качестве уравнения состояния использовалось обобщенное уравнение Максвелла-Гуревича. Упругие и реологические параметры оргстекла марки ТОСП (пластифицированный полиметилметакрилат):  $E = 2940 \text{ МПа}$ ,  $E_\infty = 2500 \text{ МПа}$ ,  $m^* = 4.5 \text{ МПа}$ ,  $\eta_0^* = 10^{10} \text{ МПа} \cdot \text{с}$ .

Отметим, что первым этапом при решении задачи с концентратором, было проведено исследование влияния радиуса отверстия  $R$  на величину мгновенной критической нагрузки. Расчет выполнялся для квадратной пластины, шарнирно опертой по контуру и сжимаемой в одном направлении распределенной нагрузкой  $p$ . Критическая нагрузка определялась методом конечных элементов путем решения обобщенной проблемы собственных значений матрицы.

На рисунке 5.42 приведен график зависимости отношения критической нагрузки  $p_{cr}$  к критической нагрузке  $p_0$  для пластины без отверстия от отношения  $R/a$ .

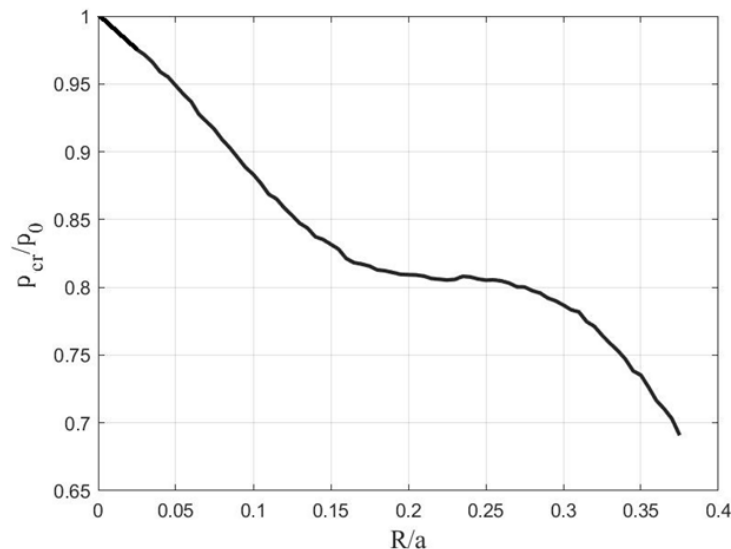


Рисунок 5.42 – Зависимость мгновенной критической нагрузки от радиуса отверстия

Расчет с учетом ползучести выполнялся при тех же исходных данных, как и для пластинки без отверстия. На рис. 5.42 приведены графики роста максимального прогиба при различных радиусах отверстия, построенные при  $f_0 = 0.15 \text{ мм}$  и  $p = 1.1 \text{ кН/м}$ , что соответствует

длительной критической нагрузке для пластинки без отверстия. Во всех случаях рост прогиба носит затухающий характер, но с увеличением радиуса отверстия максимальный прогиб заметно возрастает.

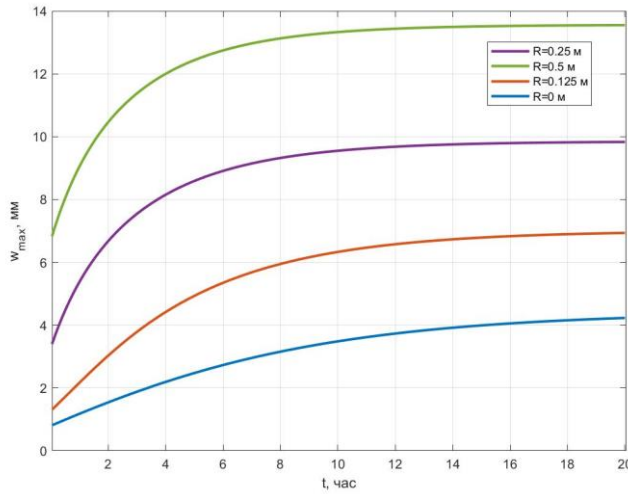


Рисунок 5.42 – Графики роста прогиба при  $f_0 = 0.15$  мм

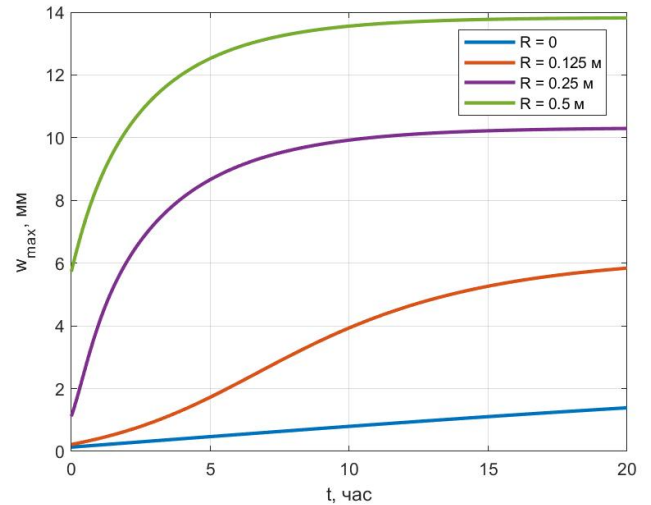


Рисунок 5.43 – Графики роста прогиба при  $f_0 = 0.025$  мм

На рисунке 5.43 показаны те же графики, построенные при  $f_0 = 0.025$  мм. При малой начальной погнби для случая  $R = 0.125$  м имеется участок с возрастающей скоростью роста прогиба. При больших радиусах отверстия перемещения заметно возрастают, но скорость роста прогиба в течение всего процесса ползучести носит затухающий характер.

## 5.8 Выводы по главе 5

Разработана методика расчета круглых осесимметрично нагруженных пластинок с учетом ползучести и геометрической нелинейности, подходящая для произвольных уравнений связи деформаций ползучести и напряжений. Выполнено сравнение результатов, получаемых по геометрически линейной теории и с учетом геометрической нелинейности. Получены основные уравнения для задачи изгиба прямоугольной гибкой пластинки с учетом вязкоупругости.

Исследовано явление потери устойчивости при ползучести круглой полимерной пластинки, нагруженной радиальными сжимающими усилиями. Установлено, что потеря устойчивости полимерной пластинки может произойти при нагрузке значительно меньше, чем мгновенная критическая.

Доказано, что, прогиб шарнирно опертой по контуру пластинки при сжатии в одном направлении нагрузкой меньше мгновенной критической всегда приходит к конечному значению. Иными словами, при таком закреплении и нагружении пластинка в условиях ползучести не теряет устойчивость.

Представленные в настоящей главе уравнения и методика позволяют выполнить расчет пластин из произвольного материала при любых граничных условиях. Закон ползучести также может быть произвольным.

Предложенный подход для повышения точности определения деформаций ползучести на каждом шаге допускает вместо метода Эйлера использовать метод Рунге-Кутты четвертого порядка.

Получены выражения для матрицы жесткости и вектора дополнительных фиктивных нагрузок, обусловленных ползучестью. Разработанная методика авторами реализована в виде программы в среде MATLAB.

При расчете пластин с вырезами можно отметить, что во всех случаях рост прогиба носит затухающий характер, но с увеличением радиуса отверстия максимальный прогиб заметно возрастает.



## 6 ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕОЛОГИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ И МОДЕЛИРОВАНИЕ УТОЙЧИВОСТИ ПОЛИМЕРНЫХ СТЕРЖНЕЙ

Для количественной оценки поведения элемента конструкции во времени в качестве материала для стеклопластиковых стержней была взята матрица этого стержня, в частности, гомогенный жесткий сетчатый полимер ЭДТ-10. Свойства этого материала подробно изучали академик РААСН Андреев В.И. [79], В.Ф. Бабич [84], проф. Турусов Р.А [86], А.В. Куперман [199] и многие другие ученые лаборатории ЛАС ИХФ РАН

Ранее упоминалась, что поведение полимеров удовлетворительно описывается обобщенным уравнением Максвелла-Гуревича. В это уравнение входит четыре независимых константы – одна упругая и три неупругие.

Определение этих констант для полимера ЭДТ-10 на основании экспериментальных данных должно предшествовать числовому расчету. Эти константы, входящие в теоретический расчет, определяются из независимых экспериментов при простейших режимах нагружения.

Кафедрой Сопротивления материалов РГСУ в 2016 году предложена иная методика определения констант. Практическая реализация метода впервые сделана его учениками проф. Языева Б.М в работе (Чепурненко А.С., Дудник А.С.).

### 6.1 Определение реологических параметров полимерных материалов по кривым сдвиговой ползучести и с использованием методов нелинейной оптимизации

Как было упомянуто выше, для многих полимерных материалов хорошо согласуется с экспериментальными данными нелинейное уравнение Максвелла-Гуревича, которое при одноосном растяжении (сжатии) имеет вид:

$$\frac{\partial \varepsilon^*}{\partial t} = \frac{f^*}{\eta^*} \quad (6.1)$$

где  $\varepsilon^*$  — деформация ползучести,  $f^* = \sigma - E_\infty$  — функция напряжений,  $\sigma$  — напряжение,  $E_\infty$  — модуль высокоэластичности,  $\eta^*$  — релаксационная вязкость, которая вычисляется как:

$$\eta^* = \eta_0^* \exp\left(-\frac{|f^*|}{m^*}\right) \quad (6.2)$$

где  $\eta_0^*$  — начальная релаксационная вязкость,  $m^*$  — модуль скорости.

В частности, данное уравнение используется для описания реологических свойств сетчатого полимера ЭДТ-10 и полиметилметакрилата в работах [84], поливинилхлорида в статьях [174], сдвиговой ползучести пенополиуретана при чистом сдвиге в публикациях [176].

Существующие методики позволяют определить реологические характеристики из опытов на центральное растяжение (сжатие) [171], релаксацию напряжений [172] и чистый сдвиг

[180], а некоторые подходы для нахождения вязкоупругих констант требуют проведения серии экспериментов [178].

В настоящем разделе предлагается методика, в которой в качестве исходных данных могут быть использованы результаты испытаний на любой из простейших видов деформации (сдвиг, изгиб).

Многие авторы описывают кривые ползучести и релаксации полимеров используя интегральные уравнения состояния, в частности, Больцмана-Вольтерры:

$$\sigma = \sigma_0 \left[ 1 - \int_0^t T(\tau) d\tau \right], \sigma(t) = \sigma_0 - \int_0^t \sigma_0 \Pi(\tau) d\tau \quad (6.3)$$

где  $\sigma_0$  — напряжение в начальный момент времени;  $\sigma$  — напряжение в текущий момент времени  $t$ ;  $\tau$  — переменная, пробегающая значения от 0 до  $t$ ;  $T(\tau)$  — ядро релаксации.

И вот здесь важно отметить следующий факт. В зависимости от выбора ядра релаксации, зависит описание поведение работы исследуемого материала, правильная аппроксимация кривых, близких к экспериментальным. Например, авторы работ [161,171] используют ядро:

$$\Pi(\tau) = - \frac{S_0}{k_B m^* \int_0^\infty T^*(\tau) d\tau} \left\{ \frac{1}{\ln[\alpha^\alpha \cdot (1-\alpha)^{(1-\alpha)}]} - \frac{1}{\ln 0,5} \right\}, \quad (6.4)$$

где;

$T^*(\tau)$  – переменная часть ядра;

$k_B$  – постоянная Больцмана;

$m^*$  – общее число кинетических единиц;

$\alpha$  – доля релаксаторов в общем числе кинетических единиц является функцией от  $\tau$ ;

$S_0$  – величина начальной энтропии системы.

Отметим, что такая интегральная форма уравнений описывает процессы ползучести и релаксации с высокой степенью точности, однако при решении задач механики полимеров ее использование связано с большими математическими трудностями.

### 6.1.1 Определение реологических параметров при сдвиге

Для получения сведений о закономерностях деформации полимеров необходимо располагать семейством диаграмм растяжения, определяемых в опытах по деформированию образцов с различными значениями постоянной скорости деформации в широком диапазоне температур. Заметим при этом, что в отличие от деформации сдвига, приводящей к изменению формы без изменения объема, при анализе деформационных свойств в условиях растяжения следует учитывать все вышеперечисленные факторы.

В настоящем разделе представлены экспериментальные и аналитические исследования ползучести сэндвич-панелей, состоящих из жесткого пенополиуретанового наполнителя для

применения в гражданском строительстве. Образцы сэндвич-панели были испытаны на сдвиг в течение 1200 часов для трех различных уровней нагрузки, соответствующих 10%, 20% и 30% предела прочности полимера на сдвиг. Экспериментальные результаты кривых ползучести при сдвиге были описаны с использованием степенного закона Финдли, линейного уравнения связи Максвелла –Томсона и нелинейного уравнения Максвелла Гуревича.

Рассмотрим методику определения констант, входящих в нелинейное уравнение Максвелла-Гуревича (6.1) по кривым ползучести при сдвиге. Схема испытательной установки и ее фото показаны на рисунке 6.1.

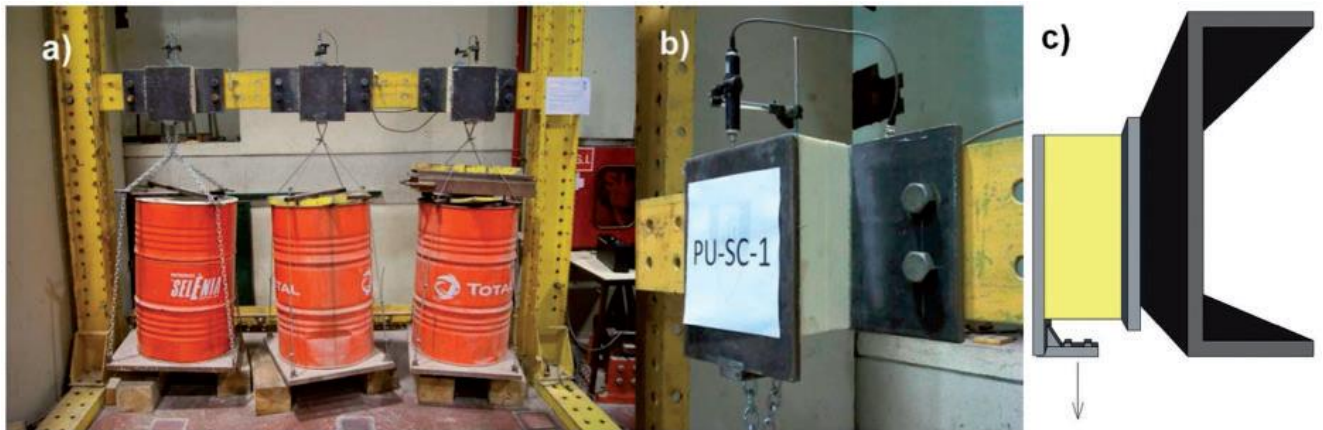


Рисунок 6.1 – Установка для испытаний на сдвиговую ползучесть:

- (a) – общий вид;
- (b) – деталь образца под нагрузкой, приклеенная двумя стальными пластинами;
- (c) – приложение статической нагрузки с использованием специальных приспособлений.

Для этих испытаний была собрана специальная установка, в которой образцы материала нагружались простым сдвигом с использованием собственных грузов. Образцы размерами  $25 \times 25 \times 9$  см<sup>3</sup> (высота, ширина, толщина) были подвешены к балке стальной рамы (рисунок 6.1), причем одна их граней закреплена к балке стальной рамы. Приложенная нагрузка, регулировалась путем изменения уровня воды в бочках.

Таблица 6.1 Параметры при деформации сдвига и уровень нагрузки

№	Параметры при деформации сдвига	Уровень нагрузки		
		$\tau = 0.1\tau_{ult}$ 10%	$\tau = 0.2\tau_{ult}$ 20%	$\tau = 0.3\tau_{ult}$ 30%
1	Нагрузка ( $F$ ) Кн	1,79	3,75	5,7
2	Касательные напряжения ( $\tau$ ) ( $10^{-3}$ МПа)	28,2	57,7	90,4
3	Линейное вертикальное перемещение $\delta_v$ (мм)	0,52	1,06	1,71
4	Упругая деформация сдвига $\gamma_0$ ( $10^{-3}$ $m/m$ )	5,82	11,88	19,02
5	Мгновенный модуль сдвига ( $G$ ) (МПа)	4,84	4,97	4,75

Вертикальное смещение пластины контролировалась с помощью преобразователя перемещений, модель CDP-25 с точностью  $1 \cdot 10^{-2}$  мм. Деформация сдвига вычислялась как  $\delta_v/h$  (отношение вертикального перемещения к толщине образца). В таблице 6.1 приведены параметры сдвига.

В таблице 6.2. представлены усредненные значения сдвиговой деформации ползучести  $\gamma^*$  в различные моменты времени при  $\tau = 28.2 \cdot 10^{-3}$  МПа, что составляет 10% от предела прочности материала  $\tau_{ult}$ . Величина  $\gamma^*$  определялась как разность между полной и упругой деформацией:

$$\gamma^* = \gamma(t) - \frac{\tau}{G} \quad (6.5)$$

Для мгновенного модуля сдвига  $G$  было получено значение 4.84 МПа.

Таблица 6.2 – Величины сдвиговой деформации ползучести в различные моменты времени при  $\tau = 0.1\tau_{ult}$

$t, \text{ч}$	26	40	52	70	98	116	146	192	240	265	288	315
$\gamma^* \cdot 10^{-3}$	1.33	1.44	1.54	1.63	1.75	1.85	1.91	1.97	2.19	2.22	2.27	2.35
$t, \text{ч}$	384	452	505	576	625	673	747	768	840	960	1152	1344
$\gamma^* \cdot 10^{-3}$	2.49	2.56	2.69	2.71	2.73	2.78	2.84	2.85	2.95	2.98	3.09	3.73

Подобные эксперименты проводились учеными из Португалии (Mario Garrido, Fernando A Branco, Thomas Keller). Для описания кривых ползучести они использовали степенной закон Финдли (рисунок 6.2):

$$\gamma(\tau, t) = \gamma_0 + mt^n \quad \text{или через касательные напряжения}$$

$$\gamma(\tau, t) = \frac{\tau}{G(t)} = \left( \frac{1}{G_e} + \frac{1}{G_t} t^n \right), \quad (6.6)$$

где  $G_e$  и  $G_t$  – соответственно упругий и вязкоупругий модуль сдвига материала.

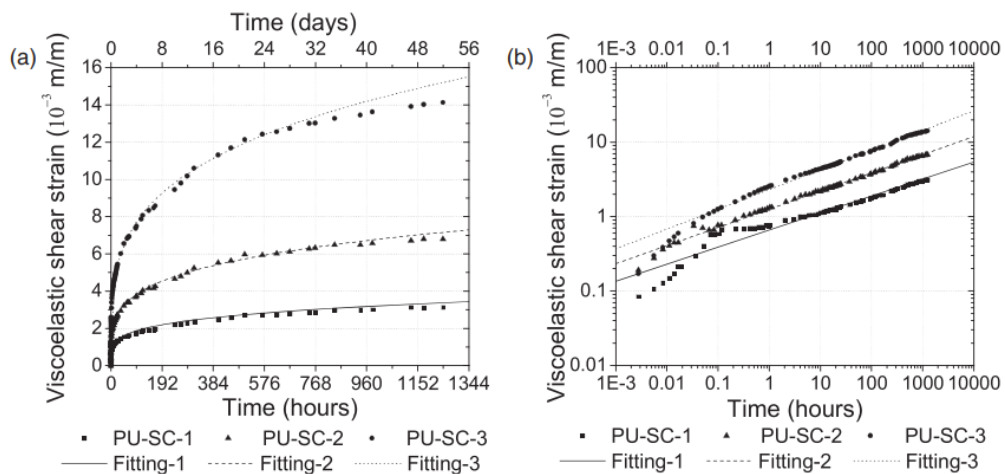


Рисунок 6.2 Аппроксимация экспериментальной кривой роста сдвиговой деформации ползучести законом Финдли по Mario Garrido, Fernando A Branco, Thomas Keller

Из (6.6) соотношения для модуля сдвига можно записать:

$$G(t) = \frac{\tau}{\gamma(\tau, t)} = \frac{G_e G_t}{G_t + G_e t^n}. \quad (6.7)$$

В работе профессором Mario Garrido [241] представлена эмпирическая зависимость модуля сдвига:

$$G(t) = \frac{210.57}{43.35 + 4.86t^{0.25}}. \quad (6.8)$$

Однако заметим, существенным недостатком закона Финдли это то, что время включено в него в явном виде, вследствие чего его можно использовать только при простом нагружении, когда нагрузка во времени постоянна.

Воспользуемся нелинейным уравнением связи Максвелла-Гуревича которое лишено указанных недостатков. Скорость роста сдвиговой деформации ползучести имеет вид:

$$\frac{\partial \varepsilon_{xz}^*}{\partial t} = \left( \frac{3}{2} \tau_{xz} - E_{\infty} \varepsilon_{xz}^* \right) \frac{1}{\eta^*}. \quad (6.9)$$

здесь

$$\varepsilon_{xz}^* = \frac{1}{2} \gamma_{xz}^*; \quad \frac{1}{\eta^*} = \frac{1}{\eta_0^*} \exp \left( \frac{\overbrace{\left( \frac{3}{2} \tau_{xz} - E_{\infty} \varepsilon_{xz}^* \right)}^{f^*}}{m^*} \right).$$

Величины  $\gamma_{xz}^*$  можно определить по формуле (6.5). Рассмотрим конец процесса ползучести, когда при  $t \rightarrow \infty$  скорость роста угловой высокоэластической деформации равна нулю:

$$\left. \frac{\partial \varepsilon_{xz}^*}{\partial t} \right|_{t \rightarrow \infty} = 0 \rightarrow \frac{f^*}{\eta^*} = 0 \rightarrow f^* = \left( \frac{3}{2} \tau_{xz} - E_{\infty} \varepsilon_{xz}^* \right) = 0. \quad (6.10)$$

Из (6.10) можно определить модуль высокоэластичности:

$$E_{\infty} = \frac{3\tau_{xz}}{\gamma_{xz}^*|_{t \rightarrow \infty}}. \quad (6.11)$$

Зная значение величины  $E_{\infty}$ , можно найти функцию напряжений  $f^*$  и релаксационную вязкость  $\eta^*$  в каждый момент времени:

$$\eta^* = \frac{\left( \frac{3}{2} \tau_{xz} - E_{\infty} \varepsilon_{xz}^* \right)}{\frac{\partial \varepsilon_{xz}^*}{\partial t}} \quad (6.12)$$

Соотношение (6.12) прологарифмируем, получим:

$$\ln(\eta^*) = \ln \left[ \eta_0^* \exp \left( - \frac{|f^*|}{m^*} \right) \right] = \ln(\eta_0^*) - \frac{|f^*|}{m^*}. \quad (6.13)$$

Введём обозначения:  $y = \ln(\eta^*)$  и  $x = |f^*|$ , то можно заметить, что между этими величинами определена линейная зависимость:

$$y = ax + b, \quad (6.14)$$

где  $a = -1/m^*$ ,  $b = \ln \eta_0^*$ .

Для вычисления значений  $\eta^*$  в каждой точке временного интервала необходимо знать величины, или если быть точнее - необходимо численно продифференцировать по времени:

$$v_\varepsilon = \frac{\partial \varepsilon_{xz}^*}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \gamma_{xz}^* \right)$$

Сложность задачи обусловлена тем, что измерения, как правило, выполняются через неравные промежутки времени. И для дифференцирования через каждую точку и две смежные с ней проводится квадратная парабола:

$$\gamma^*(t) = k_1 + k_2 t + k_3 t^2. \quad (6.15)$$

Продифференцировав выражение (6.15) получим:

$$\frac{\partial \gamma^*}{\partial t} = k_2 + 2k_3 t. \quad (6.16)$$

С помощью встроенной функции *polyfit* пакета MatLab определяются коэффициенты  $k_1, k_2, k_3$ . Зная  $\frac{\partial \gamma^*}{\partial t}$  – определяем  $\eta^* = f^*/v_\varepsilon$

Коэффициенты  $a$  и  $b$ , соответствующие величинам  $m^*$  и  $\eta_0^*$ , определяются путем аппроксимации кривой  $y(x)$  прямой линией при помощи метода наименьших квадратов. Выкопировка программы для обработки кривых ползучести в пакете MatLab приводится ниже: На рисунке 6.3 представлены результаты обработки данных, приведенных в таблице 6.2.

Здесь зеленой линией показана аппроксимация на основе линейного уравнения Максвелла-Томпсона, имеющего в случае чистого сдвига вид:

$$\frac{\partial \gamma^*}{\partial t} = \frac{1}{nG} \left[ \tau \left( 1 - \frac{H}{G} \right) - H \gamma^* \right], \quad (6.17)$$

где  $n$  – время релаксации,  $G$  и  $H$  – соответственно мгновенный и длительный модуль сдвига.

Если ввести обозначения:

$$\eta^* = \frac{3nG}{\left(1 - \frac{H}{G}\right)} \text{ и } E_\infty = \frac{3H}{\left(1 - \frac{H}{G}\right)}$$

то соотношение Максвелла-Томсона (6.17) можно представить в виде (6.9) где в отличие от нелинейного уравнения состояния Максвелла-Гуревича в линейном уравнении релаксационная вязкость  $\eta^*$  является величиной постоянной.

Из рисунка 6.2а видно, что нелинейное уравнение состояния Максвелла-Гуревича лучше всего согласуется с экспериментальными данными в отличие от уравнения, представленного в виде степенного закона Финдли и линейного уравнения Максвелла, которые дают весьма посредственные результаты.

## Обработка кривых ползучести полимеров, полученных экспериментально

```

clc;
clear variables;
t=[0 26 40 52 70 98 116 146 170 240 265 288 315 405 452 505 570 625 673 747
770 840 940 1130]; %Точки временного интервала, в которых выполнялись
измерения
ez=[0 1.33 1.44 1.54 1.63 1.75 1.85 1.91 1.97 2.19 2.22 2.27 2.35 2.49 2.56
2.69 2.71 2.73 2.78 2.84 2.85 2.95 2.98 3.09]/2*10^(-3); %Вектор деформаций
ползучести
tau=28.2*10^(-3); %напряжение, МПа
Eb=1.5*tau/ez(length(ez)); %Модуль высокоэластичности
ez=zeros(1,length(ez)); %Вектор скоростей роста деформации ползучести
%Численное дифференцирование
for i=1:length(ez)-1
    if i==1
        k=polyfit(t(1:3),ez(1:3),2);
    elseif i==length(ez)
        k=polyfit(t(i-2:i),ez(i-2:i),2);
    else
        k=polyfit(t(i-1:i+1),ez(i-1:i+1),2);
    end
    ez_(i)=2*k(1)*t(i)+k(2);
end
fz=1.5*tau-Eb*ez; %Функция напряжений
nz=zeros(1,length(ez)-1); %Релаксационная вязкость
for i=1:length(ez)-1
    nz(i)=fz(i)/ez_(i);
end
a=polyfit(fz(1:length(ez)-1),log(nz(1:length(nz))),1); %Аппроксимация по
методу наименьших квадратов для определения модуля скорости и начальной
релаксационной вязкости
mz=-1/a(1)
n0=exp(a(2))
plot(fz(1:length(ez)-1),log(nz));
hold on
plot(fz(1:length(ez)-1), a(1)*fz(1:length(ez)-1)+a(2));
%Построение аппроксимированной кривой ползучести
t1=0; %начальный момент времени, час
t2=1130; %Конечный момент времени, час
nt=300; %Количество интервалов по времени
dt=(t2-t1)/nt; %Шаг по времени
eps_z=zeros(1,nt+1); %Аппроксимация на основе ур-я Максвелла-Гуревича
eps_z1=zeros(1,nt+1); %Аппроксимация на основе закона Финдли
time=zeros(1,nt+1);
G0=4.84; %Мгновенный модуль сдвига
for i=1:nt+1
    time(i)=t1+(i-1)*dt;
    fz=1.5*tau-Eb*eps_z(i); %Функция напряжений
    nz=n0*exp(-abs(fz)/mz); %Релаксационная вязкость
    if i~=nt+1
        eps_z(i+1)=eps_z(i)+fz/nz*dt;
    end
    Gt=210.57/(43.55+4.86*time(i)^0.25);
    eps_z1(i)=tau*(1/Gt-1/G0);
end
figure;
%Вывод графиков
plot(time, eps_z*2);
hold on
plot(t, ez*2);
plot(time, eps_z1);

```

В результате обработки данных, приведенных в таблице 6.1, получены следующие значения релаксационных констант:  $E_\infty = 27.38$  МПа,  $\eta_0^* = 1.43 \cdot 10^4$  МПа · ч,  $m^* = 0.0218$  МПа.

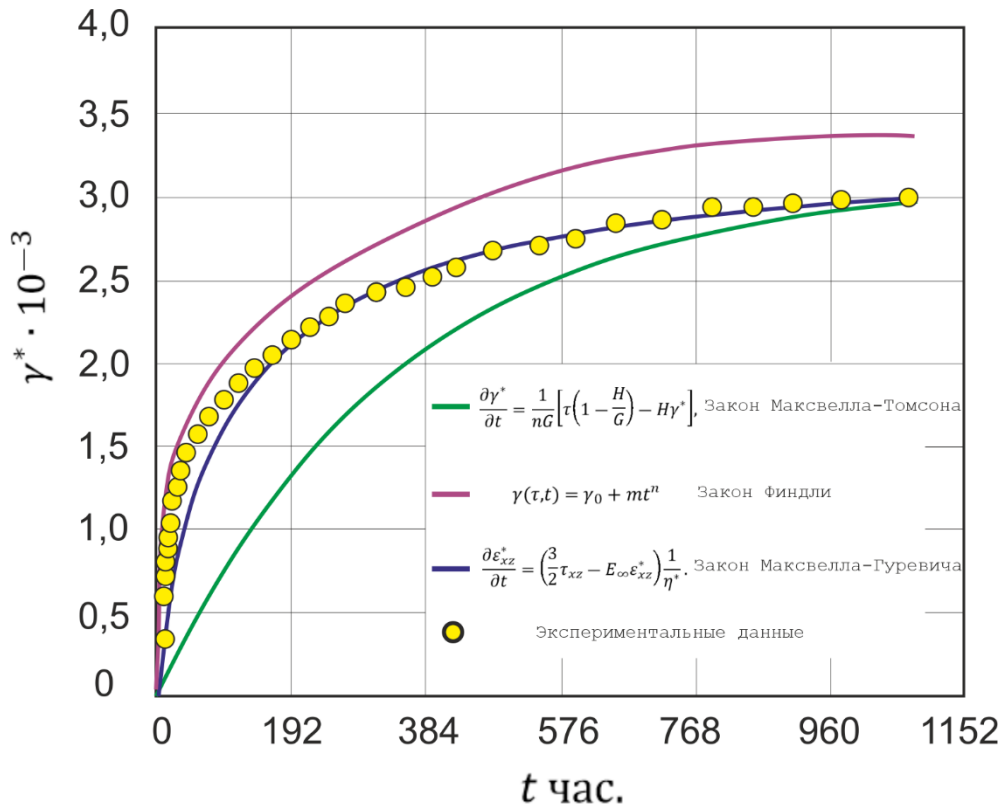


Рисунок 6.2а – Аппроксимация экспериментальной кривой роста сдвиговой деформации ползучести различными уравнения состояния

### 6.1.2 Определение реологических параметров при изгибе

Рассмотрим методику обработки экспериментальных данных для случая испытаний на чистый изгиб. Предварительно получим уравнения для построения теоретических кривых ползучести. Изгибающий момент при изгибе определяется интегральным соотношением:

$$M = \int_A \sigma y dA, \quad (6.18)$$

где  $A$  — площадь поперечного сечения,  $\sigma$  — напряжение, координата  $y$  определяется относительно центра тяжести поперечного сечения.

На основе гипотезы плоских сечений деформации поперечного сечения определяются как:

$$\varepsilon_x = \frac{y}{\rho} \quad (6.19)$$

где  $\rho$  — радиус кривизны изогнутого стержня.



Как и ранее, с физической стороны, полная деформация представляет сумму упругой деформации и деформации ползучести:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_{el,x} + \varepsilon_{s,x}^* = \frac{\sigma}{E} + \varepsilon_{s,x}^* \quad (6.20)$$

Выразим в (6.20) напряжение через деформации:

$$\sigma = E(\varepsilon_x - \varepsilon_{s,x}^*) = E\left(\frac{y}{\rho} - \varepsilon_{s,x}^*\right) \quad (6.21)$$

Подставив (6.21) в (6.18), получим:

$$M = \frac{EI}{\rho} - E \int_A \varepsilon_{s,x}^* y dA = \frac{EI}{\rho} - M^*, \quad (6.22)$$

где

$$I = \int_A y^2 dA, \quad M^* = E \int_A \varepsilon_{s,x}^* y dA$$

Для прямоугольного сечения величину  $M^*$  можно определить по формуле:

$$M^* = bE \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \varepsilon_{s,x}^* y dA, \quad (6.23)$$

Из (6.22) кривизна элемента определяется по формуле:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M + M^*}{EI}, \quad (6.24)$$

Определение реологических параметров материала из испытаний на изгиб удобно проводить по схеме чистого изгиба (рисунок 6.3). В этом случае прогиб в середине пролета связан с кривизной элемента в зоне чистого изгиба как:

$$v = \frac{l^2}{8\rho} \quad (6.25)$$

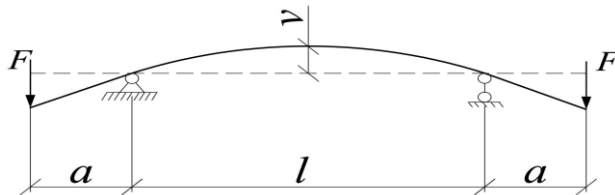


Рисунок 6.3 – Испытания по схеме чистого изгиба

Из трех реологических параметров, входящих в нелинейное уравнение Максвелла-Гуревича: начальной релаксационной вязкости  $\eta_0^*$ , модуля скорости  $m^*$  и модуля высокоэластичности  $E_\infty$ , наиболее просто определяется величина  $E_\infty$ .

В [82] показывается, что для получения решения в конце процесса ползучести достаточно в упругом решении заменить мгновенный модуль упругости  $E$  на длительный  $H$ , вычисляемый по формуле:

$$H = \frac{EE_{\infty}}{E + E_{\infty}}, \quad (6.26)$$

Таким образом, зная прогиб в конце процесса ползучести, можно найти длительный модуль  $H$ , а затем по известным величинам  $E$  и  $H$  вычислить  $E_{\infty}$ .

Задача определения параметров  $\eta_0^*$  и  $m^*$  нами ставится как задача нелинейной оптимизации.

Расчет выполняется в среде MatLab с использованием пакета Optimisation Toolbox.

Входными параметрами целевой функции выступают величины  $\eta_0^*$ ,  $m^*$ ,  $E$ ,  $E_{\infty}$ ,  $F$ ,  $l$ ,  $a$ ,  $h$ ,  $b$ ,  $t$ ,  $v$  размеры поперечного сечения испытываемого образца, а также 2 вектора, в которых содержатся моменты времени, в которые замерялся прогиб, и соответствующие значения перемещений.

Для заданных моментов времени целевая функция, используя входные параметры, строит теоретическую кривую ползучести  $v(t)$  и затем возвращает сумму квадратов отклонений теоретических значений от экспериментальных  $S$ :

$$S = \sum_{i=1}^n (v_i^{\text{теор}} - v_i^{\text{эксп}})^2, \quad (6.27)$$

Отыскиваются такие величины  $\eta_0^*$ ,  $m^*$ , при которых целевая функция, т.е. сумма квадратов отклонений, принимает минимальное значение. Иными словами, используется метод наименьших квадратов, но аналитическое выражение для теоретической кривой ползучести в явном виде отсутствует.

Построение теоретической кривой выполняется численно при помощи метода Рунге-Кутты четвертого порядка. Поперечное сечение по высоте разбивается на отрезки  $\Delta y$ .

По итерационной формуле в момент времени  $t + \Delta t$  вычисляется приближенное значение скорости деформации ползучести, и оно имеет вид:

$$\varepsilon_{t+\Delta t}^* = \varepsilon_t^* + \frac{\Delta t}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4). \quad (6.28)$$

Для последующего момента времени значения высокоэластических деформаций  $\varepsilon_{t+\Delta t}^*$  вычисляют в четыре этапа:

$$k_1 = f(t, \varepsilon_t^*); k_2 = f\left(t + \frac{\Delta t}{2}, \varepsilon_t^* + \frac{\Delta t}{2} k_1\right); k_3 = f\left(t + \frac{\Delta t}{2}, \varepsilon_t^* + \frac{\Delta t}{2} k_2\right); k_4 = f(t + \Delta t, \varepsilon_t^* + \Delta t k_3).$$

где

$$f(\varepsilon_t^*) = \frac{[|\sigma - E_{\infty}\varepsilon_t^*|] \exp\left(\frac{|\sigma - E_{\infty}\varepsilon_t^*|}{m^*}\right)}{\eta_0^*} = \left[\frac{Ey}{\rho} - (E + E_{\infty})\varepsilon_t^*\right] \exp\left(\frac{\left|\frac{Ey}{\rho} - (E + E_{\infty})\varepsilon_t^*\right|}{m^*}\right) \eta_0^*$$

На каждом этапе по времени выполняется перерасчет величины  $\frac{1}{\rho}$  по формуле (6.24).

Интегрирование в формуле (6.23) выполняется численно по формуле трапеций. При небольшом количестве экспериментальных точек для построения теоретической кривой вводятся дополнительные промежуточные точки.

Для апробации разработанной методики на первом этапе была построена теоретическая кривая ползучести при заданных значениях  $\eta_0^*$  и  $m^*$ , и затем была решена обратная задача нахождения релаксационных констант по построенной кривой.

Вычисления выполнялись при  $b = 0,5$  см,  $h = 2$  см,  $F = 0,04$  кН,  $a = 10$  см,  $l = 50$  см,  $E = 3035$  МПа,  $E_\infty = 2310$  МПа,  $m^* = 4,44$  МПа,  $\eta_0^* = 2083$  МПа · сут.

Требуемое количество итераций для нахождения решения зависело от начального приближения. Так, при начальных значениях  $m^* = 8$  МПа,  $\eta_0^* = 10000$  МПа · сут потребовалось 37 итераций, и в результате были получены величины:  $m^* = 4,439$  МПа,  $\eta_0^* = 2083,594$  МПа · сут.

При сильном отклонении начального приближения от точных значений решение найти не удавалось.

На рисунке 6.4 показан график изменения целевой функции  $S$  в зависимости от параметров  $m^*$  и  $\eta_0^*$ . На рисунке 6.5 для наглядности также приведены изолинии одинаковых значений целевой функции. На графике изолиний точка  $m^* = 4,44$  МПа,  $\eta_0^* = 2083$  МПа · сут отмечена красным крестиком.

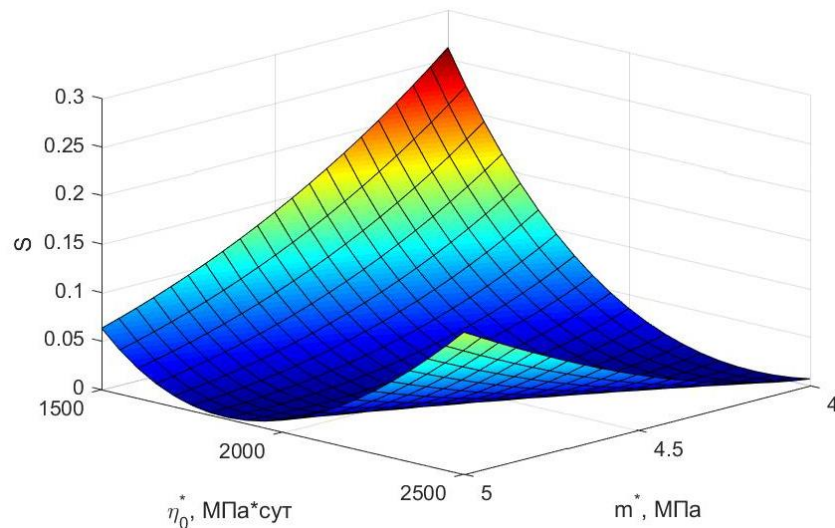


Рисунок 6.4. Изменение целевой функции в зависимости от параметров  $m^*$  и  $\eta_0^*$ .

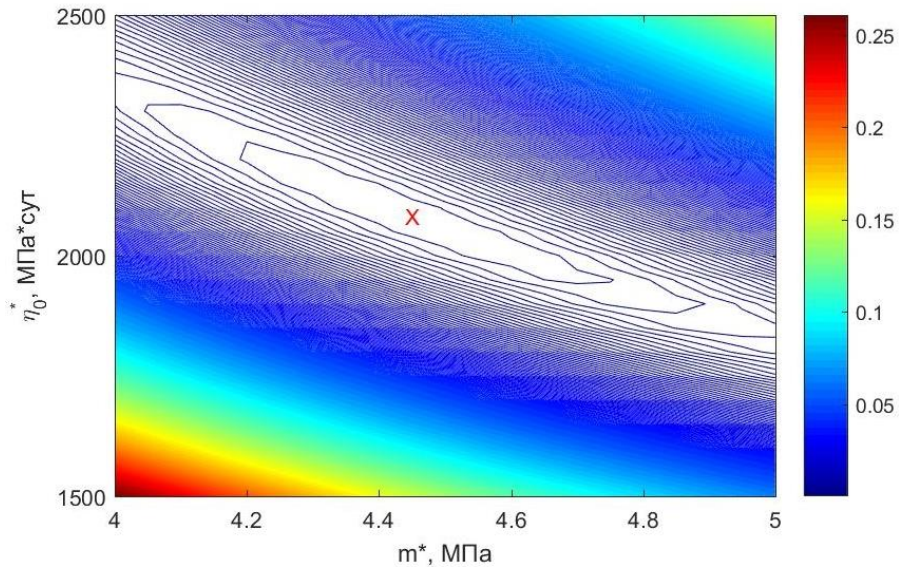


Рисунок 6.5. Изолинии равных значений целевой функции

Поскольку реологические константы из испытаний материалов на изгиб ранее не определялись, нами также была выполнена апробация методики на кривых релаксации напряжений для вторичного ПВХ, обработка которых другим методом выполнялась в работах [171].

На рисунке 6.6 приведены экспериментальные кривые релаксации напряжений при различных температурах (отмечены маркерами), их аппроксимация по методике, предложенной А.С. Чепурненко (штриховые линии) и автором (сплошные линии). Из рисунка 6.6 видно, что предлагаемая нами методика при том же законе ползучести обеспечивает более высокое качество аппроксимации.

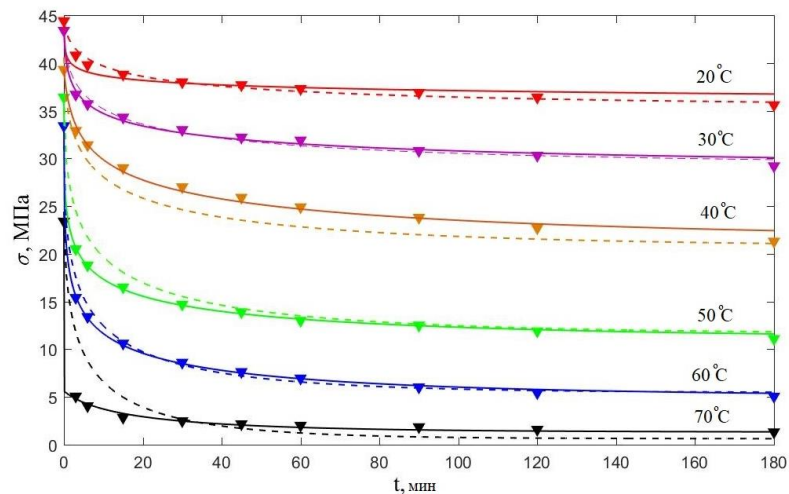


Рисунок 6.6. Экспериментальные кривые релаксации напряжений вторичного ПВХ и их аппроксимация по методике А.С. Чепурненко (штриховые линии) и по методике, предложенной автором (сплошные линии)

Помимо кривых релаксации напряжений для вторичного ПВХ нами была выполнена обработка кривых ползучести пенополиуретана при чистом сдвиге, рассмотренных ранее в работах [181].

На рисунке 6.7 приведена одна из экспериментальной кривой ползучести (отмечена треугольными маркерами), а также ее аппроксимация по методике, предложенной А.С. Чепурненко (штриховая линия) и по разработанной нами методике (сплошная линия).

В первом случае достоверность аппроксимации  $R^2$  составила 0,9209, а во втором  $R^2$  – 0,9736. Таким образом, предлагаемая нами методика позволяет повысить качество аппроксимации.

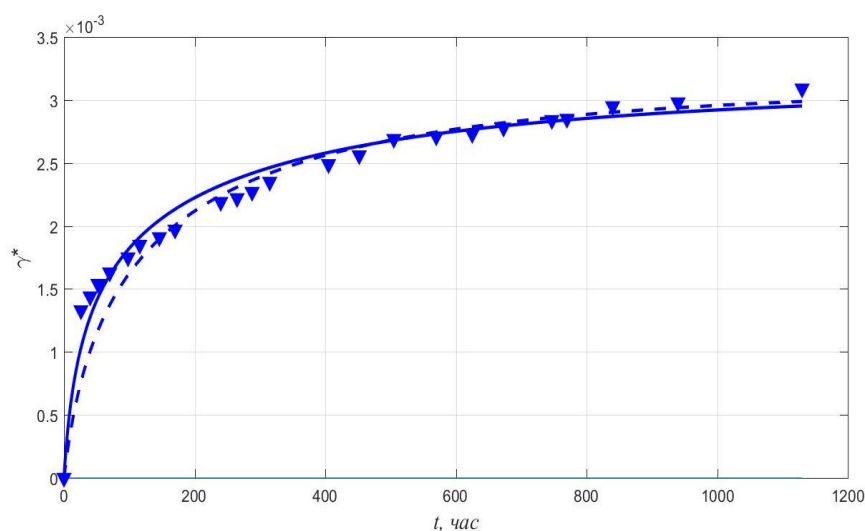


Рисунок 6.7 Экспериментальная кривая ползучести пенополиуретана при сдвиге и ее аппроксимация

Для апробации разработанной методики производились испытания на ползучесть при изгибе образцов листового поликарбоната. Эксперимент производился по схеме чистого изгиба (рисунок 6.8).

Размер консоли  $a = 25$  см, длина пролета  $l = 50$  см, поперечное сечение образцов  $4.5 \times 1.2$  см.

Величины сосредоточенных сил  $F$  на концах консолей принимались равными 10.5 Н в первом испытании и 21 Н во втором.

В таблице 6.2 представлены вычисленные в результате обработки экспериментальных кривых средние значения модуля упругости, модуля высокоэластичности, начальной релаксационной вязкости и модуля скорости.

Значения, полученные в двух экспериментах, достаточно близки между собой. Также стоит обратить внимание, что по сравнению с полиметилметакрилатом поликарбонат при практически одинаковом модуле упругости обладает гораздо менее выраженной ползучестью.



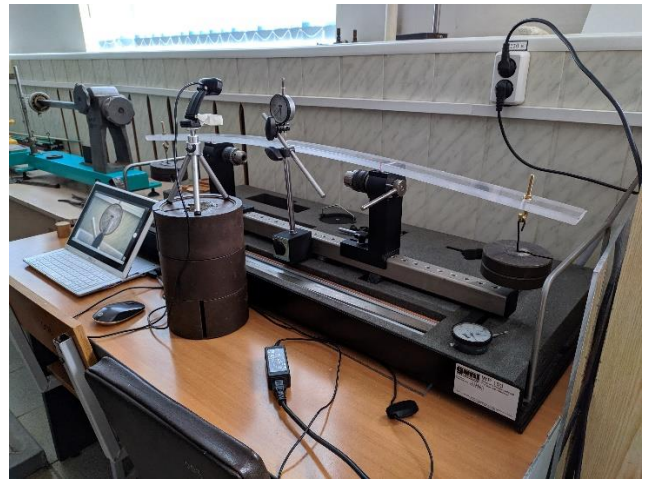
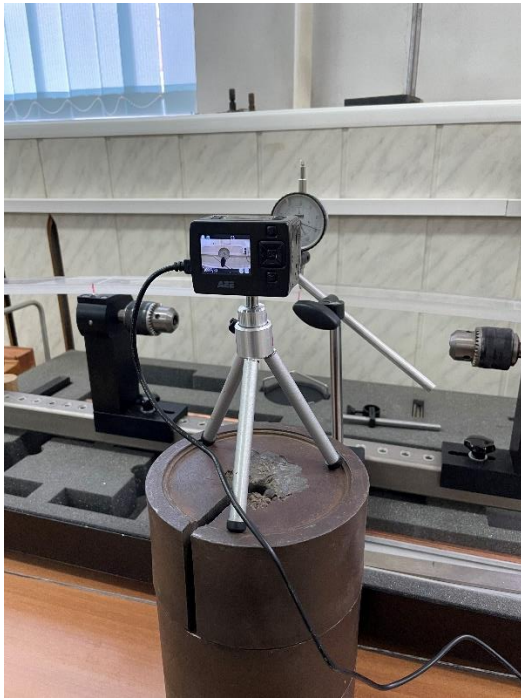


Рисунок 6.8 – Схема экспериментальной установки

Модуль высокоэластичности поликарбоната выше, чем у ПММА, примерно в 7 раз.

Таблица 6.2 – Результаты эксперимента при различных значениях силы.

Эксперимент	$E$ , МПа	$E_{\infty}$ , МПа	$m^*$ , МПа	$\eta_0^*$ , МПа · ч
№1, $F=10.5$ Н	3679	$1.85 \cdot 10^4$	0.259	$1.23 \cdot 10^5$
№2, $F=21$ Н	3586	$1.76 \cdot 10^4$	0.247	$1.15 \cdot 10^5$

Перемещения в середине пролета фиксировались при помощи индикатора часового типа с точностью 0.01 мм каждые 30 с. Далее отбирались наиболее характерные точки. Экспериментальные кривые ползучести и их аппроксимация представлены на рисунок 6.9-6.10.

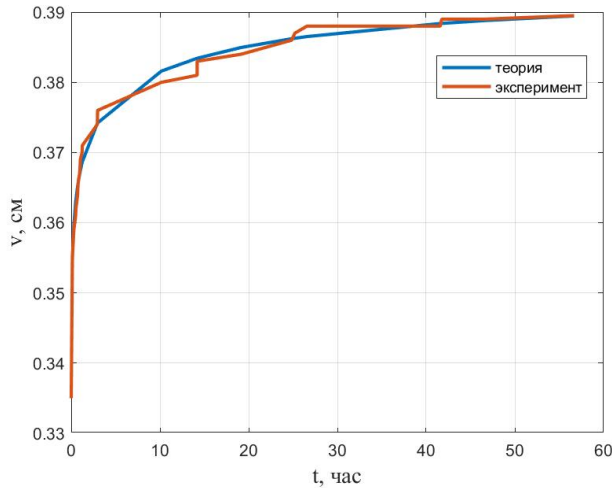


Рисунок 6.9 — Экспериментальная и теоретическая кривая роста прогиба при  $F = 10.5$  Н

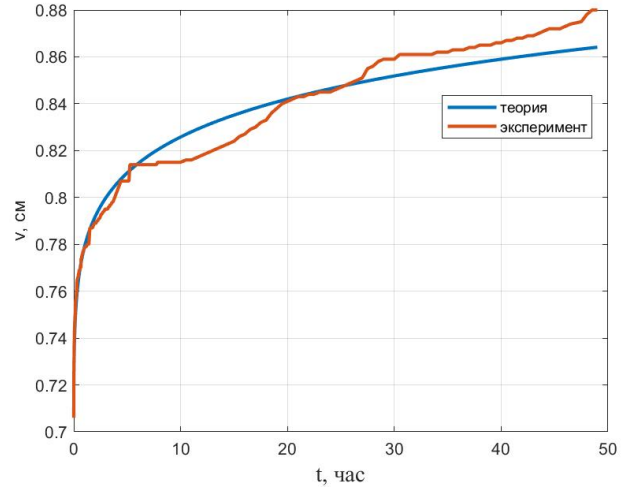


Рисунок 6.10 — Экспериментальная и теоретическая кривая роста прогиба при  $F = 21$  Н

Из данных графиков видно, что уравнение Максвелла-Гуревича хорошо описывает ползучесть поликарбоната.

## 6.2 Определение упругих механических характеристик

### 6.2.1 Определение динамического модуля упругости методом импульсного воздействия вибрации

В данном разделе предложена методика определения модуля упругости, отличающаяся от стандартного определения. Обычно модуль Юнга определяется из условия растяжения лопаток из полимера или изгиба балок.

Сущность данного метода основан на измерении резонансной частоты колебаний образцов [242]. Принцип определения динамического модуля упругости резонансным методом состоит в возбуждении продольных колебаний образца определённой длины на частоте собственных колебаний (на резонансной частоте). Резонансная частота определяется при максимальной амплитуде колебаний образца.

Образец устанавливают между двумя пьезоэлементами (датчиком и приемником) и плавно повышают частоту генератора акустических волн до тех пор, пока не будет достигнута резонансная частота, соответствующая собственным колебаниям образца [243, 245]. Сигнал от

приемника наблюдают на осциллографе и по максимуму этого сигнала определяют резонансную частоту.

Для измерения резонансной частоты  $f$  образец подвергается вынужденным колебаниям, изменяя частоту которых находят резонанс – резкое увеличение амплитуды колебаний образца при приближении частоты вынужденных колебаний к частоте собственных колебаний.

Измеренная таким образом частота  $f$  подставляется в формулу:

$$E = \frac{33}{140} \frac{64}{3} \frac{Gl^2}{gd^4} f^2; \quad G = \rho \frac{\pi d^2}{4} l, \quad (6.29)$$

где  $G$  – вес образца;  $l$  – длина;  $d$  – диаметр;  $g$  – ускорение свободного падения;  $f$  – частота собственных колебаний;  $\rho$  – удельный вес материала.

Для решения указанных выше задач предлагается использовать импульсный механический удар, который воздействует на образец. В образце возникают затухающие механические колебания на нескольких частотах, в том числе на резонансных. Механические колебания образца возбуждают акустические волны звуковых частот, которые через микрофон регистрируются в памяти компьютера.

Структурная схема устройства, реализующего предлагаемый алгоритм определения модуля нормальной упругости, представлена на рисунке 6.11.

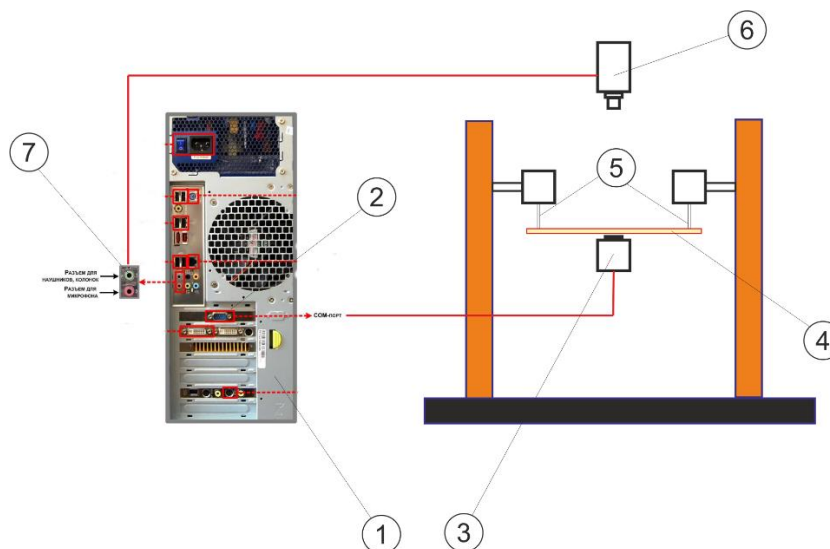


Рисунок 6.11 Структурная схема устройства. 1 – компьютер, 2 – COM-port, 3 – датчик, 4 – образец, 5 – нити, 6 – микрофон, 7 – микрофонный вход компьютера

Полученные в памяти данные подвергаются математической обработке с помощью компьютерной программы.

Блок-схема компьютерной программы представлена на рисунке 6.12.



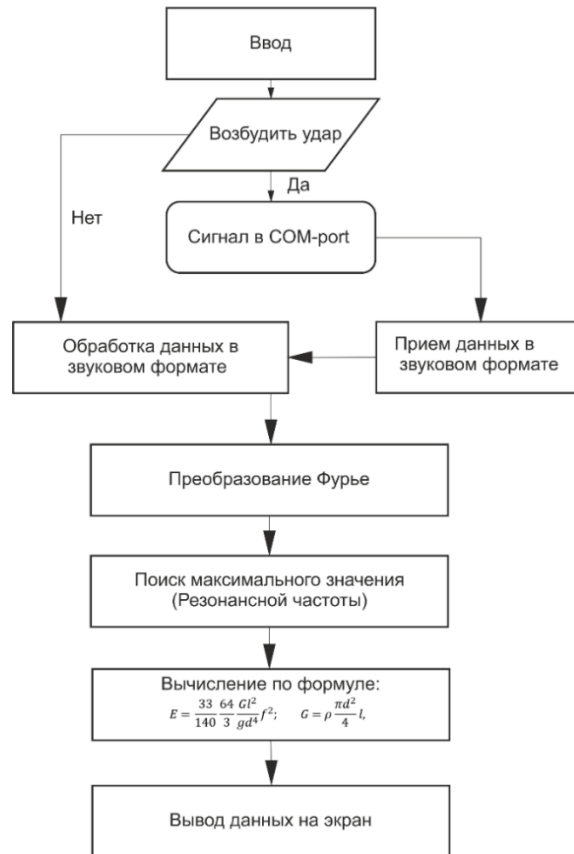


Рисунок 6.12 Блок-схема компьютерной программы

На рисунках 6.13 и 6.14 представлены сигналы затухающих свободных колебаний и их преобразование Фурье.

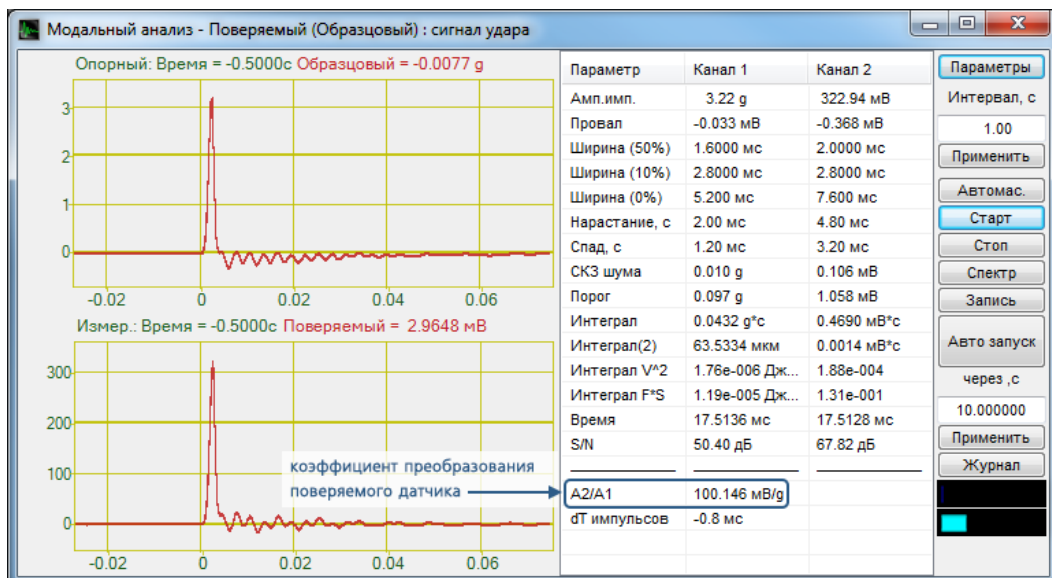


Рисунок 6.13 График амплитудной характеристики образца

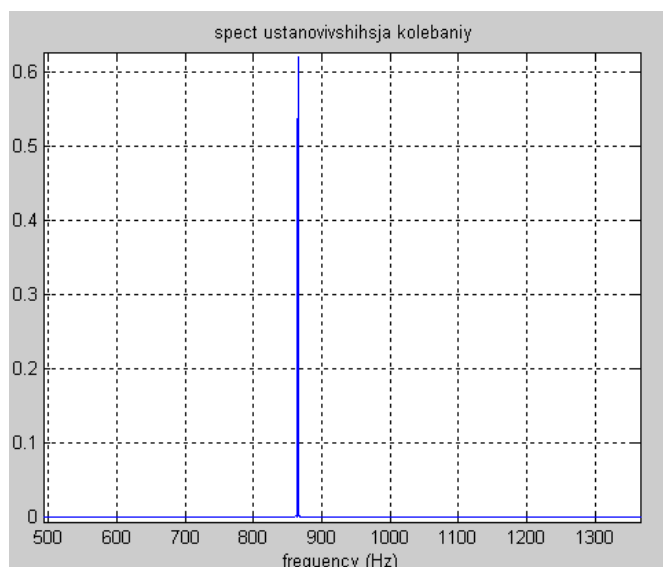


Рисунок 6.14 Резонансная частота затухающих в образце колебаний, полученная с помощью преобразования Фурье

Затухающие колебания являются суммой гармонических сигналов различных частот, в том числе резонансной. С помощью преобразования Фурье определяются значения частот и амплитуд отдельных составляющих суммарного сигнала. При выделении в сигнале участка установившихся колебаний (рисунок 6.14), т. е. колебаний с практически постоянной амплитудой, в результате математической обработки такого сигнала получается спектр с сильно выделяющимся пиком на одной из частот, которая является резонансной. По данным сигнала, полученного после преобразования Фурье, находят максимальное значение и соответствующую ему частоту (рисунок 6.14). Однако сильно выделяющийся по амплитуде пик в спектральном сигнале может появляться и при наличии кратковременных низкочастотных помех, например, таких как показано на рисунке 6.13.

В качестве материала был взят гомогенный жесткий сетчатый полимер ЭДТ-10.

Таблица 6.6. Экспериментальные данные для расчета модуля Юнга

Номер образца	1	2	3	4
$d$ , мм	4,98	5,0	4,96	4,97
$l$ , мм	40,7	41,5	40,8	40,7
$f_{cp}$ 1/с	665,4	677	675	660
$E \frac{\text{кГ}}{\text{мм}^2}$	294	306	302	278

В результате получено среднее значение модуля Юнга  $E_{cp} = 295 \frac{\text{кГ}}{\text{мм}^2}$ .

Методика и значения неупругих константы полимера, входящее в дальнейший теоретическим расчет, было приведено в начале главы.

Для полимера ЭДТ-10 были получены неупругие константы путем обработки экспериментальных кривых, приведенных в работе [84]. Кроме того, проводили контрольные опыты, показавшие возможность использования экспериментальных данных, изложенных в работе [84] для определения констант полимера, служившего исходным материалом для экспериментальных образцов.

На рисунке 6.15 приведена типичная диаграмма ползучести для смолы ЭДТ-10.

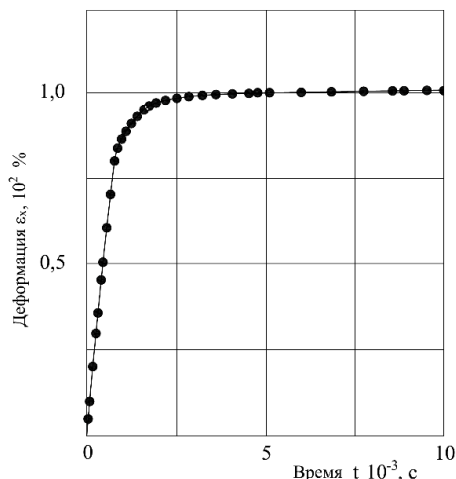


Рисунок 6.15 – Диаграмма ползучести полимерного связующего ЭДТ-10

По кривым ползучести при изгибе методом линейной оптимизации были определены неупругие константы:  $E_{\infty}$  – модуль высокоэластичности;  $m^*$  – модуль скорости и  $\eta_0^*$  – так называемый коэффициент начальной релаксационной вязкости. После обработки упомянутых диаграмм ползучести было получено значение модуля высокоэластичности  $E_{\infty} = 35 \text{ кг/мм}^2$ , величина модуля скорости  $m^* = 0,35 \text{ кг/мм}^2$ .

Что касается коэффициента начальной вязкости  $\eta_0^*$ , то его определение с большой степенью точности весьма затруднительно.

По результатам работы [27]  $\eta_0^*$  определяется по диаграммам ползучести, а также по данным диаграмм растяжения с постоянной скоростью, колеблется в пределах от  $10^{10}$  до  $10^{11} \frac{\text{кгс}}{\text{мм}^2}$ . Такой разброс в определении  $\eta_0^*$  вызван нестабильностью структуры полимера, оказывавшей существенное влияние на эту константу [85];

## 6.2.2 Экспериментальное определение Модуля Юнга из условия изгиба

В данном разделе используется метод определения модуля Юнга, который заключается в измерении прогиба стержней (балок) под действием различных по величине нагрузок  $F$ , приложенных в центре стержней (балок), лежащих на опорах А и В, которые расположены на фиксированном расстоянии  $L$  друг от друга (рисунок 6.16).

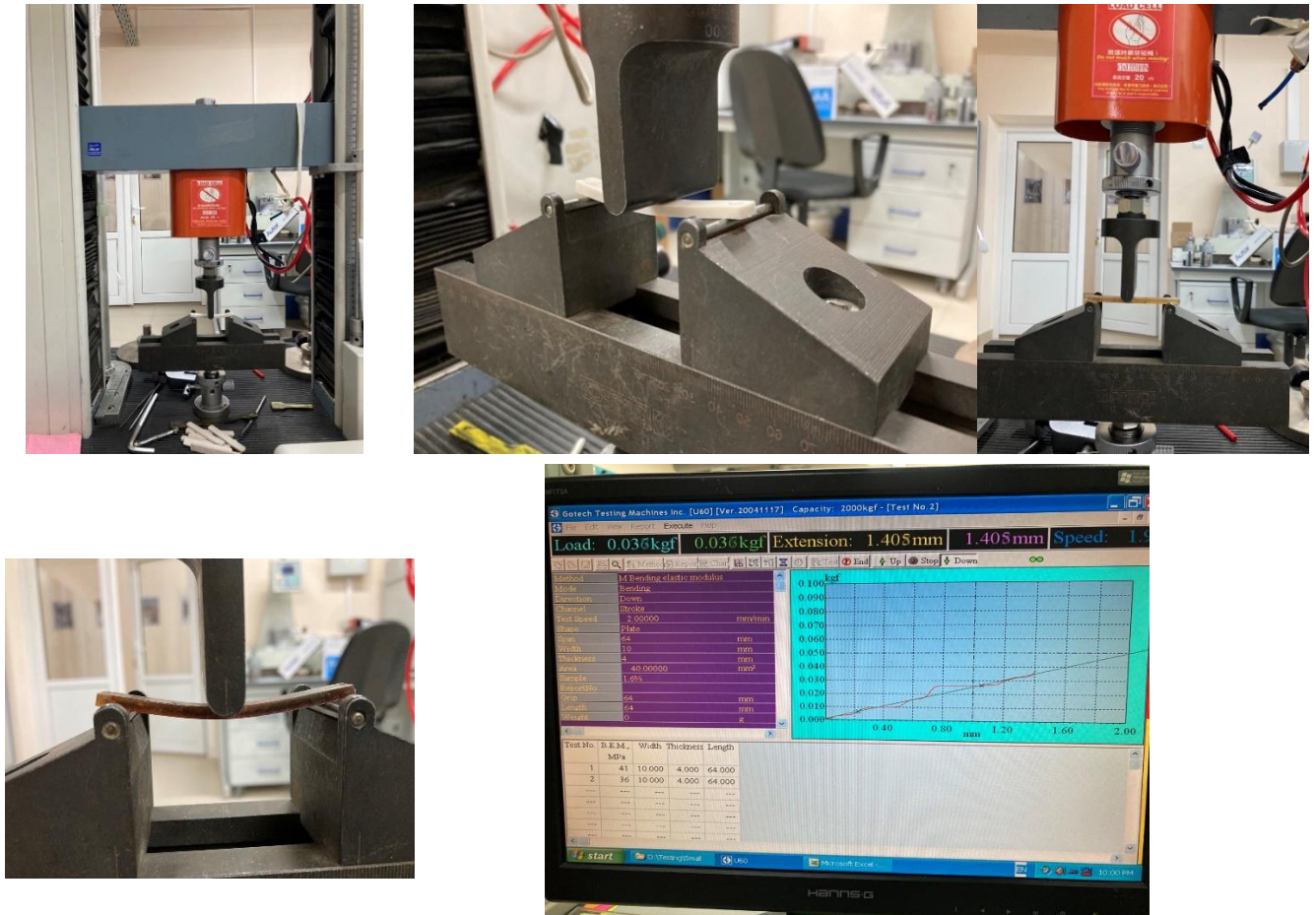


Рисунок 6.16 Испытание полимерных образцов для определения модуля Юнга при изгибе

Сущность метода заключается в определении модуля упругости при изгибе как отношения приращения напряжения к соответствующему приращению относительной деформации, установленному стандартом.

Для проведения испытания использовалась испытательная машина Gotech Testing Machine GT-TCS 2000 (Тайвань), сочетающие применение новейшего программного обеспечения Instron Bluehill Universal со специализированными модулями для статических испытаний и различными готовыми программами Instron для усталостных испытаний. Данная испытательная машина обеспечивает скорость сближения нагружающего наконечника и опор, соответствующую скорости деформации образца ( $1,0 \pm 0,5$ ) % в минуту, а прибор для измерения деформации образца должен обеспечивает измерение с погрешностью не более 0,01 мм.

Величину прогиба оценивались по величине перемещения подвижной части нагружающего устройства (рисунок 6.17).

Образцы нагружают при скорости сближения нагружающего наконечника и опор, обеспечивающей скорость деформации образца ( $1,0 \pm 0,5$ ) % в минуту.

Относительную деформацию крайних волокон ( $\epsilon$ ) вычисляют по формуле:

$$\varepsilon = \frac{6wh}{L^2} \quad 6.30$$

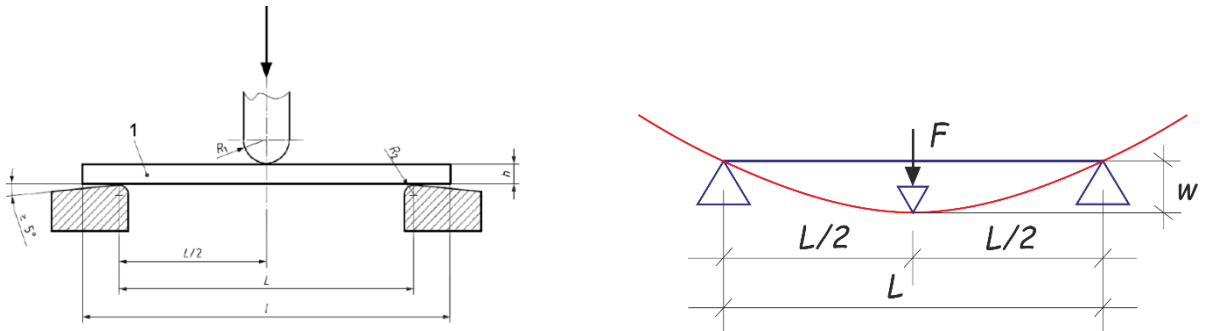


Рисунок 6.17 Схема нагружения полимерных образцов при изгибе

где  $w$  – прогиб, мм,  $h$  – толщина образца, мм,  $L$  – расстояние между опорами, мм.

По диаграмме определяют значения нагрузки и прогиба, соответствующие значениям относительной деформации крайних волокон 0,1 и 0,3 %. Допускаются меньшие значения относительной деформации при изгибе для образцов, предусмотренных в нормах.

Модуль Юнга определялись по формуле:

$$E_{\text{изг}} = \frac{L^3(F_2 - F_1)}{4bh^3(w_2 - w_1)} \quad 6.31$$

где  $F_2$  – нагрузка при величине относительной деформации крайних волокон 0,3 %, Н;

$F_1$  – нагрузка при величине относительной деформации крайних волокон 0,1 %, Н

$b$  – ширина образца, мм;  $h$  – толщина образца, мм;

$w_2$  – прогиб, соответствующий относительной деформации крайних волокон 0,3 %, мм;

$w_1$  – прогиб, соответствующий относительной деформации крайних волокон 0,1 %, мм;

Таблица 6.7. Экспериментальные данные для расчета модуля Юнга

Номер образца	1	2	3	4
$h$ , мм	2,01	2,08	2,1	2,04
$b$ , мм	10,1	10,0	10,1	10,2
$l$ , мм	55,4	55,2	55,3	55,2
Расстояние между опорами, $L$ мм	40,3	40,3	40,1	40,2
$E$ кГ/мм <sup>2</sup>	299	315	322	282

В результате обработки данных, среднее значение модуля Юнга приняли  $E_{\text{ср.}} = 304,5 \frac{\text{кГ}}{\text{мм}^2}$ .

### 6.3 Экспериментальное определение зависимости критического времени от нагрузки. Сравнение с теоретическим результатом

#### 6.3.1 Основные этапы потери устойчивости в условиях ползучести. Предварительные опыты.

В испытаниях на устойчивость, в представленной работе, использовали призматические образцы прямоугольного сечения. Особое внимание обращали на первоначальную прямолинейность образца. Из плит размером 300 x 200 x 20 мм на фрезерном станке вырезали заготовки, которые затем шлифовали в зажимах на шлифовальном станке. Для избежание сильного нагрева (вследствие которого в образцах появляются начальные напряжения) шлифование производили с водной эмульсией.

Полученные образцы проверяли в поляризованном свете. Как оказалось, в них практически отсутствовали начальные напряжения. На рисунке 6.18 приведены фотографии полученных образцов с подпятником.

В результате обработок результатов эксперимента отклонение оси стержня от прямолинейной составляло не более 0, 05% от длины стержня. Для того, чтобы заранее предопределить плоскость потери устойчивости высота сечения стержня была взята значительно меньше толщины:  $h = 8\text{мм}$ ;  $b = 15\text{мм}$ . Длина стержня была взята  $\sim 150\text{ мм}$  из следующих соображений.

Известно, что потеря устойчивости происходит раньше разрушения от сжимающей нагрузки, если гибкость стержня  $\lambda = \frac{l}{r}$ , где  $l$  – длина, а  $r$  – радиус инерции сечения стержня, достаточно велика. В данном случае  $\lambda \cong \frac{150}{2,3} = 65,2$ .

Такая величина гибкости удовлетворяет упомянутому условию для данного материала. Общее число образцов, испытанных в различных режимах, составляло 42 шт.

За основу взята испытательная универсальная испытательная машины Gotech Testing Machine GT-TCS 2000 (Тайвань) рисунок 6.19.

Для того, чтобы при испытаниях в режиме ползучести поддерживать сжимающее усилие постоянным, используется контролирующее устройство.

Испытания проводили на устойчивость шарнирно закрепленных стержней [238].

В настоящей работе проводились испытания на устойчивость шарнирно закрепленных стержней. На рисунке 6.20 показан конец стержня в условиях шарнирного опирания.

На внутренних планках реверса (1) с помощью болтов крепят опорные призмы (2), выполненные из инструментальной стали. Сводя эти призмы в отсутствие образца, добиваются того, чтобы острия призм были строго на одной прямой. Тем самым исключается эксцентриситет в опорах.



На стержень (6) крепятся подпятники (4), также выполненные из инструментальной стали. Для того, чтобы ось стержня проходила строго через острия призм, используют прокладки (5), прижимая которые болтами, добиваются совмещения рисок (3) на образце и на подпятнике.

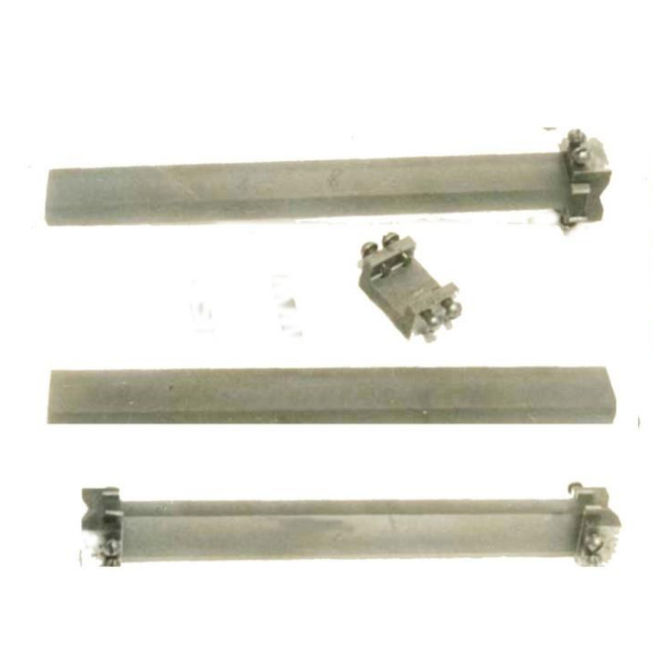


Рисунок 6.18. Стержни с подпятниками для испытаний на устойчивость



Рисунок 6.19. Схема экспериментальной установки

Риска на подпятнике проводится против углубления в нем. При таком способе закрепления длину стержня можно считать между остриями призм, так как толщина подпятника  $h$  значительно меньше длины образца. Для лучшего скольжения в опорах между подпятником и призмой вводится несколько капель машинного масла.

Поскольку продолжительность отдельных экспериментов достаточно велика для измерения отклонений стержня, была предложена механическая схема измерений [238].

Способ, изложенный в работе [79] применяя который используют различные электронные приборы, не смог бы обеспечить достаточной надежности в данном случае. К планкам реверса (1) крепятся две платформы (2) рисунок 6.22.

На верхней размещается два индикатора (3), ножки которых, снабженные удлинителями (4) упираются в нижнее платформу. Эти индикаторы позволяют измерять скорость сближения торцов стержня. С двух сторон к верхней платформе крепятся подвижные кронштейны (5), на которых устанавливаются индикаторы (6), измеряющие поперечные отклонения стержня.

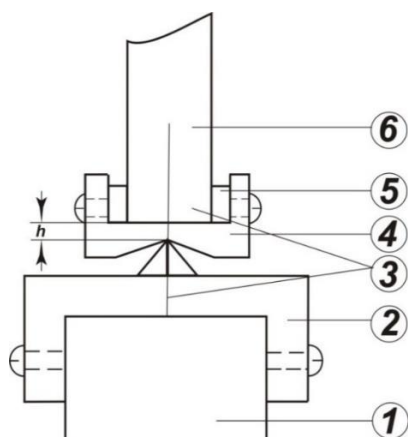


Рисунок 6.20. Способ закрепления конца стержня в условиях шарнирного опирания

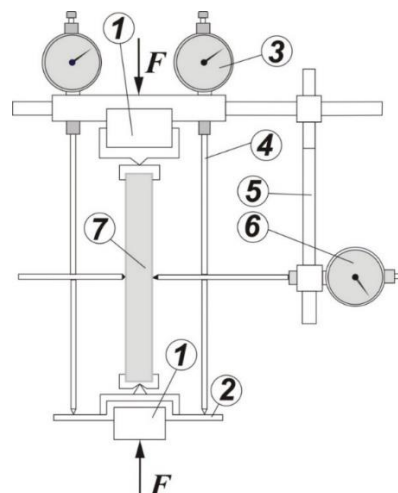


Рисунок 6.21. Принципиальная схема измерения отклонений стержня

Устройство кронштейнов обеспечивает перемещение индикаторов в двух направлениях, что позволяет устанавливать индикаторы против центра образца (7). На рисунке 6.17. показан реверс с измерительным устройством.

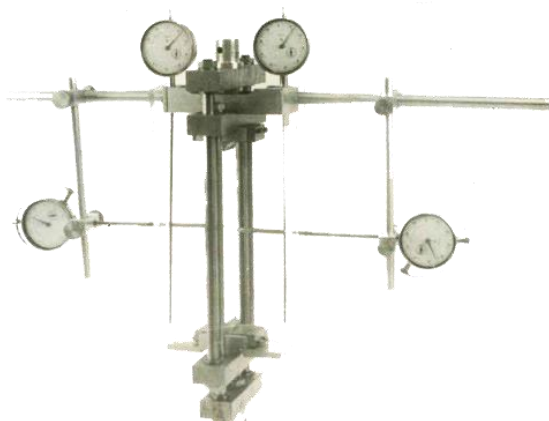


Рисунок 6.22 – Общий вид реверса с устройством для измерения прогибов стержня



Рисунок 6.23 – Индикатор для измерения перемещений 0 ÷ 50 мм.

При сближении планок реверса индикаторы опускаются вместе с верхним концом стержня, так что в процессе эксперимента можно считать, что индикаторы (6) измеряют отклонения центральной части образца.

Поскольку прогибы стержня в процессе эксперимента достигали 20 мм, - стандартные индикаторы с расходом 10 мм и точностью 0,01 мм были переделаны. Были изготовлены новые рейки с расходом 50 мм, а внутренние пружины заменены на внешние рисунок 6.18. Такой индикатор давал погрешность не более 0,05 мм на всем диапазоне измерений. Показания с помощью этого устройства можно фиксировать с интервалом от 10 мин до 4 ч.



Полная автоматизация установки позволяла проводить эксперименты любой продолжительности без непосредственного наблюдения. Показания индикаторов фиксировали с помощью автоматического фотографирующего устройства и видеокамерой.

### 6.3.2 Сжатие стержней с постоянной скоростью сближения торцов. Тестирование экспериментальной установки

Сжатие стержней с постоянной скоростью сближения торцов проводили на описанной выше установке. Показания снимали, либо визуально с помощью индикатора при малых скоростях нагружения, либо с помощью тензодатчиков при больших скоростях нагружения. Сигнал с тензодатчиков через усилитель подавался на осциллограф рисунок 6.24.

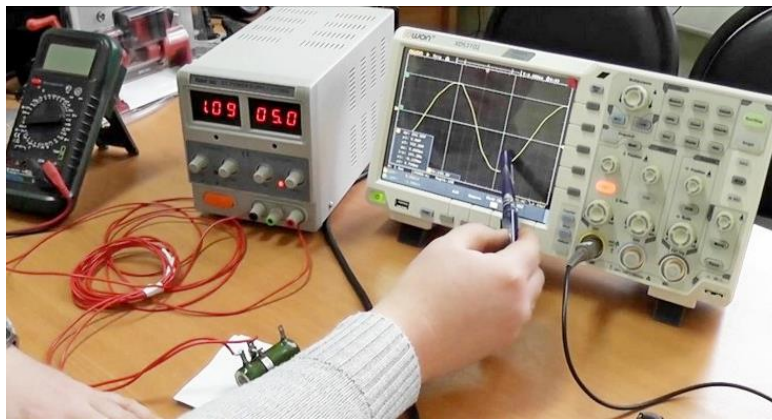


Рисунок 6.24 – Осциллограф для снятия сигналов с тензодатчиков.

Всего был испытан 21 образец при различных скоростях. Продолжительность испытаний – от нескольких секунд до нескольких десятков минут. На рисунок 6.25 приведены типичные зависимости силы от времени и прогибов середины стержня от времени.

Из этой диаграммы видно, что нагрузка растет с почти постоянной скоростью в течение почти всего процесса, поэтому этот режим можно считать нагружением с постоянной скоростью.

Рост нагрузки продолжался до определенного момента  $t_1$ , когда нагрузка остается постоянной, а в некоторых случаях даже немного падает.

В тоже время прогиб в течение почти всего времени имеет очень маленькую скорость, но к моменту  $t_1$  эта скорость резко возрастает, что приводит к разрушению стержня. Резкое увеличение прогибов в момент  $t_1$ , когда нагрузка уже остается постоянной объясняется тем, что эта нагрузка является критической. При нагружении с большой скоростью производилась только запись нагрузки, типичная осциллограмма приведена на рисунок 6.26.

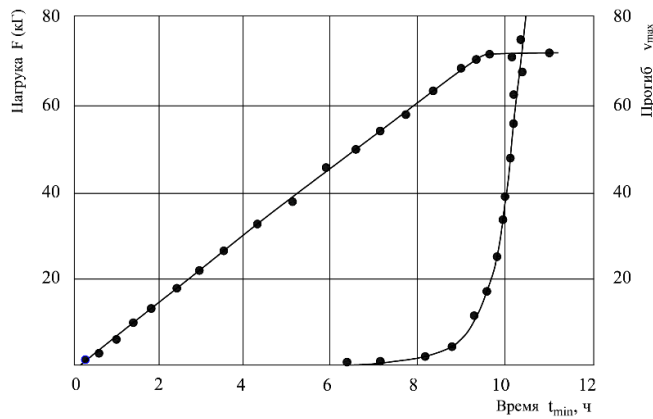


Рисунок 6.25 – Зависимость силы и прогиба середины стержня от времени при сжатии с постоянной скоростью сближения торцов

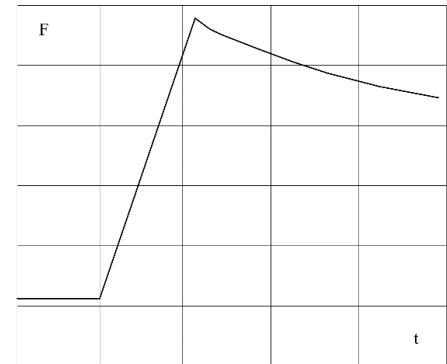


Рисунок 6.26 – Осциллограмма зависимости силы от времени при большой скорости сближения торцов

В данном исследовании не ставилась задача детального исследования влияния скорости сжатия на потерю устойчивости и величину критической силы. Целью этих экспериментов была, в первую очередь, проверка экспериментальной установки.

Если при больших скоростях нагружения экспериментальная  $F_{кр}$  совпадает с расчетной величиной  $F_3$ , соответствующей шарнирному опиранию, – следовательно, можно в дальнейшем считать закрепление стержня – шарнирным. Попутно также выяснилось качественное влияние скорости нагружения на поведение стержней. Так, снижение критической нагрузки с уменьшением скорости сближения торцов стержня подтверждает наличие в данном материале неупругой составляющей деформации.

В таблице 6.7 приведены результаты испытания стержней на устойчивость при сжатии с постоянной скоростью, сближения торцов,  $F_3$ , теоретическое вычислялось по известной формуле для шарнирно-закрепленных стержней  $F_3 = \frac{\pi^2 EJ}{l^2}$ , где  $E = 295 \text{ кг/мм}^2$ ;  $l = l_0 + 2\Delta$ ;  $l_0$  – длина стержня;  $\Delta$  – толщина подпятников.

На основании полученных данных можно сделать вывод, что поскольку отношение экспериментально определенной и теоретически вычисленной критических сил для большой скорости нагружения близко к единице, то можно считать, что стержень в экспериментальной установке закреплен шарнирно.

Таблица 6.7. Результаты испытания стержней на устойчивость

Скорость сближения торцов, $\frac{\text{мм}}{\text{с}}$	Количество образцов	Продолжительность эксперимента	Скорость роста нагрузки, $\frac{\text{кг}}{\text{с}}$	$\frac{F_{кр}}{F_3}$	$\frac{\min}{\max}$	$\left(\frac{F_{кр}}{F_3}\right)_{ср}$
0,33	6	1 с	66 ÷ 68	0,955	1,036	0,979
0,03	5	10 ÷ 15 с	5 ÷ 7	0,904	0,975	0,964
$0,5 \cdot 10^3$	6	10 мин	0,1 ÷ 0,2	0,876	0,987	0,946
$0,1 \cdot 10^3$	4	1 ч	0,2	0,881	0,957	0,936

Этот вывод позволяет проводить сравнение экспериментальных данных по устойчивости стержней при ползучести с решением теоретической задачи.

### 6.3.3 Определение зависимости критического времени от нагрузки

Основное исследование устойчивости полимерных стержней было проведено в режиме ползучести. Поскольку продолжительность отдельных экспериментов была очень велика, эксперименты проводились одновременно на двух установках. Предварительное нагружение до нагрузки  $F_0$  проводили без редуктора, чтобы достичь возможно большей скорости нагружения, и тем самым, по возможности, исключить неупругие деформации [238].

Длительность нагружения была от нескольких секунд до нескольких десятков секунд. По сравнению со всей продолжительностью каждого эксперимента это время нагружения ничтожно мало, поэтому можно считать, что нагрузка прикладывалась практически мгновенно. В дальнейшем эта нагрузка поддерживалась постоянной с помощью контролирующего устройства.

Точность поддержания постоянства нагрузки, исключая лишь период перед самым разрушением была довольно высока.

При  $F_0 = 60$  кГ колебания нагрузки не превышали 0,05 кГ. Частота догрузений в сильной степени зависела от величины заданной нагрузки и времени. Поскольку в начальный период времени скорость ползучести сравнительно высока и, вследствие этого, сближение опор в начальный момент могло быть заметным, то догружение (восстановление заданного уровня нагрузки) происходило с большой частотой.

В дальнейшем, с уменьшением скорости ползучести, догружение происходило реже вплоть до момента, когда уже скорость прогиба стержня начинала расти вследствие его потери устойчивости, что также могло привести к падению нагрузки и вызвать увеличение частоты догрузений.

В заключительный период система догрузений включалась довольно часто и перед самым разрушением нагружение происходило непрерывно. В силу недостаточной скорости редуктора в момент близкий к разрушению стержня удавалось поддерживать постоянство нагрузки с точностью до 5 – 10%. Но, поскольку период резкого роста прогибов стержня был весьма мал по сравнению со всей продолжительностью эксперимента, то незначительным падением нагрузки в период разрушения можно пренебречь. Характер поведения стержней во всех испытаниях был одинаков, количественные же результаты имеют некоторый разброс.

Поставленные эксперименты позволяют выяснить некоторые закономерности в поведении стержней под постоянной нагрузкой.

На рисунке 6.27 приведены типичные диаграммы потери устойчивости стержней при ползучести. По оси абсцисс отложено время, по оси ординат - прогибы середины стержня.

Характер диаграмм идентичен как при малых, так и при больших нагрузках, о чем свидетельствуют диаграммы на рисунках 6.28 – 6.30.

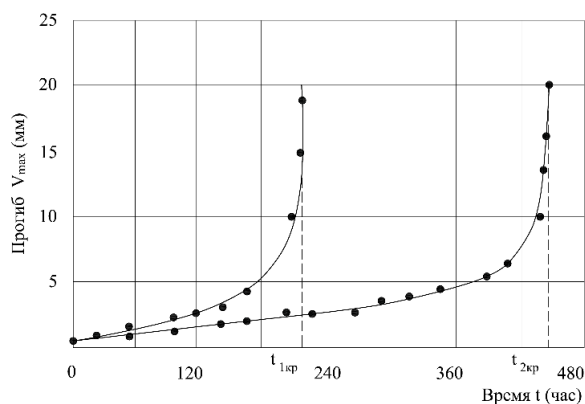


Рисунок 6.27 – Типичные экспериментальные диаграммы потери устойчивости стержней из ЭДТ–10 при ползучести

При  $t = 0$  после приложения нагрузки имеется некоторый прогиб  $v_0$ , который зависит от точности установки образца. В некоторых экспериментах этот прогиб был равен нулю или близок к нулю.

Из приведенных диаграмм видно, что в течение длительного времени прогиб середины стержня остается почти постоянным или происходит сравнительно медленное искривление с почти постоянной скоростью. Затем следует переходной участок, когда скорость прогиба нарастает, и, наконец, вблизи критического времени начинается искривление стержня с очень большой скоростью, приводящее к разрушению.

Поскольку этот заключительный период весьма мал по сравнению со всем процессом, не будет большой ошибкой считать критическим временем – время разрушения образца.

Очевидно, что критическое время в сильной степени зависит от величины сжимающей силы. Так изменение силы на несколько процентов приводит к изменению критического времени на порядок и более. Особенно сильно это наблюдается вблизи Эйлеровой критической силы.

Как было сказано выше, количественные результаты имеют некоторый разброс в величинах критического времени.

На рисунке 6.28 показаны результаты испытаний трех образцов, два из которых были сжаты одной и той же силой, близкой к Эйлеровой.

Видно, что критическое время при одной и той же силе имеет некоторый разброс. Начальные прогибы, образовавшиеся после завершения нагружения у этих стержней также различны. Нельзя выявить определенной закономерности во влиянии этих начальных прогибов на величину критического времени.

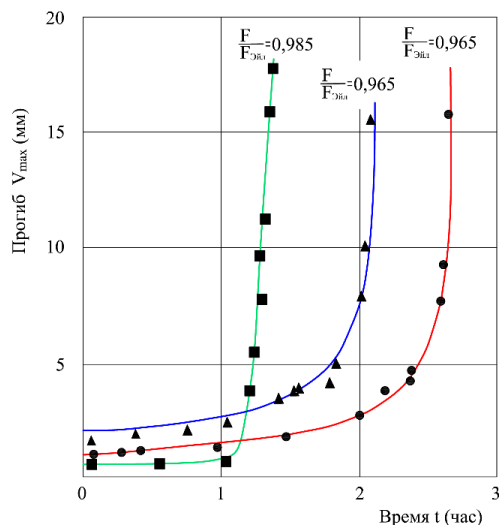


Рисунок 6.28 – Экспериментальные диаграммы потери устойчивости стержней при ползучести для сил близких к  $F_3$ .

Причинами такого разброса являются различные помехи, колебания испытательной машины во время работы мотора, разница в усилиях индикаторов, измеряющих боковые отклонения. Особенно сильно влияние помех при нагрузках, близких к Эйлеровой, поскольку стержень с самого начала находится в состоянии, близком к неустойчивому. Этот разброс существует также и при испытаниях с меньшими нагрузками. При малых нагрузках характер кривых такой же, как и при больших.

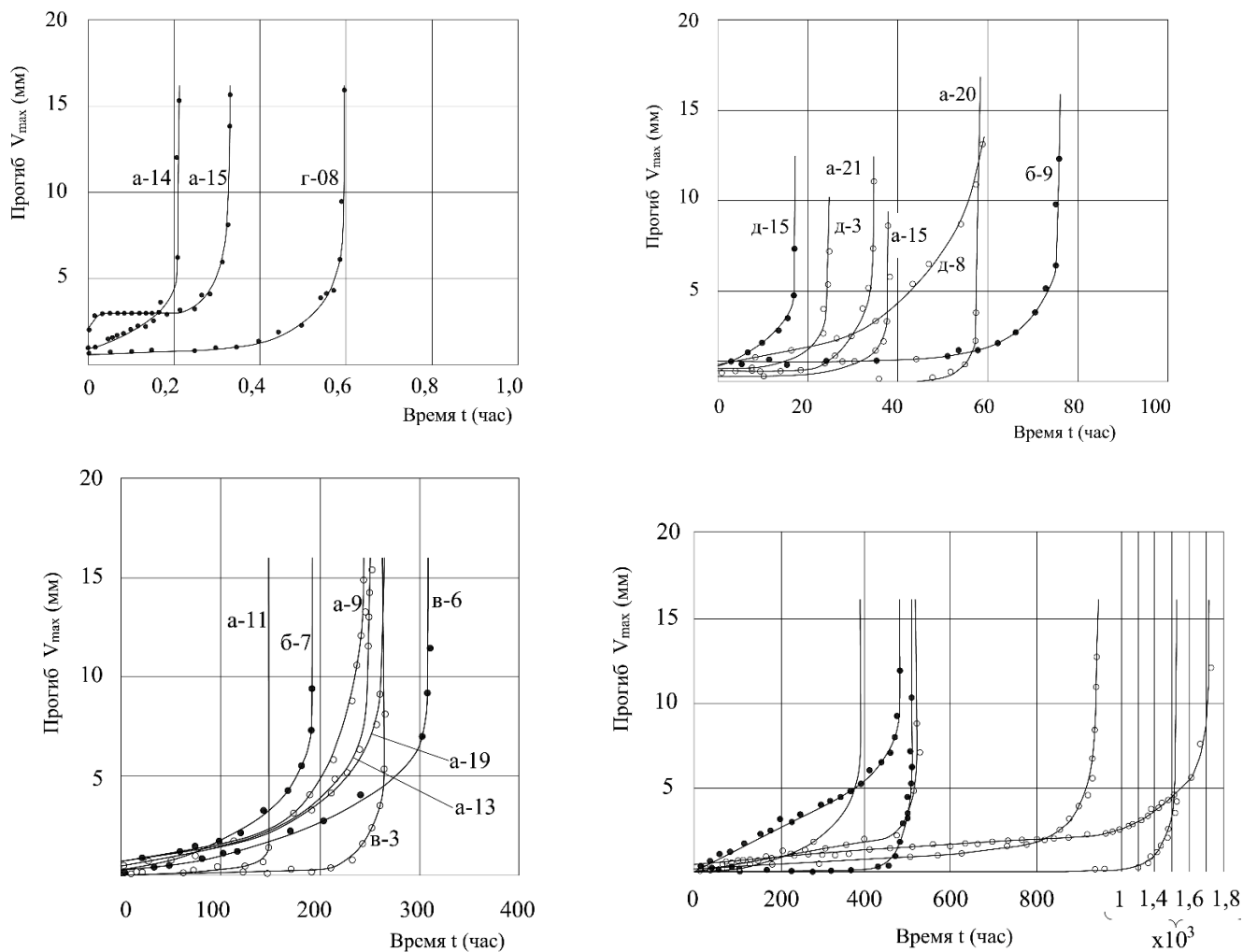


Рисунок 6.29 – Экспериментальные диаграммы потери устойчивости стержней при ползучести.

Некоторое влияние на разброс имеет также различие в размерах образцов. Если строить зависимость  $t_{кр}$  от отношения  $F_0/F_3$  то этот разброс будет меньше.

Всего на устойчивость при ползучести было испытано около сорока образцов. Полученные диаграммы потери устойчивости приведены на рисунке 6.29. В связи с тем, что нагружение производилось с большой скоростью, и не удавалось останавливать машину при заранее заданной нагрузке, контакт, следящий за постоянством нагрузки, устанавливался после нагружения.

Этим обусловлено то, что нагрузка, фактически действовавшая в процессе ползучести несколько отличалась от заранее заданной. После обработки полученных результатов удалось построить зависимость критического времени от отношения  $F_0/F_3$

Таблица 6.8 Результаты экспериментального исследования устойчивости стержней из полимера ЭДТ-10

№ обр.	$\frac{F}{F_3}$	$t_{кр}$ час.	№ обр.	$\frac{F}{F_3}$	$t_{кр}$ час.
а – 12	0,897	1,13	в – 3	0,843	264
а – 14	0,956	0,21	г – 5	0,929	8,7
а – 13	0,781	262	г – 6	0,985	1,4
а – 15	0,955	0,33	г – 7	0,961	2,68
а – 15	0,900	38	г – 8	0,964	0,6
а – 18	0,943	4,6	д – 3	0,900	25
а – 19	0,864	250	д – 8	0,939	59
а – 20	0,937	58	д – 9	0,956	5,6
а – 21	0,908	35	д – 13	0,965	2,36
а – 22	0,966	4,66	д – 14	0,946	2,15
а – 23	0,865	388	д – 15	0,926	17
б – 6	0,912	5	д – 16	0,921	1656
б – 7	0,862	197	б – 9	0,890	76
8	0,747	2040	б – 8	0,834	950
9	0,924	287	в – 4	0,866	480
10	0,875	527,5	в – 5	0,862	508
11	0,885	143,5	в – 6	0,864	312

На рисунке 6.31, где каждая точка представляет собой результат испытания одного образца такая зависимость построена в полулогарифмических координатах.

Поскольку при уменьшении нагрузки продолжительность эксперимента резко возрастает, не удалось, получить результатов для нагрузок  $\sim 0,7 F_3$  и меньше. Наиболее длительный эксперимент продолжался около 2-х месяцев.

Как видно из диаграммы рисунке 6.31 при нагрузках близких к  $F_3$  малое изменение нагрузки ведет к значительным изменениям критического времени, хотя сами времена сравнительно невелики;

При меньших значениях  $F_0/F_3$  небольшое колебание нагрузки не приводит к таким резким изменениям  $t_{кр}$ , какое имеет место при  $F_0/F_3 \geq 0,9$ .

Из диаграммы рисунке 6.31 также следует, что несмотря на наличие известного разброса, экспериментальные точки располагаются довольно плотно вблизи некоторой ниспадающей кривой, что свидетельствует об определенной функциональной зависимости  $\log t_{кр}$  от  $F_0/F_3$ .

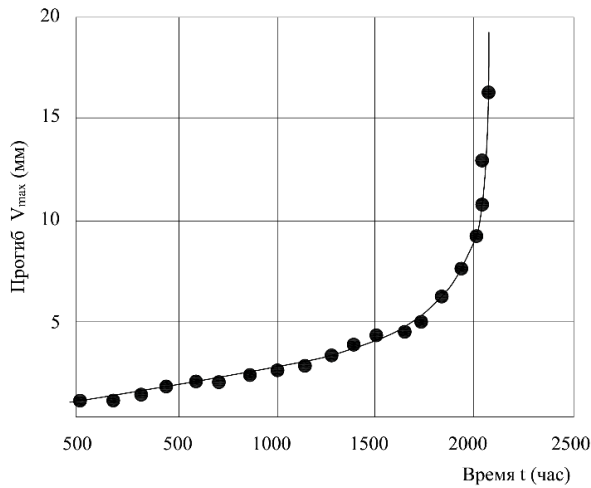


Рисунок 6.30 – Диаграмма потери устойчивости стержня при ползучести.

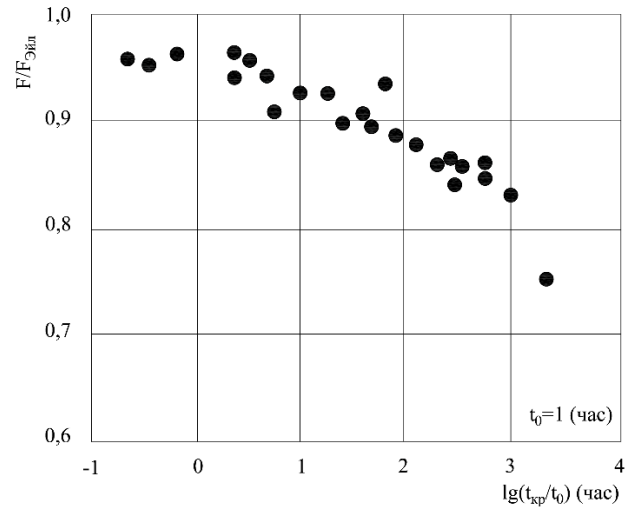


Рисунок 6.31 - Экспериментальная зависимость критического времени сжимающей нагрузки для стержней из ЭДТ-10

### 6.3.4 Сравнение теоретических результатов с экспериментом

Результаты экспериментального исследования были изложены выше. В второй главе был проведен расчет, в котором были использованы размеры, подвергнутые экспериментальному исследованию образцов и константы исследуемого материала для одного члена спектра времен релаксации обобщенного уравнения Максвелла.

Как отмечалось выше, у полимеров три константы  $E, E_\infty$  и  $m^*$  определяются из независимых экспериментов с достаточной степенью точности и являются весьма стабильными.

Четвертая же константа, так называемый коэффициент начальной вязкости  $\eta_0^*$  является недостаточно стабильной величиной и ее определение с большой степенью точности весьма затруднительно. По диаграммам, приведенным в работе [79]  $\eta_0^*$  значение колеблется в интервале  $10^{10} \div 10^{11} \frac{\text{кгсм}}{\text{мм}^2}$ . Соответственно этим двум крайним значениям были вычислены две зависимости  $t_{кр}$  от  $F_0/F_3$ . Остальные константы полимера и размеры стержней указаны выше.

На рисунке 6.32 приведены две упомянутые теоретические кривые, полученные численным интегрированием, и результаты эксперимента. Первая кривая соответствует  $\eta_0^*$ , вторая –  $10^{11} \frac{\text{кгсм}}{\text{мм}^2}$ .

Несмотря на некоторый разброс экспериментальных данных, почти все точки укладываются в интервал между двумя теоретическими кривыми. Таким образом результаты теоретического расчета показали в полнее удовлетворительное совпадение с полученными

экспериментальными данными на интервале  $0,75 < F_0/F_3 < 1$ . Это совпадение можно рассматривать как подтверждение пригодности предлагаемого метода решения задачи устойчивости полимерных стержней при ползучести. Слишком большая длительность экспериментов при малых уровнях нагрузки не позволила, к сожалению, получить экспериментальные точки, соответствующие этим нагрузкам и провести сравнение на всей теоретической кривой.

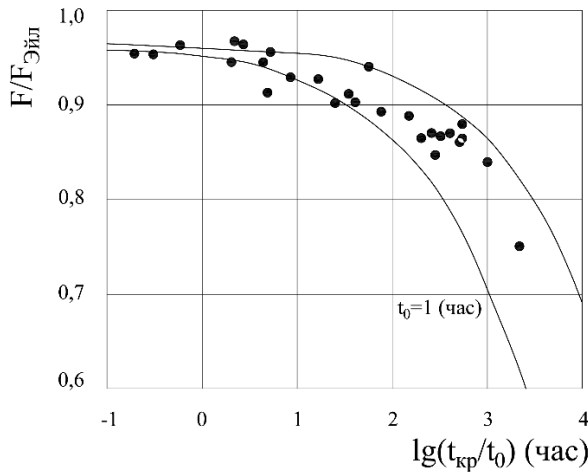


Рисунок 6.32 – Сравнение результатов расчета по нелинейной теории с экспериментальными результатами. Для крайних значений  $\eta_0^*$ :  
 $1 - \eta_0^* = 10^{10} \frac{\text{кгсек}}{\text{мм}^2}$ ,  $2 - \eta_0^* = 10^{11} \frac{\text{кгсек}}{\text{мм}^2}$

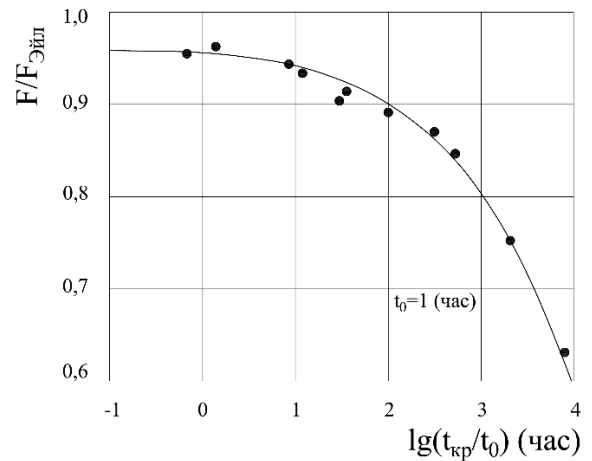


Рисунок 6.33 – Сравнение результатов расчета по нелинейной теории с экспериментальными результатами. Для среднего значения  $\eta_0^*$ . Экспериментальные точки соответствуют осредненным результатам по близким значениям нагрузок.

Однако, удовлетворительное совпадение теоретического расчета с экспериментальными данными на участке  $0,75 < F_0/F_3 < 1$  позволяет предполагать, что теоретический расчет на всем интервале изменение нагрузки будет давать достаточно правильные предсказания критического времени. Осреднение экспериментальных результатов (по близким значениям нагрузки) дает экспериментальную кривую, с которой удовлетворительно совпадает теоретическая кривая, отвечающая среднему значению параметра  $\eta_0^*$  (см. рисунок 6.33).

Возвращаясь к вопросу о выборе величины возмущаемого момента  $M_0$ , отметим, что кривые соответствующие  $z = \frac{F_0 h}{M_0} = 100$  и  $z = \frac{F_0 h}{M_0} = 10^4$  (для  $\eta_0^* = 10^{10} \frac{\text{кгсек}}{\text{мм}^2}$ ) лежат в интервале между первой и второй теоретическими кривыми (см. рисунок 6.34).



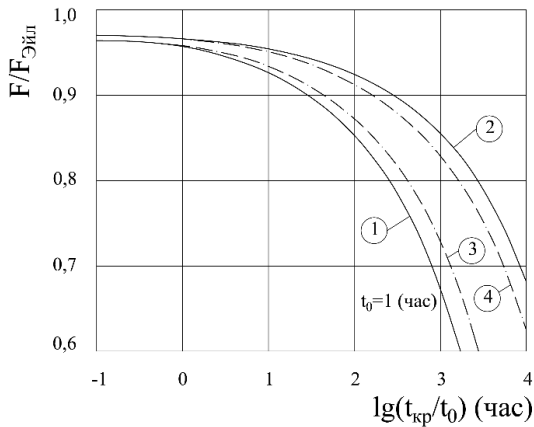


Рисунок 6.34. Сравнение результатов расчета по нелинейной теории с экспериментальными результатами. Влияние величины возмущения момента  $M_0$  на зависимость  $\log t_{кр}$  от  $F_0/F_3$ , полученную путем численного расчета  $z = \frac{F_0 h}{M_0}$ .

#### 6.4 Выводы по главе 6

Предложена методика определения реологических параметров полимера при сдвиговой ползучести на основе нелинейного уравнения Максвелла-Гуревича и методика линейной оптимизации при изгибе.

Аппроксимирующая кривая с использованием нелинейного уравнения связи намного выше согласуется с экспериментальными кривыми, чем в случае применения степенного закона Финдли и линейного уравнения Максвелла-Томпсона.

Усовершенствована методика определения упругих констант методом импульсного воздействия вибрации. Приведена схема установки проведения эксперимента и представлено сравнение результатов, полученных независимым методом испытания на изгиб.

Поскольку полимерное связующее является составной частью композиционных материалов, таких, например, стеклопластики, и определяет, по сути дела, их неупругое поведение, то полученные результаты, по крайней мере качественно, можно отнести и к этим материалам.

Проведено экспериментальное исследование устойчивости стержней из полимера сетчатой структуры из эпоксидного связующего ЭДТ-10. Результаты эксперимента достаточно хорошо согласуются с теорией, что свидетельствует об объективности исследования.

Несмотря на некоторый разброс экспериментальных данных, почти все точки укладываются в интервал между двумя теоретическими кривыми. Таким образом результаты теоретического расчета показали в полнее удовлетворительное совпадение с полученными экспериментальными данными на интервале  $0,75 < F_0/F_3 < 1$ . Это совпадение можно рассматривать как подтверждение пригодности предлагаемого метода решения задачи устойчивости полимерных стержней при ползучести.

## 7 ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

В процессе исследований получен ряд новых результатов, краткая формулировка которых приведена ниже:

1. На основе аналитического обзора современной научно-технической, нормативной, методической литературы проведен анализ отечественного и зарубежного опыта в области нелинейного реологического расчета на устойчивость стержней, арок и пластин что позволило развить научно-теоретические представления в данном направлении, а также обобщить существующие теоретические и экспериментальные исследования включая общую постановку задач.

2. Предложена методика определения реологических параметров полимерных материалов по кривым ползучести и релаксации при различных простейших видах деформации с использованием методов нелинейной оптимизации на основе нелинейного обобщенного уравнения Максвелла с учетом зависимости упругих и реологических характеристик от температуры. Разработана методика определения реологических параметров пенополиуретана при сдвиговой ползучести на основе нелинейного обобщенного уравнения состояния Максвелла. Показано, что при использовании указанного уравнения качество аппроксимации экспериментальных кривых ползучести выше, чем в случае применения степенного закона Финдли и линейного уравнения Максвелла-Томпсона.

3. Предложен численно-аналитический метод решения уравнений устойчивости стержней и полос постоянного и переменного поперечного сечения при продольном и поперечном нагружении. Определена область устойчивости стержней и полос при одновременном действии двух силовых факторов и получены расчетные формулы. Определены пределы применимости этих формул.

4. Получено разрешающее уравнение для расчета на боковое выпучивание балок постоянной и переменной жесткости с учетом начальных несовершенств в виде эксцентриситета приложения нагрузки, а также начальной погиби в плоскости наименьшей жесткости и начального угла закручивания. Установлены различия в результатах расчета с учетом начальных несовершенств в упругой и вязкоупругой постановке. Для вязкоупругих балок, в отличие от упругих, начальные неправильности существенно влияют на процесс выпучивания.

5. Разработан алгоритм деформационного расчета арок конструкций на основе метода конечных элементов, с применением метода последующих уточнений, с контролем градиента изменения перемещений узлов арки для оценки устойчивости с учетом всех видов нелинейности для анализа их несущей способности во времени.

6. Получены универсальные разрешающие уравнения, а также разработан алгоритм расчета на устойчивость полимерных пластин в условиях нелинейной ползучести и исследовано влияние ослаблений в виде отверстий на величину критического времени и критической силы.

7. Полученные автором теоретические результаты согласуются с данными собственных и проведенных другими исследователями экспериментов, а также в частных случаях с известными численными и аналитическими решениями. Поскольку полимерное связующее является составной частью композиционных материалов, таких, например, стеклопластики, и определяет, по сути дела, их неупругое поведение, то полученные результаты, по крайней мере качественно, можно отнести и к этим материалам. Выполнена верификация разработанного автором программного обеспечения и алгоритмов путем сравнения с существующими сертифицированными программными комплексами, дополненными авторскими модулями.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Poisson, S.D. J. Ecole Polytechnique. // [текст] /Poisson, S.D –1831 – V. 13.
2. Maxwell, J.K. //Phil. Trans. Roy. Soc. London. // [текст] Maxwell, J.K. / –1867. –V. 157. – P.49.
3. Tompson, W. (Lord Kelvin) // Proc. Roy. Soc. // [текст]/ Tompson, W. (Lord Kelvin) –1865. –V. 14 – P. 289.
4. Kohlrausch, F.W. //Pogg. Ann. Physik. // [текст]/ Kohlrausch, F.W. –1863 –V. 119 –P. 337.
5. Александров, А.П., Колено П.П., Кувшинский Е.В. // [текст]/ Александров, А.П и др.//Журн. техн. Физики/ –1936 –Т. 6 –С. 1311.
6. Александров, А.П., Лазуркин Ю.С. // Журн. техн. Физики // [текст] Александров, А.П и др. –1939 – Т. 9 – С. 1249.
7. Leaderman H. // [текст]/ Elastic and Creep Properties of Filamentous Materials and Other High Polymer. Textile Found// Leaderman H. / Washington, USA, –1943.
8. Ferry, J.D. Viscoelastic Properties of Polymers. New York: Wiley, 1980.
9. Philippoff // Viscositat der Kolloide. Leipzig: Steinkopff, 1942.
10. Weissenberg К. // Nature. 1947. V. 159. P. 311.
11. Hencky H. // Ann. Physik. 1929. V. 2. P. 617.
12. Малкин А.Я. // Успехи реологии полимеров / Под ред. Г.В. Виноградова. М.: Химия, 1970. С. 171.
13. Oldroyd J.G. // Proc. Roy. Soc. A. 1950. V. 200. P. 523.
14. Oldroyd J.G. // Proc. Roy. Soc. A. 1958. V. 245. P. 278.
15. Coleman B.D., Noll W. // Arch. Rat. Mech. Anal. 1959. V. 3. P. 289.
16. Coleman B.D., Noll W. // Rev. Mod. Phys. 1961. V. 33. P. 239.
17. Truesdell C.J. // Rat. Mech. Anal. 1952. V. 1. P. 125.
18. Truesdell C., Noll W. // Handbuch der Physik / Ed. by S. Flugge. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 1965. III/3.
19. Седов Л.И. Механика сплошной среды. М.: Наука, 1970.
20. Larson R.G. Structure and Rheology of Complex Fluids. New York: Oxford Press, 1999.
21. Малкин А.Я., Исаев, А. Реология. Концепции, методы, приложения. СПб: Профессия, 2007.
22. Kwon Y., Leonov A.I. // J. Non-Newton. Fluid Mech. 1995. V. 58. P. 25.
23. Simhambhalta M., Leonov A.I. // Rheol. Acta. 1995. V. 34. P. 1435.
24. Becker, A. A. Benchmarks for finite element analysis of creep continuum damage mechanics [Текст] / A. A Becker, T. H. Hyde, W. Sun, P. Andersson // Computational Materials Science. – 2002. – Т. 25. – С. 34-41.

25. Garrido M. et al. Creep behaviour of sandwich panels with rigid polyurethane foam core and glass-fibre reinforced polymer faces: Experimental tests and analytical modelling [Текст] // *Journal of Composite Materials*. – 2014. – Т. 48. – №. 18. – С. 2237-2249.
26. Sidda Reddy, B. Bending analysis of laminated composite plates using finite element method [Текст] / В. Sidda Reddy [и др.] // *International Journal of Engineering, Science and Technology*. – 2012. – Т. 4 – С. 177-190.
27. Рабинович, А. Л. Введение в механику армированных полимеров [Текст] / А. Л. Рабинович. – М.: Наука, 1970. – 483 с.
28. Арутюнян Н.Х. Некоторые вопросы теории ползучести / [Текст] / Н.Х. Арутюнян. – Л., Гостехиздат; – М., 1952. – 323с.
29. Болотин В.В. Анализ технологических напряжений в намоточных изделиях из композитов на протяжении всего процесса изготовления / [Текст] / В.В. Болотин // *Механика композит. материалов*. – 1980. – №3. – С.500–508.
30. Болотин В.В. О понятии устойчивости в строительной механике / [Текст] В.В. Болотин. – В кн.: Пробл. в устойчивости строит. механики. – М., 1965. – С.6–27.
31. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций / Ю.Н. Работнов. – М.: Наука, 1966. – 752с.
32. Работнов Ю.Н. Элементы наследственной механики твердых тел / Ю.Н. Работнов. – М.: Наука, 1977. – 383с.
33. Работнов Ю.Н. Равновесие упругой среды с последствием / Ю.Н. Работнов // *Прикладная математика и механика*. – 1948. – Т.12. – №11. – С. 53–62.
34. Работнов Ю.Н. Устойчивость стержней и пластинок в условиях ползучести/Ю.Н. Работнов // *Прикл. матем, и механика*. – 1957. – Т.ХХI. – Вып.3. – С.406–412.
35. Работнов Ю.Н. Нелинейная Ползучесть стеклопластика ТС8/3250 / Ю.Н. Работнов, Л.Х. Паперник, Е.И. Степанычев // *Механика полимеров*. – 1971. – №3. – С.391–397.
36. Ишлинский А.Ю. Об уравнениях пространственного деформирования не вполне упругих и вязкопластических тел / А.Ю. Ишлинский. – *Изв. АН СССР, ОТН*, 1945. – №3. – С.250–260.
37. Ильюшин А.А. Об одной модели, поясняющей аппроксимационный метод СНЭВМ в теории пластичности / А.А. Ильюшин. – В сб.: Упругость и неупругость. – М.: Изд-во МГУ, 1971. – Вып.1. – С.52–59.
38. Ильюшин А.А. Пластичность. Основы общей математической теории / А.А. Ильюшин. – М.: Изд-во АН СССР, 1963. – 271с.
39. Ильюшин А.А. Квазилинейная теория вязкоупругих тел и метод малого параметра / А.А. Ильюшин, П.М. Огибалов // *Механика полимеров*. – 1966. – №2. – С.170–189.
40. Ильюшин А.А. Некоторые основные вопросы механики полимеров / А.А. Ильюшин, П.М. Огибалов // *Механика полимеров*. – 1965. – №3. – С.33–43.

41. Ильюшин А.А. Основы математической теории термовязкоупругости / А.А. Ильюшин, Б.Е. Победря. — М.: Наука, 1970. — 280 с.
42. Ржаницын А.Р. Некоторые вопросы механики систем, деформируемых во времени / А.Р. Ржаницын. — М.: Гостехиздат, 1969. — 252с.
43. Ржаницын А.Р. Расчет сооружений с учетом пластических свойств материалов / А.Р. Ржаницын. — М.: Стройиздат, 1954. — 288с.
44. Ржаницын А.Р. Теория ползучести / А.Р. Ржаницын. — М.: Стройиздат, 1968. — 416с.
45. Ржаницын А.Р. Устойчивость сжатых элементов при ползучести / А.Р. Ржаницын // Строительная механика и расчёт сооружений. — 1959. — №5. — С.16–18.
46. Ржаницын А.Р. Устойчивость систем, обладающих свойствами ползучести / А.Р. Ржаницын // Сб. «Ползучесть и длительная прочность». — Новосибирск. — 1963. — С.25–28.
47. Ржаницын А.Р. Учет влажности и температуры в задачах ползучести. — В сб.: Исследование по механике и прикладной математике / А.Р. Ржаницын // Труды МФТИ: Оборонгиз. — 1958. — Вып.1. — С.131–155.
48. Качанов, Л. М. Теория ползучести [Текст] / Л. М. Качанов. — М.: Физматгиз, 1960. — 680 с.
49. Розовский М.И. Некоторые свойства специальных операторов, применяемых в теории ползучести / М.И. Розовский // Прикладная математика и механика. — 1959.
50. Розовский М.И. Об одном свойстве специального оператора и его приложении к решению динамических задач / М.И. Розовский. — В сб.: Ползучесть и длительная прочность, Новосибирск, Изд-во Сибирского отделения АН СССР, 1963. — С.202–231.
51. Малмейстер А.К. Сопротивление жестких полимерных материалов / А.К. Малмейстер, В.П. Тамуж, Т.А. Тетере. — Рига: Зинатне, 1972. — 498с.
52. Галеркин Б.Г. Стержни и пластинки / Б.Г. Галеркин // Вестн. инж. — 1915. — Т.1. — №19. — С.897–908.
53. Schwarz L. E., Staverman A. J. Time-temperature dependence of linear viscoelastic behaviour. — J. Appl. Phys., 1951, v. 23, N 8, p. 838—843.
54. Morland L. W., Lee E. H. Stress analysis for linear viscoelastic materials with temperature variation. — Trans. Soc. Rheol., 1960, v. 4, p. 233—263.
55. Muki R., Sternberg E. On transient thermal stresses in viscoelastic materials with temperature-dependent properties. — J. Appl. Mech., 1961, v. 28, N 2, p. 44—76.
56. Green A. E., Rivlin R. S. The mechanics of non-linear materials with memory. — Arch. Rat. Mech. Anal., 1957, v. 1, p. 1—21.
57. Leaderman H., McCrackin F., Nakada O. Large longitudinal retarded elastic deformation of rubberlike network polymers. Trans. Soc. Rheol., 1963, N 7, p: 111—123.
58. Lockett F. I., Morland L. W., Thermal stresses in viscoelastic thin-walled tubes with temperature dependent properties. — Int. J. Eng. Sci., 1967, v. 5, N 12, p. 879—898.

59. Onaran K., Findley W. N. Experimental determination of some kernel functions in the multiple integral method for nonlinear creep of polyvinylchloride. — *J. Appl. Mech.*, 1971, March, p. 30—38.
60. Ward I. M., Onat E. T. Non-linear mechanical behavior of oriented polypropylene. — *J. Mech. Phys. Solids*, 1963, v. 11, N 4, p. 217—229.
61. Долгов А. В., Малинин Н. И. О ползучести полимеров в стеклообразном состоянии. — *Прикладная математика и техническая физика*, 1964, № 5, с. 75—82.
62. Малинин Н. И. Ползучесть элементов конструкций из полимерных материалов. — *Прикладная механика и техническая физика*, 1970, Xs 2, с. 109—114.
63. Гольденблат И. И., Копнов В. А. О представлении критериев прочности изотропных материалов в двумерном инвариантном пространстве. — *Механика полимеров*, 1970, № 2, с. 276—283.
64. Ильюшин А. А., Огибалов П. М. Некоторые основные вопросы механики полимеров. — *Механика полимеров*, 1965, № 3, с. 33—43.
65. Ильюшин А. А., Огибалов П. М. Квазилинейная теория вязкоупругих тел и метод малого параметра. — *Механика полимеров*, 1966, № 2, с. 170—189.
66. Москвитин В.В. Об одной простейшей возможности учета нелинейности в вязкоупругих средах / В.В. Москвитин // *Механика полимеров*. — 1967. — №2. — С.207–212.
67. Москвитин В.В. Сопротивление вязкоупругих материалов / В.В. Москвитин. — М., Наука, 1972. — 327с.
68. Ильюшин А. А., Победря Б. Е. Основы математической теории термовязкоупругости. М., Наука, 1970. 280 с.
69. Вильямс М., Ландел Р., Ферри Дж. Температурная зависимость релаксационных процессов в аморфных полимерах и других стеклюющихся жидкостях. — *Проблемы современной физики. Физика полимеров*, 1956, т. 8, № 12, с. 20—33.
70. Болотин В. В. Некоторые математические и экспериментальные модели процессов разрушения. — *Проблемы прочности*, 1971, № 2, с. 13—20.
71. Улицкий, И. И. Теория и расчет железобетонных стержневых конструкций с учетом длительных процессов [Текст] / И. И. Улицкий – Киев: Будивельник, 1967. – 347 с.
72. Александров А. П., Лазуркин Ю. С. Изучение полимеров. I. Высокоэластическая деформация полимеров. II. Динамический метод исследования эластичных полимеров. — *Техническая физика*. 1939, т. 9, № 14, с. 1249—1266.
73. Бартнев Г. М., Зуев Ю. С. Прочность и разрушение высокоэластичных материалов. М.; Л., Химия, 1964. 356 с.
74. Ферри Дж. Вязкоупругие свойства полимеров. М., Изд-во иностр, лит. 1963. 535 с.
75. Френкель Я. И. Кинетическая теория жидкостей. Л., Наука, 1975. 592 с.

76. Gross B. The mathematical structure of the theories of viscoelasticity (II edition), Hermann, Paris, 1968, 71 p.
77. Слонимский Г. Л. Релаксационные процессы в полимерах и пути их описания. — Высокомолекулярные соединения, Сер. А13, 1971, т. 13, № 2, с. 450—460.
78. Гуревич Г. И. Деформируемость сред и распространение сейсмических волн / Г. И. Гуревич. — М.: Наука, 1974. — 483с.
79. Андреев В. И. Об устойчивости полимерных стержней при ползучести. — Механика полимеров, 1968, № 1, с. 145—150.
80. Языев, Б. М. Некоторые задачи и методы механики макро-неоднородной вязкоупругой среды [Текст] / Б. М. Языев, В. И. Андреев, Р. А. Турусов. — Ростов-на-Дону, 2009 – 208 с.
81. Dudnik, A. E. Determining the rheological parameters of polyvinyl chloride, with change in temperature taken into account [Текст] / A. E. Dudnik, A. S. Chepurnenko, S. V. Litvinov // International Polymer Science and Technology. - 2017. - Т. 44. - С. 3033.
82. Чепурненко, А.С. Расчет полимерных пластин и оболочек на силовые и температурные воздействия с учетом нелинейной ползучести: дисс. ...канд. техн. наук: 05.23.17 / Чепурненко Антон Сергеевич. — Ростов–на–Дону, 2015. — 126с.
83. Кулинич И.И. Устойчивость продольно-сжатых стержней переменной жесткости при ползучести: дисс. канд. техн. наук. Ростов-на-Дону, 2012. 161 с.
84. Бабич В.Ф. Исследование влияния температуры на механические характеристики полимеров: /. дисс. ... канд. техн. наук. - Москва, 1966. -288. с.
85. Турусов Р. А., Бабич В. Ф. Температурные напряжения в полимерах. — В сб.: Физикохимия и механика ориентированных стеклопластиков. М., Наука, 1967, с. 155—160.
86. Турусов Р. А., Стратонова М. М. Температурные напряжения в полимерных стержнях при неоднородном нагреве. — Механика полимеров, 1967, № 5, с. 944—947.
87. Петров, В.В. Теория расчета пластин и оболочек [Текст] / В.В. Петров. - М.: Издательство АСВ, 2018. - 410 с.
88. Гольдман, А.Я. Деформирование и кинетика повреждаемости полимеров в условиях всестороннего сжатия. [Текст] / Гольдман А.Я., Меш Г.Э., Деменчук Н.П., Мартынов М.А., Корчагин А. Г. // – Проблемы прочности. – 1981. – №6. – С.73-76.
89. Гольдман, А.Я. Прочность конструкционных пластмасс. [Текст] / – Л.: Машиностроение. 1979. – 320 с
90. Харлаб, В. Д. Энергетическая теория нелинейной ползучести и длительной прочности хрупко разрушающихся материалов. Ч. 1. [Текст] / В. Д. Харлаб // Механика стержневых систем и сплошных сред: межвуз. тематич. сб. тр. / ЛИСИ. – Л., 1981. – Вып. 14 – С. 11 – 17.



91. Тимошенко С.П. Устойчивость стержней, пластин и оболочек / С.П. Тимошенко. – М.:Наука, 1971. – 807с.
92. Григолюк, Э. И. Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек [Текст] / Э. И. Григолюк, И. Т. Селезов. – М.: ВИНТИ, 1973. – 272 с.
93. Ворович, И. И. Общие проблемы теории пластин и оболочек [Текст] / И. И. Ворович // Тр. VI Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин. – М.: Наука. – 1966.
94. Замула, Г. Н. Численное решение осесимметричных задач ползучести круговых цилиндрических оболочек [Текст] / Г. Н. Замула // Ученые записки ЦАГИ. – 1971. – №3. – С. 67-75.
95. Угадчиков, А. Г. Некоторые методы решения на ЭЦВМ физически нелинейных задач теории пластин и оболочек [Текст] / А. Г. Угадчиков, Ю. Г. Коротких. – Киев: Наукова думка, 1971. – 220 с.
96. Greenbaum, G. A. Creep analysis of axisymmetric bodies using finite elements [Текст] / G. A. Greenbaum, M. F. Rubinstein // Nuclear Engineering and Design. – 1968. – Т. 7. – №. 4. – С. 379-397.
97. Sutherland, W. H. AXICRP — Finite element computer code for creep analysis of plane stress, plane strain and axisymmetric bodies [Текст] / W. H. Sutherland // Nuclear Engineering and Design. – 1970. – Т. 11. – С. 269-285.
98. Зенкевич, О. Конечные элементы и аппроксимация [Текст] / О. Зенкевич, К. Морган. – М.: Мир, 1986. – 318 с.
99. Zienkiewicz, O. C. The finite element method: solid mechanics [Текст] / O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor. Butterworth-heinemann, 2000. – 461 с.
100. Прокопович, И. Е. Влияние длительных процессов на напряженное и деформированное состояние сооружений [Текст] / И. Е. Прокопович. – М.: Госстройиздат. – 1963. – 260 с.
101. Прокопович, И. Е. О напряженно-деформированном состоянии тела, обладающего ползучестью и усиленного связями [Текст] / И. Е. Прокопович, В. В. Рекша // Mechanics. Proceedings of National Academy of Sciences of Armenia. – 1969. – Т. 22. – №. 1. – С. 77-92.
102. Морачковский, О. К. Исследование ползучести стержней и оболочек на базе МКЭ и сдвиговой теории [Текст] / О. К. Морачковский, А. А. Замула // Вісник НТУ «ХПІ». – 2002. – №10. – С. 86-90.
103. Бреславский, Д. В. Высокотемпературная ползучесть и длительная прочность элементов конструкций при циклическом нагружении [Текст] / Д. В. Бреславский, О. К. Морачковский, О. А. Татарина // Проблемы прочности. – 2008.– № 5. – С. 46-53.
104. Altenbach, H. Cyclic creep-damage in thin-walled structures [Текст] / H. Altenbach, D. Breslavsky, O. Morachkovsky, K. Naumenko // J. Strain Anal. Eng. Design. - 2000. -№ 1. - С. 1 - 11.

105. Altenbach, H. et al. On the accuracy of creep-damage predictions in thinwalled structures using the finite element method [Текст] // Computational mechanics. – 2000. – Т. 25. – №. 1. – С. 87-98.
106. Бондаренко, В. М. К построению общей теории железобетона (специфика, основы, метод) [Текст] / В. М. Бондаренко // Бетон и железобетон. – 1978. – С. 20-22.
107. Бондаренко, В. М. Инженерные методы нелинейной теории железобетона [Текст] / В. М. Бондаренко, С. В. Бондаренко. – М.: Стройиздат, 1982. – 287 с. 21. Бондаренко, В. М. Метод интегральных оценок в теории железобетона [Текст] / В. М. Бондаренко // Изв. высших учеб. заведений. Строительство и архитектура. – 1982. – № 12. – С. 3-15.
108. Харлаб, В. Д. Энергетическая теория нелинейной ползучести и длительной прочности хрупко разрушающихся материалов. Ч. 3. [Текст] / В. Д. Харлаб // Исследования по теоретическим основам расчета строительных конструкций. / ЛИСИ. – Л., 1983. – Вып. 14. – С. 127-132.
109. Котов, А. А. К теории ползучести и длительной прочности бетона [Текст] / А. А. Котов // Вестник МГТУ. – 2002. – Т.5. – С. 161-166.
110. Котов, А. А. К теории ползучести и длительной прочности бетона [Текст] / А. А. Котов // Вестник МГТУ. – 2002. – Т.5. – С. 161-166.
111. Davis, R. E. Flow of Concrete under Sustained Compressive stress [Текст] / R. E. Davis // Journal of the American Concrete Institute. – 1928. – Т. 24. – №. 2. – С. 303-326.
112. Davis, R. E. Plastic Flow and Volume Changes of Concrete [Текст] / R. E. Davis, H. Davis, J. S. Hamilton // Concrete. Proc. Amer. Soc. for Test. Mat. – 1937. – Т. 37. – С.11.
113. Жгутов, В. М. Математические модели деформирования ортотропных и изотропных ребристых оболочек при учете ползучести материала [Текст]/ В. М. Жгутов // Инженерно-строительный журнал. – 2009. – №. 7. – С. 46-54.
114. Безухов, Н. И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести [Текст] / Н. И. Безухов. – М.: Высшая школа, 1968. – 512 с.
115. Малинин, Н. Н. Прикладная теория пластичности и ползучести [Текст] / Н. Н. Малинин. – М.: Машиностроение, 1968. – 400 с.
116. Ржаницын, А. Р. Строительная механика [Текст] / А. Р. Ржаницын – М.: Высшая школа, 1982. – 400 с.
117. Чуйко, В. М. Ползучесть и релаксация напряжений в пластине, нагружаемой по контуру круглого отверстия [Текст] / В. М. Чуйко, В. М. Ярушина // Прикладная механика и техническая физика. – 2005. – Т. 46. – №4. С. 146-153.
118. Ржаницын, А. Р. Некоторые вопросы механики систем, деформирующихся во времени [Текст] / А. Р. Ржаницын – Л.: Гостехиздат, 1949. – 543 с.

119. Greenbaum, G. A. Creep analysis of axisymmetric bodies using finite elements [Текст] / G. A. Greenbaum, M. F. Rubinstein // Nuclear Engineering and Design. – 1968. – Т. 7. – №. 4. – С. 379-397.
120. Чуйко, В. М. Ползучесть и релаксация напряжений в пластине, нагружаемой по контуру круглого отверстия [Текст] / В. М. Чуйко, В. М. Ярушина // Прикладная механика и техническая физика. – 2005. – Т. 46. – №4. С. 146-153.
121. Буренин, А. А. Плоское напряженное состояние в условиях нелинейной неустановившейся ползучести [Текст] / А. А. Буренин, В. М. Ярушина // Дальневост. мат. журн. – 2002. – Т. 3. – № 1. – С. 64–78.
122. Банщикова, И. А. О ползучести пластин из алюминиевых сплавов при изгибе [Текст] / И. А. Банщикова, Б. В. Горев, И. Ю. Цвелодуб // Прикладная механика и техническая физика. – 2007. – Т. 48. – № 5. – С. 156-159.
123. Zhang, Y. X. Recent developments in finite element analysis for laminated composite plates [Текст] / Y. X. Zhang, C. H. Yang // Composite Structures. – 2009. – Т. 88. – С. 147-157.
124. Oliveira, B. F. Viscoelastic failure analysis of composite plates and shells [Текст] / B. F. Oliveira, G. J. Creus // Composite Structures. – 2000. – Т. 49. – №. 4. – С. 369-384.
125. Pavana, R. C. A model for anisotropic viscoelastic damage in composites [Текст] / R. C. Pavana, B. F. Oliveira, S. Maghousa, G. J. Creusa // Composite Structures. – 2010. – Т. 92. – С. 1223-1228.
126. Kim, K. D. A co-rotational 8-node assumed strain shell element for postbuckling analysis of laminated composite plates and shells [Текст] / K. D. Kim, G. R. Lomboy, S. C. Han. // Computational Mechanics. – 2003. – Т. 30 – С. 330-342.
127. Sidda Reddy, B. Bending analysis of laminated composite plates using finite element method [Текст] / B. Sidda Reddy [и др.] // International Journal of Engineering, Science and Technology. – 2012. – Т. 4 – С. 177-190.
128. Garrido M. et al. Creep behaviour of sandwich panels with rigid polyurethane foam core and glass-fibre reinforced polymer faces: Experimental tests and analytical modelling [Текст] // Journal of Composite Materials. – 2014. – Т. 48. – №. 18. – С. 2237-2249.
129. Sá, M. F. Creep behaviour of pultruded GFRP elements – Part 1: literature review and experimental study [Текст] / M. F. Sá // Compos Struct, – 2011. – Т. 93. – С. 2450– 2459.
130. Sá, M. F. Creep behaviour of pultruded GFRP elements – Part 2: analytical study [Текст] / M. F. Sá // Compos Struct. – 2011. – Т. 93. – С. 2409–2418.
131. Chen, Z. Flexural creep behaviour of sandwich panels containing Kraft paper honeycomb core and wood composite skins [Текст] / Z. Chen // Mater Sci Engg A. – 2011. – Т. 528. – С. 5621–5626.
132. Correia, J. GFRP sandwich panels with PU foam and PP honeycomb cores for civil engineering structural applications: Effects of introducing strengthening ribs [Текст] / J.

133. Correia // *Int J Struct Integrity*. – 2012. – Т. 3. – С. 127–147.
134. Du, Y. An experimental study of creep behavior of lightweight natural fiber-reinforced polymer composite/honeycomb core sandwich panels [Текст] / Y. Du, N. Yan, M. T. Kortschotb // *Composite Structures*. – 2013. – Т. 106. – С. 160-166.
135. Du, Y. Light-weight honeycomb core sandwich panels containing biofiber-reinforced thermoset polymer composite skins: Fabrication and evaluation [Текст] / Y. Du, N. Yan, M. T. Kortschot // *Composites Part B: Engineering*. – 2012. – Т. 43. – С. 2875-2882.
136. Устарханов, О. М. Расчёт параметров дискретного заполнителя в виде усеченной пирамиды [Текст] / О. М. Устарханов, Х. М. Муселемов, З. К. Акаева // *Вестник Дагестанского государственного технического университета. Технические науки*. – 2010. – № 3. – С. 96-102.
137. Устарханов О. М. Вопросы прочности трехслойных конструкций с регулярным дискретным заполнителем: дисс. ... д-ра техн. наук: 05.23.17, 05.23.01 [Текст] / Устарханов Осман Магомедович. – Ростов-на-Дону, 2000. – 400 с.
138. Устарханов, О. М. Напряженно-деформированное состояние трехслойной балки с сотовым заполнителем пирамидальной формы при статическом нагружении [Текст] / О. М. Устарханов, М. С. Алибеков, Т. О. Устарханов // *Вестник Даг. гос. тех. ун-та*. – 2013. – № 28. – С. 94-100.
139. Keller, T. Thermomechanical behavior of multifunctional GFRP sandwich structures with encapsulated photovoltaic cells [Текст] / T. Keller, A. P. Vassilopoulos, B. D. Manshadi // *J Compos Constr*, – 2010. – Т. 14. – С. 470–478.
140. Joshi, N. Deformation in viscoelastic sandwich composites subject to moisture diffusion [Текст] / N. Joshi, A. Muliana // *Compos Struct*. – 2010. – Т. 92. – С. 254–264.
141. Ramenazi, M. On the influence of temperature on the creep response of sandwich beams with a viscoelastic soft core [Текст] / M. Ramenazi, E. Hamed // *Proceedings of the 6th international composites conference (ACUN-6), Melbourne, 2012*. – С. 14-16.
142. Безоян, Э. К. К вопросу о напряжённом состоянии трёхслойной полой оболочки с учётом ползучести среднего слоя [Текст] / Э. К. Безоян // *Известия национальной академии наук Армении*. – 2013. – №4. – С. 23-28.
143. Саркисян, В. С. Об одном подходе к изучению напряженно-деформированного состояния нелинейных вязкоупругих оболочек и пластин с учетом поперечного сдвига [Текст] / В. С. Саркисян, Э. К. Безоян // *Мат. методи та фіз.-мех. поля*. – 2008. – № 2. – С. 171-174.
144. Кудин, А. В. Осесимметричный изгиб круглых и кольцевых трехслойных пластин с нелинейно-упругим заполнителем [Текст] / А. В. Кудин, С. В. Чопоров, С. И. Гоменюк // *Матем. моделирование*. – 2017. – Т. 29. – № 2. – С. 63–78.
145. Кулинич И.И., Клименко Е.С., Языев С.Б., Литвинов С.В. Продольный изгиб полимерного стержня с учетом начальных несовершенств / И.И. Кулинич, Е.С. Клименко, С.Б. Языев,

- С.В. Литвинов // «Строительство–2011»: материалы Международной научнопрактической конференции. — Ростов–н/Д: РГСУ, 2011. — С.159–161.
146. Козельская М.Ю., Чепурненко А.С., Литвинов С.В. Расчёт на устойчивость сжатых полимерных стержней с учётом температурных воздействий и высокоэластических деформаций // Научно-технический вестник Поволжья. 2013. №4. С.190-195.
  147. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем / А.С. Вольмир. — М.: Наука, 1975. — 984с.
  148. Чепурненко А. С, Андреев В. И., Языев Б. М. Энергетический метод при расчете на устойчивость сжатых стержней с учетом ползучести//Вестник МГСУ. №1 2013. С.101-108.
  149. Андреев, В. И. Некоторые задачи и методы механики неоднородных тел: монография [Текст] / В. И. Андреев. – М.: Издательство АСВ, 2002. – 288 с.
  150. Языев, Б. М. Нелинейная ползучесть непрерывно неоднородных цилиндров [Текст]: дис. канд. техн. наук: 01.02.04 / Языев Батыр Меретович. – М., 1990. – 171 с.
  151. Языев Б.М. Некоторые задачи и методы механики вязкоупругой полимерной среды: монография. — Ростов-н/Д: Рост. гос. строит. ун-т, 2009. — 208. с.
  152. Prandtl L. Kipperscheinungen. laugh. –Diss. der Univ. zu München. – 1899. – 75с.
  153. Харлаб, В. Д. Энергетическая теория нелинейной ползучести и длительной прочности хрупко разрушающихся материалов. Ч. 1. [Текст] / В. Д. Харлаб // Механика стержневых систем и сплошных сред: межвуз. тематич. сб. тр. / ЛИСИ. – Л., 1981. – Вып. 14 – С. 11 - 17.
  154. Никора, Н. И. Определение длительных критических нагрузок для сжатых полимерных стержней при нелинейной ползучести [Электронный ресурс] / Н. И. Никора, А. С. Чепурненко, С. В. Литвинов // Инженерный вестник Дона. – 2015. – №1. – Режим доступа: <http://ivdon.ru/ru/magazine/archive/n1p2y2015/2796>.
  155. Горохов, А.Ю. О перераспределении напряжений в ортотропной вязкоупругой пластинке в окрестности круглого включения / А.Ю. Горохов, Н.А. Труфанов //Вестник ПНИПУ. Механика. – 2011. – №1. – С. 170-182.
  156. Плуме, Э.З. Сравнительный анализ ползучести однонаправленных композитов, армированных волокнами различного типа / Э.З. Плуме // Механика композиционных материалов. – 1985. – № 3. – С. 431-436.
  157. Пластинки и оболочки из стеклопластиков. Учеб. пособие для вузов. / В.Л. Бажанов, И.И. Гольденблат, В.А. Копнов, А.Д. Пospelов, А.М. Синюков. – М.: Высшая школа, 1970 – 408 с.
  158. Findley, W.N. Beed R.M. Effect of Crosslinking on Hydrostatic Creep of Epoxy. [Текст] / – Polym. Eng. and Sci // – 1977. – V. 17. – № 12. – PP. 837-841.

159. Findley, W.N. Hydrostatic Creep of Solid Plastics. [Текст] / – Findley, W.N. Reed E.M., Stem P. // – J. Appl. Mech. – 1968. – V. 34, № 4. – PP. 895-904.
160. Findley, W.N. Effect of Crosslinking on Hydrostatic Creep of. [Текст] / – Findley W.N., Beed R.M. // – Polym. Eng. and Sci. – 1977. – V. 17. № 12. PP. 837-841.
161. Аскадский А.А. Расчет параметров релаксации напряжения первичных и вторичных полимеров в линейной и нелинейной областях механического поведения / А. А. Аскадский // Новые технологии. — 2009. — №3. — С.76–83.
162. Турусов, Р. А. Общее решение задачи об изгибе многослойной балки в рядах Фурье [Текст] / Р. А. Турусов, В. И. Андреев, Н. Ю. Цыбин // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. — 2017. — № 4. — С. 34–42..
163. Языев, Б.М. Выпучивание продольно сжатых стержней переменной жёсткости при ползучести / Б.М. Языев, В.И. Андреев // «Инженерный вестник Дона», — 2012, — №4. — URL: <http://ivdon.ru/magazine/archive/n4p2y2012/1259>.
164. Горбунов Б.Н. Расчет устойчивости стержней и арок при помощи последовательных приближений / Б.Н. Горбунов. — В кн.: Исслед. по теории сооружений. — М.— Л., 1936. — С.180–196.
165. Громов В.Г. К вопросу о решении граничных задач линейной вязкоупругости / В.Г. Громов // Механика полимеров. — 1967. — №6. — С.999–1008.
166. Cherpurnenko, A.S. Calculation of the Three-layer Shell Taking into Account Creep / A.S. Cherpurnenko, L.R. Mailyan, B.M. Yazyev // Procedia Engineering. – 2016. – Т. 165. – С.990 – 994.
167. Prandtl L. Kipperscheinungen. laugh. –Diss. der Univ. zu München. – 1899. – 75с.
168. Палий, О. М. Справочник по строительной механике корабля. Часть 2. Пластины. Теория пластичности и ползучести. Численные методы [Текст] / О. М. Палий. – Л.: Судостроение, 1982. – 464 с
169. Dudnik, A. E. Determining the rheological parameters of polyvinyl chloride, with change in temperature taken into account [Текст] / А. Е. Dudnik, А. S. Cherpurnenko, S. V. Litvinov // International Polymer Science and Technology. – 2017. – Т. 44. – С. 30-33.
170. Дудник, А. Е. Определение реологических параметров поливинилхлорида с учетом изменения температуры [Текст] / А. Е. Дудник, А. С. Чепурненко, С. В. Литвинов // Пластические массы. — 2016. — № 1–2. — С. 30–33.
171. Дудник, А. Е. Моделирование прочностных характеристик и прогнозирование несущей способности напорных труб из полиолефинов [Текст]: дис. ...канд. техн. наук: 02.00.06 /Дудник Анастасия Евгеньевна. — Нальчик, 2016. — 133 с.
172. Языев, С. Б. Определение реологических параметров полимерных материалов с использованием методов нелинейной оптимизации [Электронный ресурс] / С. Б. Языев,

- А. С. Чепурненко, С. В. Литвинов // Строительные материалы и изделия. — 2020. — Т. 3. — № 5. — С. 15–23. — URL: <http://bstujournals.ru/archives/10782> (дата обращения: 31.12.2020).
173. Соловьева, Е. В. Исследование релаксационных свойств первичного и вторичного поливинилхлорида [Текст] / Е. В. Соловьева, А. А. Аскадский, М. Н. Попова // Пластические массы. — 2013. — № 2. — С. 54–62.
174. Никора, Н. И. Продольный изгиб стержней переменной жесткости с учетом деформаций ползучести и температурных воздействий: дисс. ... канд. техн. наук: 05.23.17 / Н.И. Никора. — Махачкала, 2016. — 118 с.
175. Турусов, Р. А. Адгезионная механика: монография [Текст] / Р. А. Турусов. — 2е изд. — М.: НИУ МГСУ, 2016. — 232 с.
176. Языев, Б.М. Расчёт трёхслойной пластинки методом конечных элементов с учётом ползучести среднего слоя / Б.М. Языев, А.С. Чепурненко, С.В. Литвинов, С.Б. Языев // Вестник Дагестанского государственного технического университета. — 2014. — №2. — С.47-55.
177. Лазуркин, Ю. С. Механические свойства полимеров в стеклообразном состоянии [Текст]: дисс. ...дра. физ.матем. наук. — М.: Инт физических проблем им. С. И. Вавилова, 1954.
178. Журавлев А.А. Устойчивость плоской формы деформирования непризматических дощатоклеевых балок: дисс. ...канд. техн. наук: 05.23.01 / Журавлев Андрей Александрович. — Ростов-на-Дону, 1998. — 154с.
179. Литвинов, С. В., Труш, Л. И., Савченко, А. А., Языев, С. Б. Теоретическое исследование модифицированных упругих и высокоэластических параметров полиэтилена высокой плотности на основе экспериментальных кривых релаксации // Известия высших учебных заведений. Химия и химическая технология. — 2019. — Т. 62. — №. 5.
180. Чепурненко А. С., Чепурненко В. С., Савченко А. А. Конечно-элементное моделирование ползучести трехслойной пластины // Молодой исследователь Дона. — 2017. — №. 3 (6).
181. Karamisheva, A.A. Calculation of plane bending stability of beams with variable stiffness [Текст] / A.A. Karamisheva, S.B. Yazyev, A.A. Avakov // Procedia Engineering. — 2016. — Vol.150. — Pp. 1872-1877.
182. Шестериков С. А. О критерии устойчивости при ползучести // Прикладная математика и механика. 1959. Т. XXIII. Вып. 6. С. 1101-1106.
183. Хофф Н. Д. Выпучивание при высокой температуре // Сб. переводов "Механика". 1958. №6.
184. Hoff N. I. Creep buckling of plates and shells // Theor. and Appl. Mech, Berlin. 1973. С. 124-140.
185. Freudental A. M. The Inelastic Behavior of Engineering Materials and Structures. New York, 1950. 232 С.

186. Розенблюм В. И. Устойчивость сжатого стержня в состоянии ползучести // Инж. сб. т. 1954. №3. С. 95-99.
187. Desayi P. An approximate Solution of Creep Buckling of Two Hinged Long Columns Subject to Distributed Axial Load // Journ. of Aeron. Soc. of India, 1965. №3.
188. Bleich H. H. Nonlinear creep deformations of columns of rectangular cross section // Journal of Applied Mechfnics. Dec, 1959.
189. Поспелов И. И. Устойчивость сжато-изогнутых стержней при линейной ползучести // Строительная механика и расчёт сооружений. 1965. №5. С.45-50.
190. Zyczkowski M. Geometrically Non-Linear Creep Buckling of Bars // Archiwum mechaniki stosawancy. 1960. №3. С.58-63.
191. Distefano I. Creep Buckling of Slender Columns // I. of the Struct. Div, 1965. part 1, 91. №3. С.113-117.
192. Благоняжен В. Л. О поведении неоднородных сжатых стержней при ползучести // Изв. высш. уч. зав. Машиностроение. 1964. №8. С. 153-157.
193. Потапов В. Д. Численные методы расчёта стержневых систем, деформирующихся во времени: дисс. канд. техн. наук. М., 1967. 167 с.
194. Хофф Н. Д. Продольный изгиб и устойчивость // Сб. переводов "Механика". 1955., №3
195. Hoff N. I. Creep buckling of plates and shells // Theor. and Appl. Mech, Berlin. 1973. С. 124-140.
196. Кулинич И.И., Клименко Е.С., Языев С.Б., Литвинов С.В. Продольный изгиб полимерного стержня с учетом начальных несовершенств // «Строительство-2011»: материалы Международной научно-практической конференции. Ростов-н/Д: РГСУ, 2011. С. 159–161.
197. Потапов В. Д. Стохастические задачи устойчивости элементов конструкций, деформирующихся во времени: дисс. д-ра техн. наук. М., 1974. 384 с.
198. Турусов Р.А. Механические явления в полимерах и композитах (в процессе формирования) // дисс. ... докт. физ-мат. наук. — М., 1983. — 363. С
199. Кепман А. В., Макаренко И. В., Страхов В. Л. Экспериментальное исследование комплекса термохимических, теплофизических свойств и кинетики процесса отверждения полимерных композиционных материалов //Композиты и наноструктуры. – 2016. – Т. 8. – №. 4. – С. 251.
200. Euler L. Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes sive solution problematic isoperimetric lentissimo sensu accept / L. Euler // Lausanne et Genevae. — 1744. — С.245–250.
201. Euler L. Sur la force des colonnes / L. Euler // Memoires de L'Acad. Roy. des Sciences et Belles-Lettres de Berlin. — 1757. — Т.13. — С.252–282.



202. Lagrange I.L. Sur la figure des colonnes / I.L. Lagrange // Ouvres. Paris. — 1868. — Т.2. — С.125–170
203. Greenhill A.G. Determination of the greatest height consistent with stability that a vertical pole or mast can be made, and of the greatest height to which a tree of given proportions can grow / A.G. Greenhill // Proc. of the Cambridge Philos. Soc., Math., Math., Math, and Phys. Sciences. — 1881. — Т.4. — С.65–73.
204. Ясинский Ф.С. Избранные работы по устойчивости сжатых стержней / Ф.С.Ясинский. — М.— Л.: Гостехиздат, 1952. — 428с.
205. Lamarle M.S. Memoires sur la flexion du bois / M. S. Lamarle // Annales des trav. publ. de Belgique, — 1846. — Т.4. — С.5–36.
206. Cleosch R.F.A. Theorie der Elastizitat fester Korper / R.F.A. Cleosch // Leipzig. — 1862. — С.218–222.
207. Halphen C.H. Trait des fonctions elastiques et de leurs applications / C.H. Halphen. — Paris, 1888. — Ч.2. — С.192–236.
208. Максименко Ф. О. погрешностях, являющихся при употреблении приближительной формулы  $M = EI(d^2y) / (dx^2)$  / Ф.О. Максименко // Сб. института инж. пут. сообщ. — 1886. — Вып.5. — С.1–29.
209. Collignon E. Note sur la flexion des pieces droites comprimees / E. Collignon // Annales de pont et chaussees. — 1889. — Сер.6. — Т.17. — С.98–124.
210. Prandtl L. Kipperscheinungen. laugh. — Diss. der Univ. zu München. — 1899. — 75с.
211. Michell A.G.M. On the elastic stability of long beams under transverse forces / A.G.M. Michell // Pbilos. Mag. and J. of Sciences. — 1899. — Сер.5. — Т.48. — №292. — С.298–309.
212. Bryan G. On the stability of elastic systems. Proc, of the Cambridge Pbilos G. Bryan // Soc., Math. and Phys. Sciences. — 1888. — Т.6. — С.199–210.
213. Kirchhoff G. Uber das Gleichgewicht und die Bewegung eines lined lie h dtinnen elastiseben Stabes / G. Kirchhoff // J. fur die reine und angew. Math. — 1859. — С.285–313.
214. Southwell E.V. On the general theory of elastic stability / E.V. Southwell // Philos. Trans. of, of the Roy. Soc. of London. — 1913. — Сер.А. — Т.213. — №501. — С.187–244.
215. Mises R. Ausbiegung geinesauf Knicken beans pruebtен Stabes/R. Mises//Ztschr. furangew. Math. und Meeh. — 1924. — С.435–438.
216. Динник А.Н. Продольный изгиб / А.Н. Динник. — М.— Л.: ГОНТИ, 1939. — 238с.
217. Снитко Н.К. Устойчивость сжатых и сжатоизогнутых стержневых систем / Н.К. Снитко. — Л.— М.: Госстройиздат, 1956. — 207с.
218. Коробов А.П. Расчет стоек ступенчатой формы, нагруженных на границах ступеней продольными и поперечными силами, а также сосредоточенными изгибающими

- моментами / А.П. Коробов. — В кн.: Исслед. по теории сооружений. — М., 1954. — Вып.6. — С.61–70.
219. Макушин В.М. Приближенное исследование устойчивости стержней, сжатых распределенными продольными силами / В.М. Макушин. — В кн.: Расчеты на прочность. — М., 1964. — Вып.10. — С.173–210.
220. Смирнов А.Ф. Устойчивость и колебания сооружений / А.Ф. Смирнов — М.: Трансжеддориздат, 1958. — 571с.
221. Белоусов В.П. Устойчивость плоской формы изгиба стержней переменного поперечного сечения / В.П. Белоусов. — В кн.: Динамика твердого тела. — Алма-Ата, 1982. — С.17–25.
222. Vielsack P. Fine allgemeine Theorie der Stabilita von Gleichgewichtszustanden bei Staben / P. Vielsack // Ing. Arch. — 1976. — С.115–129.
223. Vielsack P. On the difference between lateral buckling by bending and by torsion / P. Vielsack // Ztschr. Angew. Math. and Meeh. — 1977. — С.196–197
224. Крылов А.Н. Собрание трудов / А.Н. Крылов. — М.— Л.: Издво АН СССР, 1937. — Т.5. — 574с.
225. Лейбензон Л.С. Неустойчивость направления вращательного бурения / Л.С. Лейбензон // Азерб. нефть. хоз-во. — 1922. — №8 (9). — С.67–72.
226. Линевский А. Роль направлений и удлинителей в проведении вертикальной скважины / А. Линевский // Азерб.нефть. хоз-во. — 1932. — №2 (122). — С.64–74.
227. Filon L.N.G. On an approximate solution for the bending of a beam of rectangular cross-section under any system of load with special reference to points of concentrated or discontinuous loading / L.N.G. Filon // Philos.Trans.of. of the Roy.Soc. of London. — 1903. — Сер.А. — Т.201. — №334. — С.65–155.
228. Лукаш П.А. К продольному изгибу стержней переменного сечения / П.А. Лукаш. — В кн.: Исслед. по теории сооружений, 1977. — Вып.23. — С.126–132.
229. Federhofer K. Berechnung der Auslenkung beam Kippen gerader Stable / K. Federhofer // Ztschr. fur angew. Math. und Meeh. — 1926. — С.43–48.
230. Federhofer K. Neue Beitrag zur Berechnung der Kipplasten gerader Stabe / K. Federhofer // S.-Ber. Akad.der Wises. in Wien. — 1951. — С.237–270.
231. Алексеев П.И. Решение некоторых задач устойчивости сжатых стержней и плоской формы изгиба балок: Автореф. дис. ...канд. техн. наук / Алексеев Петр Иванович. — Одесса, 1961. — 20 с.
232. Kirchhoff G. Uber das Gleichgewicht und die Bewegung eines lined lie h dtinnen elastiseben Stabes / G. Kirchhoff // J. fur die reine und angew. Math. — 1859. — С.285–313.
233. Броуде Б.М. Уточнение решения задачи Прандтля-Тимошенко Б.М. Броуде. — В кн.: Расчет пространств. конструкций, 1959. — Вып.5. — С.52–56.

234. Бахтин И.А. О продольном изгибе стержня переменной жесткости, шарнирно закрепленного на концах / И.А. Бахтин, В.К. Лубашевский // Прикл. анализ. — Воронеж, 1979, — С.15–23.
235. Дривинг А.Я. Анализ уравнений устойчивости плоской формы изгиба призматических стержней / А.Я. Дривинг. — В кн.: Исслед. по расчету строит, конструкций. Статика и динамика слож. мех. систем и строит. конструкций. — Д., 1979. — С.119–124.
236. Пятикрестовский К.П. Силовое сопротивление пространственных деревянных конструкций при кратковременных и длительных нагрузках: дис. ...дра техн. наук: 05.23.01 / Пятикрестовский Константин Пантелеевич. — М., 2011. — 320с
237. Чепурненко, А.С. Совершенствование методов расчета пластин и оболочек на силовые и температурные воздействия при нелинейной ползучести: дисс. ...докт. техн. наук: 05.23.17 / Чепурненко Антон Сергеевич. — Ростов–на–Дону, 2020. — 349с.
238. Языев, С. Б. Устойчивость стержней при ползучести с учетом начальных несовершенств: дисс. ...канд. техн. наук: 05.23.17 / Языев Сердар Батырович. — Ростов–на–Дону, 2010. — 162с.
239. Лапина, А.П. Расчет на устойчивость плоской формы изгиба балок прямоугольного сечения с учетом ползучести: дисс. ...канд. техн. наук: 2.1.9. / Лапина Анастасия Павловна. — Ростов–на–Дону, 2022. — 114с.
240. Савченко, А.А. Моделирование реологических процессов и прогнозирование прочностных характеристик пластин из полимерных и композитных материалов: дисс. ...канд. физ.- мат. наук: 2.1.9. / Савченко Андрей Андреевич. — Ростов–на–Дону, 2018. — 145с.
241. Аваков, А.А. Напряженно-деформированное состояние и устойчивость железобетонных арок с учетом нелинейной ползучести бетона: дисс. ...канд. техн. наук: 05.23.17, 05.23.01. / Аваков Артур Артурович. — Ростов–на–Дону, 2022. — 114с.
242. Приходько О. А., Манойлов В. В. Определение модуля нормальной упругости материала на основе преобразования Фурье акустических колебаний образца //Научное приборостроение. – 2009. – Т. 19. – №. 3. – С. 93-96.
243. ГОСТ 25095-82. Сплавы твердые спеченные. Метод определения модуля упругости (модуля Юнга).
244. Заявка РФ на изобретение 92012893/28, кл. МКИ G 01 N, 29/12, опубл. 20.08.95.
245. Ключев В.В. Приборы для неразрушающего контроля материалов изделий. М.: Машиностроение, 1986. 488 с.
246. Голоскоков Д. П. Построение базиса для одномерных краевых задач в системах символьных вычислений //Пространство, время и фундаментальные взаимодействия. — 2017. — №. 1. — С. 77-86.

247. Козельская, М.Ю. Продольный изгиб стержней из сетчатых и линейных полимеров при нелинейной ползучести: дисс. ...канд. техн. наук: 05.23.17, 05.23.05. / Козельская Мария Юрьевна. — Ростов-на-Дону, 2013. — 131с.
248. Никора Н. И. и др. Устойчивость полимерного стержня при ползучести с учетом дискретного спектра времен релаксации полимера //Научное обозрение. – 2016. – №. 4. – С. 40-43.

## 8 ПРИЛОЖЕНИЕ 1. (ПРОГРАММЫ РАСЧЕТА НА ЭВМ)

### Глава 2. Устойчивость решение в рядах

```

clc
clear variables;
Alpha=[0:0.1:3.1 pi];
Beta=zeros(1,length(Alpha));
for i=1:length(Alpha)
    Beta(i)=fzero(@(beta) funD(Alpha(i),beta),0);
end
Alpha=Alpha'
Str='Beta=\n';
for i=1:length(Beta)
    Str=[Str num2str(Beta(i),8) ' \n '];
end
sprintf(Str)
plot(Alpha,Beta);
    Подпрограмма для закрепления «шарнир-шарнир»
function fun=funD(alpha,beta)
%коэффициент k1
kmax=40;%
A=zeros(1,kmax);
A(1)=1;
A(3)=-alpha^2/6;
L1=6*A(3);
for k=4:kmax
    A(k)=1/k/(k-1)*(-alpha^2*A(k-2)-beta^3*(k-3)/(k-2)*A(k-3));
    L1=L1+(k-1)*k*A(k);
end
k1=sum(A);
%коэффициент k2
A=zeros(1,kmax);
A(3)=-1/6;
Lr=6*A(3);
for k=4:kmax
    A(k)=1/k/(k-1)*(-alpha^2*A(k-2)-beta^3*(k-3)/(k-2)*A(k-3));
    Lr=Lr+(k-1)*k*A(k);
end
kr=sum(A);
fun=k1*Lr-kr*L1;
    Свободный край-зашемление
clc
clear variable
% Свободный край- Зашемление
alfa = [0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1 1.1 1.2 1.3 1.4
1.5 1.570796];
beta = [1.986352 1.983814 1.976153 1.963228 1.944792 1.920458
1.889746...
1.851885 1.805881 1.750319 1.683150 1.601280 1.499668
1.369223...

```

```

1.190215 0.899327 0];

a0 = -1.487e+11;
a1 = 2.32e+11;
b1 = 1.29e+11;
a2 = -9.923e+10;
b2 = -1.598e+11;
a3 = 5.038e+09;
b3 = 1.046e+11;
a4 = 1.993e+10;
b4 = -4.028e+10;
a5 = -1.182e+10;
b5 = 8.153e+09;
a6 = 3.206e+09;
b6 = -3.106e+08;
a7 = -4.158e+08;
b7 = -1.811e+08;
a8 = 1.834e+07;
b8 = 2.398e+07;
w = 0.3333;

% f(x) =
%
%      a0 + a1*cos(x*w) + b1*sin(x*w) +
%      a2*cos(2*x*w) + b2*sin(2*x*w) + a3*cos(3*x*w) +
b3*sin(3*x*w) +
%      a4*cos(4*x*w) + b4*sin(4*x*w) + a5*cos(5*x*w) +
b5*sin(5*x*w) +
%      a6*cos(6*x*w) + b6*sin(6*x*w) + a7*cos(7*x*w) +
b7*sin(7*x*w) +
%      a8*cos(8*x*w) + b8*sin(8*x*w)
bBelous = zeros(1,length(alfa));
bFurie = zeros(1,length(alfa));

for i = 1:length(alfa)
    bBelous(i) = ((0.25*3.14159^2-alfa(i)^2)/0.315)^(1/3);
    x= alfa(i);
    bFurie(i) = a0 + a1*cos(x*w) + b1*sin(x*w) + ...
        a2*cos(2*x*w) + b2*sin(2*x*w) + a3*cos(3*x*w) +
b3*sin(3*x*w) + ...
        a4*cos(4*x*w) + b4*sin(4*x*w) + a5*cos(5*x*w) +
b5*sin(5*x*w) + ...
        a6*cos(6*x*w) + b6*sin(6*x*w) + a7*cos(7*x*w) +
b7*sin(7*x*w) + ...
        a8*cos(8*x*w) + b8*sin(8*x*w);
end;

disp(bBelous);

disp(bFurie);
plot(alfa,bBelous,'r--','LineWidth',1)
hold on
%plot(alfa,bFurie(i),'g','LineWidth',2)
plot(alfa,beta,'b','LineWidth',1)

```

```

xlabel('\alpha')
ylabel('\beta')
grid on
hold off
legend('(\alpha^2+0.315\beta^3=0.25\pi^2)', 'authors');

```

**Модуль расчета при распределении температуры в поперечном сечении стержня**

```

clc;
clear all;
l=157;
b=15;
h=8;
t=55;
nx=50;
dx=l/nx;
f0=0.16;
t1=0; t2=3600*80;
nt=50;
dt=(t2-t1)/nt;
I=b*h^3/12;
ny=100;
dy=h/ny;
E=zeros(1,ny+1);
Eb=zeros(1,ny+1);
mz=zeros(1,ny+1);
n0=zeros(1,ny+1);
T=zeros(1,ny+1);
T1=20;T2=30;
T0=(T1+T2)/2;
alpha=10^-5;
A=-1.4;
BB=322;
for i=1:ny+1
y=(i-1)*dy-h/2;
T(i)=(T2-T1)/h*y+(T1+T2)/2;
E(i)=A*T(i)+BB;
Eb(i)=-3*T(i)+310;
mz(i)=-0.00135*T(i)+0.480;
n0(i)=3600*exp(9500/(T(i)+273.15)-20);
143
end
Em=E(ny/2+1);
B=[
0 0
0 0 0
1 1 0 0 0
0 0
-3/dx^2 -2/dx 0 3/dx^2 -1/dx 0
2/dx^3 1/dx^2 0 -2/dx^3 1/dx^2 0];
Bz=[0 0 -1/dx 0 0 1/dx];
Kt=Em*I*[12/dx^3 6/dx^2 0 -12/dx^3 6/dx^2 0

```

```

6/dx^2 4/dx 0
0 0 0 0 0 0
-12/dx^3 -6/dx^2 0 12/dx^3 -6/dx^2
0
6/dx^2
0 0 0 0 0 0];
Kt=Kt-F*[6/5/dx 1/10 0 -6/5/dx
1/10 2*dx/15 0 -1/10
0 0 0 0 0 0
-6/5/dx -1/10 0 6/5/dx -1/10 0
1/10
0 0 0 0 0 0];
Kt=Kt+Em*b*h*dx*Bz'*Bz+2*(B'*[0;0;2*dx;3*dx^2]*Bz)*A*I*(T2-
T1)/h;
K=sparse(3*(nx+1), 3*(nx+1));
for j=1:nx
for k=1:6
for m=1:6
K(3*j-3+k, 3*j-3+m)=K(3*j-3+k, 3*j-3+m)+Kt(k,m);
end
end
end
K(1,1:3*(nx+1))=0; K(1:3*(nx+1),1)=0;
K(3*nx+1,1:3*(nx+1))=0;
K(1:3*(nx+1),3*nx+1)=0;
K(1,1)=1;
K(3*nx+1, 3*nx+1)=1;
K(3*nx+3,1:3*(nx+1))=0;
K(1:3*(nx+1), 3*nx+3)=0;
K(3*nx+3, 3*nx+3)=1;
P=sparse(1, 3*(nx+1));
sigma=zeros(nt+1, nx, ny+1);
ez=zeros(nx, ny+1);
144
for i=1:nt+1
t=(i-1)*dt;
P=sparse(1, 3*(nx+1));
for j=1:nx
Xi=(j-1)*dx; Xj=Xi+dx;
Pe=F*f0*B'*[0
sin(pi*Xj/l)-sin(pi*Xi/l)
2*l/pi*(cos(pi*Xj/l)-cos(pi*Xi/l))+2*dx*sin(pi*Xj/l)
6*dx*l/pi*cos(pi*Xj/l)+6*l^2/pi^2*(sin(pi*Xi/l)
-sin(pi*Xj/l))+3*dx^2*sin(pi*Xj/l)];
Pe=Pe-alpha*I*Em*(T2-T1)/h*[0;-1;0;0;1;0];
I1=b*E(1)*ez(j,1)/2*(-h/2)*dy;
I1=I1+E(ny+1)*b*ez(j,ny+1)/2*(h/2)*dy;
I2=b*E(1)*ez(j,1)/2*dy;
I2=I2+E(ny+1)*b*ez(j,ny+1)/2*dy;
for k=2:ny
y=(k-1)*dy-h/2;
I1=I1+b*E(k)*ez(j,k)*y*dy;

```



```

I2=I2+b*E(k)*ez(j,k)*dy;
end
Pe=Pe-I1*[0;-1;0;0;1;0];
Pe=Pe+dx*Bz'*A*alpha*((T2-T1)/h)^2*I+Bz'*dx*I2;
for k=1:6
P(3*j-3+k)=P(3*j-3+k)+Pe(k);
end
end
P(1)=0; P(3*nx+1)=0; P(3*nx+3)=0; P(3)=P(3)+F;
U=K\P';
X=zeros(nx+1);
for j=1:nx+1
V(i,j)=U(3*j-2); X(j)=V(i,j);
end
for j=1:nx
u=[U(3*j-2);U(3*j-1);U(3*j);U(3*j+1);U(3*j+2);U(3*j+3)];
V_=[0 0 2 3*dx]*B*u;
e0=Bz*u;
for k=1:ny+1
y=(k-1)*dy-h/2;
sigma(i,j,k)=E(k)*(-y*V_-ez(j,k)-alpha*(T(k)-T0)+e0);
145
end
end
for j=1:nx
for k=1:ny+1
fz=sigma(i,j,k)-Eb(k)*ez(j,k);
ez_=fz/n0(k)*exp(abs(fz/mz(k)));
if i~=nt+1
ez(j,k)=ez(j,k)+ez_*dt;
end
end
end
end
end
%График V(x)
buf=true;
imax=nt+1;
for i=1:nt+1
if buf==true
xX=1/2; j=fix(xX/dx+1);
if i<nt+1
if V(i+1,j)>1/10
buf=false;
imax=i;
end
end
for j=1:nx+1
Xx(i,j)=(j-1)*dx;
time(i,j)=(i-1)*dt/3600;
VV(i,j)=V(i,j);
end
end
end
end

```

```

x_ =1/2;
j=x_/dx+1;
for i=1:imax
for k=1:ny+1
sigm(i,k)=sigma(i,j,k);
Time(i,k)=(i-1)*dt;
Y(i,k)=-h/2+(k-1)*dy;
end
146
end
figure;
surf(Xx,time,VV);
figure;
surf(Time/3600,Y,sigm*10);
time(imax-1,1)
Модуль оптимизации ширины сечения стержня
%Расчет методом Галеркина без эксцентриситета
clc;
clear all;
l=157; b=15; h=8;
F=50;%30
E=295; Eb=315; mz=0.35; n0=10^9; I=b*h^3/12; nx=100;
dx=l/nx; f0=0.16;
KK=1/dx*[1,-1;-1,1]-F*dx/6/E/I*[2,1;1,2];
t1=0; t2=3600*17; nt=50;
dt=(t2-t1)/nt;
K=sparse(nx+1, nx+1);
P=sparse(1,nx+1);
ny=100; dy=h/ny;
%упругое решение
for i=1:nx
Xi=(i-1)*dx; Xj=i*dx;
K(i,i)=K(i,i)+KK(1,1);
K(i,i+1)=K(i,i+1)+KK(1,2);
K(i+1,i)=K(i+1,i)+KK(2,1);
K(i+1,i+1)=K(i+1,i+1)+KK(2,2);
Pe=F*f0/E/I*[l^2/pi^2/dx*(sin(pi*Xi/l)-sin(pi*Xj/l))
+1/pi*cos(pi*Xi/l);l^2/pi^2/dx*(sin(pi*Xj/l)
-sin(pi*Xi/l))-1/pi*cos(pi*Xj/l)];
P(i)=P(i)+Pe(1);
P(i+1)=P(i+1)+Pe(2);
end
%Накладываем гран. условия
K(1,1)=1; P(1)=0;
for i=2:nx+1
K(1,i)=0; K(i,1)=0;
end
147
K(nx+1,nx+1)=1; P(nx+1)=0;
for i=1:nx
K(nx+1,i)=0; K(i,nx+1)=0;
end
X=K\P';

```

```

V=zeros(nt+1, nx+1);
for i=1:nx+1
V(1,i)=X(i);
end
ez=zeros(nt+1, nx+1, ny+1);
ez_=zeros(nt+1, nx+1, ny+1);
for i=1:nx+1
for j=1:ny+1
ez(1, i, j)=0;
end
end
%Вторая производная прогиба
V_=fd2DET5(X, dx);
%Вычисляем напряжения
sigma=zeros(nt+1, nx+1, ny+1);
for i=1:nx+1
for j=1:ny+1
y=(j-1)*dy-h/2;
sigma(1, i, j)=E*(F/E/b/h+y*V_(i));
fz=sigma(1, i, j)-Eb*ez(1, i, j);
ez_(1, i, j)=fz/n0*exp(abs(fz/mz));
if i~=nt+1
ez(2, i, j)=ez(1, i, j)+ez_(1, i, j)*dt;
end
end
end
for i=2:nt+1
t=(i-1)*dt;
P=sparse(1, nx+1);
for j=1:nx
Xi=(j-1)*dx;
Xj=j*dx;
Pe=F*f0/E/I*[1^2/pi^2/dx*(sin(pi*Xi/l)-sin(pi*Xj/l))+
1/pi*cos(pi*Xi/l);1^2/pi^2/dx*(sin(pi*Xj/l)
148
-sin(pi*Xi/l))-1/pi*cos(pi*Xj/l)];
I1=b/I*ez(i, j, 1)/2*(-h/2)*dy;
I1=I1+b/I*ez(i, j, ny+1)/2*(h/2)*dy;
for k=2:ny
y=(k-1)*dy-h/2;
I1=I1+b/I*ez(i, j, k)*y*dy;
end
Pe=Pe-I1*dx/2*[1;1];
P(j)=P(j)+Pe(1);
P(j+1)=P(j+1)+Pe(2);
end
X=K\P';
for j=1:nx+1
V(i, j)=X(j);
end
%Вторая производная прогиба
V_=fd2DET5(X, dx);
e0=zeros(nx+1);

```

```

for j=1:nx+1
e0(j)=F/E/b/h;
e0(j)=e0(j)+1/h*ez(i,j,1)/2*dy;
e0(j)=e0(j)+1/h*ez(i,j,ny+1)/2*dy;
for k=2:ny
e0(j)=e0(j)+1/h*ez(i,j,k)*dy;
end
end
%Вычисляем напряжения
for j=1:nx+1
for k=1:ny+1
y=(k-1)*dy-h/2;
sigma(i,j,k)=E*(e0(j)+y*V_(j)-ez(i,j,k));
end
end
for j=1:nx+1
for k=1:ny+1
fz=sigma(i,j,k)-Eb*ez(i,j,k);
ez_(i,j,k)=fz/n0*exp(abs(fz/mz));
if i~=nt+1
ez(i+1,j,k)=ez(i,j,k)+ez_(i,j,k)*dt;
149
end
end
end
end
%График V(x)
buf=true;
imax=nt+1;
for i=1:nt+1
if buf==true
xX=1/2;
j=fix(xX/dx+1);
if i<nt+1
if V(i+1,j)>1/10
buf=false;
imax=i;
end
end
for j=1:nx+1
Xx(i,j)=(j-1)*dx;
time(i,j)=(i-1)*dt/3600;
VV(i,j)=V(i,j);
end
end
end
x_=1/2;
j=x_/dx+1;
for i=1:imax
for k=1:ny+1
sigm(i,k)=sigma(i,j,k);
Time(i,k)=(i-1)*dt;
Y(i,k)=-h/2+(k-1)*dy;

```

```

end
end
figure;
surf(Xx,time,VV);
figure;
surf(Time,Y,sigm);
time(imax-1,1)
150

```

2.5 Влияния температуры на устойчивость стержней переменной жесткости в условиях вязкоупругости

```

%Стержень из ЭДТ-10, выпучивание при равномерном нагреве
clc;
clear all;
l=300;%длина стержня, мм
d=10;%диаметр стержня, мм
v=11;%скорость нагрева, град/час
nx=50;%количество интервалов по x
dx=l/nx;%шаг по x
t1=0;%начальный момент времени
t2=3600*6;%конечный момент времени
nt=200;%количество шагов по времени
dt=(t2-t1)/nt;%шаг по времени
V=zeros(nt+1,nx+1);%значения прогибов V(t,x)
time=zeros(nt+1,nx+1);%матрица для графиков
f0=0.16;%начальная погибь, мм
ny=50;%количество интервалов по y
dy=d/ny;%шаг по y
ez=zeros(nt+1,nx+1,ny+1);%значения деформации ползучести
sigma=zeros(nt+1,nx+1,ny+1);%значения напряжений
T0=0;
A=pi*d^2/4;
I=pi*d^4/64;
for i=1:nt+1
    t=(i-1)*dt;
    T=T0+v*t/3600;
    dT=T-T0;
    E=-1.75*T+352.5;%модуль упругости, кг/мм2
    Eb=-3*T+315;%Модуль высокоэластичности
    mz=-0.0011*T+0.475;%модуль скорости
    n0=3600*exp(9500/(T+273.15)-20);%начальная релаксационная
    вязкость
    alpha=10^(-5);
    %Вычисляем продольную силу
    j=nx/2+1;
    N=E*A*alpha*dT;
    for k=2:ny
        y=-d/2+(k-1)*dy;
        N=N-2*E*ez(i,j,k)*(d^2/4-y^2)^0.5*dy;
    end
    matr=zeros(nx+1,nx+1);%матрица коэф-тов
    %формирование матрицы коэф-тов:

```

```

matr(1,1)=1;
matr(nx+1,nx+1)=1;
for j=2:nx
    matr(j,j)=-2/dx^2*E*I+N;
    matr(j,j+1)=1/dx^2*E*I;
    matr(j,j-1)=1/dx^2*E*I;
end
svob=zeros(1,nx+1);
svob(1)=0;
svob(nx+1)=0;
for j=2:nx
    x=(j-1)*dx;
    svob(j)=-N*f0*sin(pi*x/l);
    for k=2:ny
        y=-d/2+(k-1)*dy;
        svob(j)=svob(j)+2*E*ez(i,j,k)*y*(d^2/4-y^2)^0.5*dy;
    end
end
X=matr\svob';
for j=1:nx+1
    V(i,j)=X(j);
end
%Вторая производная прогиба
V_ =fd2DET5(X,dx);
%Вычисляем напряжения
for j=1:nx+1
    for k=1:ny+1
        y=-d/2+(k-1)*dy;
        sigma(i,j,k)=E*(alpha*dt+y*V_(j)-ez(i,j,k));
        fz=sigma(i,j,k)-Eb*ez(i,j,k);
        ez_ =fz/n0*exp(abs(fz/mz));
        ez(i+1,j,k)=ez(i,j,k)+ez_*dt;
    end
    time(i,j)=t;
    XX(i,j)=(j-1)*dx;
end
time2(i)=t;
Vmax(i)=max(abs(X));
end
%figure;
plot(time2/3600, Vmax, 'k');
hold on

```

### Глава 3. Вращение + собственный вес (Защемление-Защемление)

```

clc
clear variable
% "ЗАЩЕМЛЕНИЕ-ЗАЩЕМЛЕНИЕ"

beta = [0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1.0 1.1 1.2 1.3
1.4 1.5 1.6 1.7 1.8 1.9 2.0 2.1 2.2 2.3 2.4...
2.5 2.6 2.7 2.8 2.9 3.0 3.1 3.2 3.3 3.4 3.5 3.6 3.7 3.8
3.9 4.0 4.1 4.2 4.210175];

```

```

gamma = [4.730041 4.730023 4.729922 4.729645 4.729108 4.728217
4.726896 4.725041 4.722576 4.719401 4.715427...
4.710554 4.704680 4.697712 4.689406 4.680051 4.669062 4.656630
4.642437 4.626379 4.608316 4.588034...
4.565386 4.540033 4.511933 4.480604 4.445740 4.407039 4.363960
4.315970 4.262404 4.202454 4.135092...
4.058989 3.972412 3.873019 3.757454 3.620883 3.455904 3.248373
2.971196 2.549062 1.416523 0.0];

a0 = -1.487e+11;
a1 = 2.32e+11;
b1 = 1.29e+11;
a2 = -9.923e+10;
b2 = -1.598e+11;
a3 = 5.038e+09;
b3 = 1.046e+11;
a4 = 1.993e+10;
b4 = -4.028e+10;
a5 = -1.182e+10;
b5 = 8.153e+09;
a6 = 3.206e+09;
b6 = -3.106e+08;
a7 = -4.158e+08;
b7 = -1.811e+08;
a8 = 1.834e+07;
b8 = 2.398e+07;
w = 0.3333;

% f(x) =
%
% a0 + a1*cos(x*w) + b1*sin(x*w) +
% a2*cos(2*x*w) + b2*sin(2*x*w) + a3*cos(3*x*w) +
b3*sin(3*x*w) +
% a4*cos(4*x*w) + b4*sin(4*x*w) + a5*cos(5*x*w) +
b5*sin(5*x*w) +
% a6*cos(6*x*w) + b6*sin(6*x*w) + a7*cos(7*x*w) +
b7*sin(7*x*w) +
% a8*cos(8*x*w) + b8*sin(8*x*w)
gBelous = zeros(1,length(betta));

bFurie = zeros(1,length(betta));

% Цикл для варианта "ЗАЩЕМЛЕНИЕ-ЗАЩЕМЛЕНИЕ"

for i = 1:length(betta)
gBelous(i) = ((74.63-betta(i)^3)/0.149)^(1/4);
x= betta(i);
end;

for i = 1:length(betta)
bFurie(i) = a0 + a1*cos(x*w) + b1*sin(x*w) + ...
a2*cos(2*x*w) + b2*sin(2*x*w) + a3*cos(3*x*w) +
b3*sin(3*x*w) + ...

```

```

        a4*cos(4*x*w) + b4*sin(4*x*w) + a5*cos(5*x*w) +
b5*sin(5*x*w) + ...
        a6*cos(6*x*w) + b6*sin(6*x*w) + a7*cos(7*x*w) +
b7*sin(7*x*w) + ...
        a8*cos(8*x*w) + b8*sin(8*x*w);
    end;

disp(gBelous);

disp(gBelous);
plot(beta,gBelous,'r','LineWidth',2)
hold on
%plot(alfa,bFurie(i),'g','LineWidth',2)
plot(beta,gamma,'b--','LineWidth',2)
xlabel('\beta')
ylabel('\gamma')
grid on
hold off
legend('(\beta^3+0.149\gamma^4=74,63','authors');

```

### Глава 3. Боковое выпучивание стержня.

```

clc
clear variable

% Шарнир -- защемление

    alfa= [0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9 1 1.1 1.2 1.3 1.4
1.5 1.6 1.7 1.8 1.9 2.0 2.0031471];
    beta= [1.859231 1.857876 1.853421 1.846104 1.835738 1.822205
1.805336 1.784910 1.760642 1.732162...
1.698995 1.660515 1.615894 1.564004 1.503251 1.431290 1.344423
1.236259 1.093883 0.882341...
0.278775 0];

    a0 = -1.487e+11;
    a1 = 2.32e+11;
    b1 = 1.29e+11;
    a2 = -9.923e+10;
    b2 = -1.598e+11;
    a3 = 5.038e+09;
    b3 = 1.046e+11;
    a4 = 1.993e+10;
    b4 = -4.028e+10;
    a5 = -1.182e+10;
    b5 = 8.153e+09;
    a6 = 3.206e+09;
    b6 = -3.106e+08;
    a7 = -4.158e+08;
    b7 = -1.811e+08;
    a8 = 1.834e+07;
    b8 = 2.398e+07;
    w = 0.3333;

% f(x) =

```



```

%          a0 + a1*cos(x*w) + b1*sin(x*w) +
%          a2*cos(2*x*w) + b2*sin(2*x*w) + a3*cos(3*x*w) +
b3*sin(3*x*w) +
%          a4*cos(4*x*w) + b4*sin(4*x*w) + a5*cos(5*x*w) +
b5*sin(5*x*w) +
%          a6*cos(6*x*w) + b6*sin(6*x*w) + a7*cos(7*x*w) +
b7*sin(7*x*w) +
%          a8*cos(8*x*w) + b8*sin(8*x*w)
gBelous = zeros(1,length(alfa));

bFurie = zeros(1,length(alfa));

% Цикл для варианта СТЕРЖЕНЬ-ЗАЩЕМЛЕНИЕ"

for i = 1:length(alfa)
    gBelous(i) = ((4.01-alfa(i)^2)/0.626)^(1/3)
    x= alfa(i)
end;

for i = 1:length(alfa)
    bFurie(i) = a0 + a1*cos(x*w) + b1*sin(x*w) + ...
        a2*cos(2*x*w) + b2*sin(2*x*w) + a3*cos(3*x*w) +
b3*sin(3*x*w) + ...
        a4*cos(4*x*w) + b4*sin(4*x*w) + a5*cos(5*x*w) +
b5*sin(5*x*w) + ...
        a6*cos(6*x*w) + b6*sin(6*x*w) + a7*cos(7*x*w) +
b7*sin(7*x*w) + ...
        a8*cos(8*x*w) + b8*sin(8*x*w);
end;

disp(gBelous);

disp(bFurie);
plot(alfa,gBelous,'r','LineWidth',2)
hold on
%plot(alfa,bFurie(i),'g','LineWidth',2)
plot(alfa,betta,'b--','LineWidth',2)
xlabel('gamma')
ylabel('betta')
grid on
hold off
legend('Решение автора','Исходные данные');

```

### Глава 3

#### Расчет деревянной балки прямоугольного сечения на боковое выпучивание с учетом ползучести

```

clc
clear variables
b=5;%ширина сечения, см
h=15;%высота сечения, см
%Осевые моменты инерции
Iz=b^3*h/12;

```

```

Iy=b*h^3/12;
E=1.48e3;%Модуль упругости, кН/см2
G=50;%Модуль сдвига,кН/см2
El=1e3;%Длительный модуль упругости
Gl=33.8;%Длительный модуль сдвига
n=18; %Время релаксации, сут
l=300;%Длина балки, см
ny=10;%количество интервалов по y
nz=30;%количество интервалов по z
dy=b/ny;%шаг по y
dz=h/nz;%шаг по z
P=1.25;%Нагрузка, кН
e=0.04;%Эксцентриситет,см
nx=20;%количество интервалов по x
dx=l/nx;%шаг по x
t=200; %Время, сут
nt=100;%количество отрезков по времени
dt=t/nt;%шаг по времени
%Определение крутильной жесткости
ind=zeros(ny+1,nz+1);
k=1;
for i=1:ny+1
    for j=1:nz+1
        ind(i,j)=k;
        k=k+1;
    end
end
Matr=zeros((ny+1)*(nz+1),(ny+1)*(nz+1));
Svob=zeros(1,(ny+1)*(nz+1));
for i=1:ny+1
    for j=1:nz+1
        if i~=1&&j~=1&&i~=ny+1&&j~=nz+1
            k=ind(i,j);
            Matr(k,k)=-2/dy^2-2/dz^2;
            k1=ind(i+1,j);
            Matr(k,k1)=1/dy^2;
            k1=ind(i-1,j);
            Matr(k,k1)=1/dy^2;
            k1=ind(i,j-1);
            Matr(k,k1)=1/dz^2;
            k1=ind(i,j+1);
            Matr(k,k1)=1/dz^2;
            Svob(k)=-2;
        else
            k=ind(i,j);
            Matr(k,k)=1;
            Svob(k)=0;
        end
    end
end
Fi=Matr\Svob';
Ik=0;
for i=1:ny+1
    for j=1:nz+1
        y=-b/2+(i-1)*dy;
        z=-h/2+(j-1)*dz;
        Ik=Ik+Fi(ind(i,j))*2*dy*dz;
    end
end

```

```

end
Pkr=4.01/1^2*(G*Ik*E*Iz)^0.5;%Мгновенная критическая нагрузка
Pdl=4.01/1^2*(Gl*Ik*El*Iz)^0.5;%Длительная критическая нагрузка
Tmax=zeros(1,nt+1);
Mkr=zeros(1,nx+1);
Mkr_=zeros(1,nx+1);
Mz=zeros(1,nx+1);
My=zeros(1,nx+1);
gamma_zx=zeros(nx+1,ny+1,nz+1);
gamma_yx=zeros(nx+1,ny+1,nz+1);
tau_yx=zeros(nx+1,ny+1,nz+1);
tau_zx=zeros(nx+1,ny+1,nz+1);
gamma_yx=zeros(nx+1,ny+1,nz+1);
gamma_zx=zeros(nx+1,ny+1,nz+1);
ez=zeros(nx+1,ny+1,nz+1);
sigma=zeros(nx+1,ny+1,nz+1);
tau_yx_max=zeros(1,nt+1);
tau_zx_max=zeros(1,nt+1);
smax=zeros(1,nt+1);
for it=1:nt+1
    matr=zeros(nx+1,nx+1);
    svob=zeros(nx+1,1);
    matr(1,1)=1;
    Mkr_=dif(Mkr,dx);
    for i=2:nx
        x=(i-1)*dx;
        matr(i,i)=-2/dx^2*G*Ik+P^2*(1-x)^2/E/Iz;
        matr(i,i-1)=1/dx^2*G*Ik;
        matr(i,i+1)=1/dx^2*G*Ik;
        svob(i)=Mkr_(i)+P*(1-x)/E/Iz*Mz(i);
    end
    matr(nx+1,nx-1)=1/2/dx;
    matr(nx+1,nx)=-2/dx;
    matr(nx+1,nx+1)=3/2/dx;
    svob(nx+1)=(P*e+Mkr(nx+1))/G/Ik;
    Theta=matr\svob;
    Tmax(it)=max(abs(Theta));
    Theta_=dif(Theta,dx);
    %Определение напряжений
    Mkr=zeros(1,nx+1);
    My=zeros(1,nx+1);
    Mz=zeros(1,nx+1);
    for i=1:nx+1
        x=(i-1)*dx;
        V_=(P*(1-x)*Theta(i)-Mz(i))/E/Iz;
        W_=(-P*(1-x)-My(i))/E/Iy;
        Svob=zeros(1,(ny+1)*(nz+1));
        for j=2:ny
            for k=2:nz
                m=ind(j,k);
                Svob(m)=-2*G*Theta_(i)+G*(gamma_zx_(i,j,k)-gamma_yx_(i,j,k));
            end
        end
        end
        fi=Matr\Svob';
        Fi=zeros(ny+1,nz+1);
        for j=1:ny+1
            for k=1:nz+1
                Fi(j,k)=fi(ind(j,k));
            end
        end
    end
end

```

```

end
end
%Определение напряжений и деформаций ползучести`
for j=1:ny+1
    for k=1:nz+1
        if k~=1&&k~=nz+1
            tau_yx(i,j,k)=(Fi(j,k+1)-Fi(j,k-1))/2/dz;
        elseif k==1
            tau_yx(i,j,k)=(-3*Fi(j,k)+4*Fi(j,k+1)-Fi(j,k+2))/2/dz;
        else
            tau_yx(i,j,k)=(3*Fi(j,k)-4*Fi(j,k-1)+Fi(j,k-2))/2/dz;
        end
        if j~=1&&j~=ny+1
            tau_zx(i,j,k)=-(Fi(j+1,k)-Fi(j-1,k))/2/dy;
        elseif j==1
            tau_zx(i,j,k)=-(-3*Fi(j,k)+4*Fi(j+1,k)-Fi(j+2,k))/2/dy;
        else
            tau_zx(i,j,k)=- (3*Fi(j,k)-4*Fi(j-1,k)+Fi(j-2,k))/2/dy;
        end
        y=-b/2+(j-1)*dy;
        z=-h/2+(k-1)*dz;
        sigma(i,j,k)=-E*(y*V_+z*W_+ez(i,j,k));
        ez(i,j,k)=ez(i,j,k)+(1/n/E*((1-E1/E)*sigma(i,j,k)-
E1*ez(i,j,k)))*dt;
        gamma_yx(i,j,k)=gamma_yx(i,j,k)+(1/n/G*((1-
G1/G)*tau_yx(i,j,k)-G1*gamma_yx(i,j,k)))*dt;
        gamma_zx(i,j,k)=gamma_zx(i,j,k)+(1/n/G*((1-
G1/G)*tau_zx(i,j,k)-G1*gamma_zx(i,j,k)))*dt;

        if j~=1&&k~=1&&j~=ny+1&&k~=nz+1
            delt=dy*dz;
        elseif or(j==1&&k==1,j==ny+1&&k==nz+1)
            delt=dy*dz/4;
        elseif or(j==1&&k==nz+1,j==ny+1&&k==1)
            delt=dy*dz/4;
        else
            delt=dy*dz/2;
        end
        Mkr(i)=Mkr(i)+G*(-
gamma_yx(i,j,k)*z+gamma_zx(i,j,k)*y)*delt;
        My(i)=My(i)+E*ez(i,j,k)*z*delt;
        Mz(i)=Mz(i)+E*ez(i,j,k)*y*delt;
    end
end

end

tau_yx_max(it)=max(max(max(abs(tau_yx))));
tau_zx_max(it)=max(max(max(abs(tau_zx))));
smax(it)=max(max(max(abs(sigma))));
clc
proc=fix(it/(nt+1)*100)
end
time=0:dt:t;
%Вывод графика изменения относительного угла закручивания
figure;
plot(time, Tmax);
%Вывод графика изменения максимальной величины касательных напряжений
figure;

```

```
plot(time,tau_zx_max*10);  
hold on  
%Определение критического времени  
tkr=0;  
for i=1:nt  
    if smax(i+1)>smax(i)  
        tkr=(i-1)*dt;  
        break  
    end  
end  
tkr
```

**9 ПРИЛОЖЕНИЕ 2. (ВНЕДРЕНИЯ, ПАТЕНТЫ И СВИДЕТЕЛЬСТВА О ГОСУДАРСТВЕННОЙ РЕГИСТРАЦИИ ПРОГРАММ ДЛЯ ЭВМ)**





## РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



## СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2020661325

Расчет балок прямоугольного сечения на устойчивость  
плоской формы изгиба с учетом ползучести

Правообладатель: *Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М.  
Бербекова» (КБГУ) (RU)*

Авторы: *Хаширова Светлана Юрьевна (RU), Зотов Иван  
Михайлович (RU), Лапина Анастасия Павловна (RU), Чепурненко  
Антон Сергеевич (RU), Молоканов Георгий Олегович (RU), Языев  
Сердар Батырович (RU)*

Заявка № 2020617809

Дата поступления 27 июля 2020 г.

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ 21 сентября 2020 г.



Руководитель Федеральной службы  
по интеллектуальной собственности

Г.П. Ивлиев



## РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



## СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2020619374

**Расчет двухслойных армоцементных оболочек на силовые  
и температурные воздействия в условиях пожара**

Правообладатель: **Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М.  
Бербекова» (КБГУ) (RU)**

Авторы: **Журтов Артур Владимирович (RU), Литвинов Степан  
Викторович (RU), Хежев Толя Амирович (RU), Чепурненко Антон  
Сергеевич (RU), Языев Сердар Батырович (RU)**

Заявка № 2020617814

Дата поступления 27 июля 2020 г.

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ 17 августа 2020 г.

Руководитель Федеральной службы  
по интеллектуальной собственности

Г.П. Ивлиев





## РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



## СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 2020660684

**Расчёт остаточных напряжений при производстве изделий,  
имеющих форму вращения**

Правообладатель: *Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение высшего образования  
«Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М.  
Бербекова» (КБГУ) (RU)*

Авторы: *Хаширова Светлана Юрьевна (RU), Лесняк Любовь Ивановна  
(RU), Литвинов Степан Викторович (RU), Языев Сердар Батырович  
(RU), Языев Батыр Меретович (RU), Молоканов Георгий Олегович  
(RU), Чепурненко Антон Сергеевич (RU)*


Заявка № 2020617798

Дата поступления 27 июля 2020 г.

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ 09 сентября 2020 г.

Руководитель Федеральной службы  
по интеллектуальной собственности

 Г.П. Ивлиев





## РОССИЙСКАЯ ФЕДЕРАЦИЯ



## СВИДЕТЕЛЬСТВО

о государственной регистрации программы для ЭВМ

№ 201601906

Правообладатель: *Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Ростовский государственный строительный университет» (РГСУ) (RU)*

Авторы: *Языев Батыр Меретович (RU), Карамышева Анна Анатольевна (RU), Языев Сердар Батырович (RU), Чепурненко Антон Сергеевич (RU)*

Заявка № 2015662800

Дата поступления 20 января 2016 г.

Дата государственной регистрации

в Реестре программ для ЭВМ 16 марта 2016 г.



*Врио руководителя Федеральной службы  
по интеллектуальной собственности*

Л.Л. Кирий



ИНН № 6165114498; КПП 616501001; ОКПО 73273970; ОКВЭД 74.20.11; 74.20.13; 74.20.35;  
ОГРН 1046165007294 от 19.04.2004 г.  
344012, г. Ростов-на-Дону, ул. Ивановского, 38/63  
Тел. (863) 232-97-06; тел./факс (863) 232-12-43; E-mail: info@sevkav.com; Сайт: www.sevkav.biz

**В диссертационный совет  
24.2.295.02 (Д212.052.03) при ФГБОУ ВО  
«Дагестанский государственный  
технический университет»**

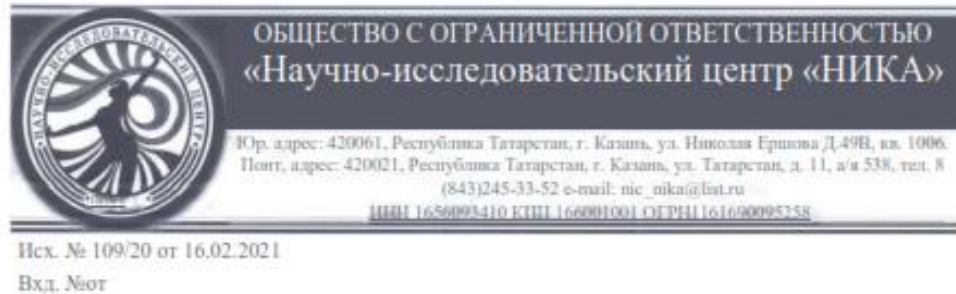
Сообщаем Вам, что переданные в ООО «Севкавнипиагропром» материалы диссертации Языева Сердара Батыровича на соискание ученой степени доктора технических наук по методам расчета стержней и пластин на устойчивость с учетом физической и геометрической нелинейности рассмотрены и одобрены ведущими специалистами института.

Разработанные автором программные продукты по расчету стержней и пластин с учетом реологии материала и нелинейной зависимостью между напряжениями и деформациями, а также предложение автором рекомендации по учету собственного веса элемента конструкции и переменной жесткости, начальных несовершенств используются в практике проектирования института.

С уважением,  
Зам. Генерального директора,  
д.т.н., профессор



**В.К. Осипов**



## АКТ

### о внедрении результатов диссертационной работы Языева Сердара Батыровича

Настоящий акт составлен о том, что результаты диссертационной работы С.Б. Языева, посвященной исследованиям и разработке методов расчета на устойчивость вязкоупругих пластин и оболочек на силовые и температурные воздействия с учетом реологии материала рассмотрены и одобрены ведущими специалистами центра. Результаты работы используются при расчете полимерных пластинок и стержней конструкционного назначения, применяемых в машиностроении и покрытий для сооружения объектов сельскохозяйственного назначения, пищевого производства, а также сборных резервуаров переменной толщины.

Директор

М.Н. Мириханов





Руководитель строительного отдела ГК АКСтрой  
 Индивидуальный предприниматель Акопян В.Ф.  
 346720, Ростовская область, г. Аксай, ул. Донская 25;  
 тел.: 8-863-5057422, e-mail: vovaakop@mail.ru.  
 моб. тел.: 8-908-506-97-99  
 ИНН 610203911058 ОГРН 314618116900069

В диссертационный совет  
 (Д212.052.03) при ФГБОУ ВО  
 «Дагестанский государственный  
 технический университет»

Утверждаю  
 Руководитель строительного отдела  
 ГК АКСтрой  
 ИП Акопян В.Ф.



### Технический акт внедрения

результатов диссертационной работы на соискание ученой степени доктора  
 технических наук Языева Сердара Батыровича

Место внедрения Ростовская обл., г. Аксай

Предмет внедрения	Пакет прикладных программ для расчета на силовые и температурные воздействия трехслойных пластин и оболочек.
Результаты внедрения	Результаты диссертационной работы С.Б. Языева, подтвержденные на численных моделях (на основе метода конечных элементов, метода конечных разностей), используются при расчете на устойчивость стержней и пластин, применяемых в конструкциях стен и покрытий для сооружения объектов сельскохозяйственного назначения, пищевого производства, а также объектов, эксплуатируемых в агрессивной среде.

Представители заказчика:  
 директор строительного отдела  
 ГК АКСтрой  
 ИП Акопян В.Ф.



Исполнитель: соискатель кафедры  
 сопротивления материалов  
 ДГТУ Языев С.Б.