

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Ростовский государственный строительный университет»

На правах рукописи

Никора Надежда Игоревна

**ПРОДОЛЬНЫЙ ИЗГИБ СТЕРЖНЕЙ ПЕРЕМЕННОЙ
ЖЕСТКОСТИ С УЧЕТОМ ДЕФОРМАЦИЙ
ПОЛЗУЧЕСТИ И ТЕМПЕРАТУРНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ**

05.23.17 — Строительная механика

Диссертация
на соискание учёной степени кандидата технических наук

Научный руководитель
советник РААСН,
д.т.н., проф. Б. М. Языев

Ростов-на-Дону — 2016

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	4
Глава 1. СОСТОЯНИЕ ВОПРОСА. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.....	11
1.1 Теоретические и экспериментальные данные по продольному изгибу стержней с учетом ползучести. Критерии устойчивости стержней.	11
1.2 Уравнение связи Максвелла-Гуревича для полимерных стержней. Дискретный спектр времен релаксации.	31
Глава 2. Устойчивость сжатых стержней с учетом ползучести при действии механических нагрузок	34
2.1 Вывод уравнений для шарнирно опертого стержня.....	34
2.2 Методика решения задачи.....	36
2.3 Определение длительных критических нагрузок для сжатых полимерных стержней.....	43
2.4 Вывод разрешающего уравнения с учетом вязкоупругости для произвольных вариантов закрепления.....	46
2.5 Применение к задаче энергетического метода в форме Ритца-Тимошенко и метода Бубнова-Галеркина	52
2.6 Решение модельных задач для стержней постоянной жесткости при различных вариантах закрепления	61
2.7 Учет дискретности спектра времен релаксации полимера.....	70
2.8 Выводы по главе.....	72
Глава 3. Сравнение работы стержней постоянного и переменного сечения в упругой стадии и при ползучести	73
3.1 Типовые формы изменения жесткости для шарнирно опертого по концам стержня	73
3.2 Методика оптимизации формы сжатых стержней	84

3.3	Вариант закрепления «заземление-свободный край»	91
3.4	Жестко заземленный по концам стержень.....	96
3.5	Выводы по главе.....	98
Глава 4. Влияние температурных воздействий на устойчивость стержней при ползучести.....		99
4.1	Вывод разрешающих уравнений	99
4.2	Решение модельных задач.....	101
4.3	Выпучивание стержня при равномерном нагреве	102
4.4	Выводы по главе.....	106
Заключение.....		107
Список литературы.....		109
Приложение 1. Внедрение результатов диссертационной работы.....		117
Приложение 2. Программы расчета на ЭВМ в пакете Matlab		119

ВВЕДЕНИЕ

Потеря устойчивости любой конструкции является опасным явлением, и поэтому при оценке ее несущей способности помимо расчетов на прочность и жесткость необходим расчет на устойчивость как системы в целом, так и ее отдельных элементов. Это в первую очередь очень важно и актуально для строительной отрасли, поскольку явление потери устойчивости возникает внезапно. Процесс потери устойчивости протекает очень быстро и часто задолго до исчерпания прочности материала, он может сопровождаться большими разрушениями.

Во многих конструкциях используются стержни с постоянной по длине жесткостью. Для снижения материалоемкости имеет смысл применять стержни переменной жесткости. В работах А. С. Вольмира и И. А. Биргера такие стержни рассматривались, но это были стержни металлические, производство которых является сложным и дорогостоящим процессом.

С развитием технологий производства элементов из полимерных композиционных материалов (ПКМ) возможным стало изготовление изделий, имеющих различную форму. При этом процесс изготовления таких элементов стал намного проще и экономичнее по сравнению с аналогичными металлическими. К примеру, такие элементы можно получить подмоткой пултрузионного стержня, либо ручной выкладкой по шаблонам и т.п.

Первая попытка отыскания оптимальной формы сжатого продольной силой стержня принадлежит Ж. Л. Лагранжу. Им для нахождения максимальной сжимающей критической силы F стержня круглого поперечного сечения при его наименьшем объеме V была введена величина F/V^2 , названная эффективностью. Решения данной задачи в общем виде до настоящего времени нет [1, 2, 3].

Довольно редко исследуются вопросы устойчивости стержней переменного по длине поперечного сечения и выполняется сравнение их со стержнями постоянной жесткости. В литературе практически не встречаются рекомендации по выбору оптимального закона изменения размеров поперечного сечения. Стоит

отметить работы И. И. Кулинича, в которых предлагаются некоторые формы изменения жесткости и оценивается их эффективность, но эти формы подбираются им чисто из интуитивных соображений о том, что в точках с наибольшими изгибающими моментами площадь сечения следует увеличить.

В последнее время с возникновением новых композиционных материалов появляется необходимость в более точной постановке задачи устойчивости сжатых стержней с учетом физической нелинейности, обусловленной реологическими свойствами материала.

Необходимо отметить, что полимерные материалы набирают всё большую популярность и начинают применяться в конструктивных элементах наряду с такими материалами, как железобетон, дерево, сталь и т.д. Так, очень высокая механическая прочность характерна для однонаправленных армированных стержней из таких композитных материалов, как анизотропные пластмассы, стеклопластики. Важным при проектировании таких изделий является умение корректного прогнозирования их прочностных характеристик во времени с учетом возникающих механических воздействий.

В качестве основных составляющих в армированных пластиках выступают полимерные связующие и армирующие элементы в виде стеклянных ровингов. Для малонагруженных деталей обычно применяются неармированные, практически гомогенные и изотропные полимеры.

Полностью реализовать прочностной ресурс стеклопластиковых изделий в реальных конструкциях не всегда удаётся. На долговечность таких элементов оказывают влияния условия заделки стержней в сопрягаемые элементы конструкций; температуры эксплуатации изделий; характеристики среды, в которой находится изделие в процессе эксплуатации; характер действия нагрузок (длительность, цикличность, динамичность).

Для полимерных материалов характерно наличие обратимых деформаций, по фазе отстающих от напряжения и называемых высокоэластическими деформациями. Они в сильной степени зависят от температуры, времени действия нагрузок, скорости деформирования и т.д.

Во многих элементах конструкций возникает, так называемая, наведенная или косвенная неоднородность. Это происходит, когда в результате различных физических явлений (нагрев, радиационное облучение и т.д.) происходит изменение механических характеристик в теле конструкции. Такие изменения могут быть довольно существенными и при расчете конструкций их необходимо учитывать.

В настоящей диссертационной работе будет исследоваться косвенная неоднородность, вызванная в процессе эксплуатации стержня воздействием температурного поля. Чтобы установить закон изменения механических характеристик в теле, в таком случае решаются две задачи. Первая – установление зависимости той или иной характеристики материала от температуры. Вторая – задача об изменении температуры вдоль тела, то есть задача теплопроводности.

Литературный обзор по проблеме устойчивости стержней при ползучести показал, что имеется очень мало работ, в которых одновременно учитывались бы следующие факторы: переменное сечение, различные способы закрепления стержня, наличие температурного поля, и вызванной им неоднородности материала, начальные несовершенства и т.д.

Резюмируя вышесказанное, была поставлена **цель работы**: совершенствование методов расчета и теоретическое исследование устойчивости стержней при ползучести с учётом начальных несовершенств, различных способов закрепления, температурных воздействий и переменной жесткости.

Задачи исследования:

1. Получить разрешающие уравнения для расчета на устойчивость сжатых стержней с учетом переменной жесткости, различных вариантов закрепления, температурных воздействий.
2. Усовершенствовать методику определения деформаций ползучести в каждый момент времени на основе метода Рунге-Кутты.
3. Провести анализ влияния величины сжимающей силы на характер роста прогиба стержня при выпучивании.

4. Изучить влияние дискретности спектра времен релаксации полимера на процесс выпучивания.
5. Оценить влияние переменной жесткости стержней на величину мгновенной критической силы и критического времени.
6. Исследовать влияние температурных воздействий на устойчивость стержней при ползучести.

Объект исследования: полимерные стержни переменной жесткости.

Научная новизна работы:

- усовершенствована методика определения деформаций ползучести при шаговом расчете;
- введена величина длительной критической силы для стержней, материал которых подчиняется уравнению Максвелла-Гуревича;
- выполнен расчет на устойчивость при ползучести стержня из полиэтилена высокой плотности с учетом двух составляющих спектра времен релаксации полимера;
- оценена эффективность предложенных другими авторами форм изменения жесткости по длине стержня и предложены новые более эффективные формы;
- исследовано явление выпучивания стержня при его равномерном нагреве с учетом ползучести материала.

Теоретическая значимость работы заключается в том, что

- автором исследовано влияние температуры стержня на величину критического времени при неизменной сжимающей силе. Объяснены причины его значительного снижения при нагреве;
- проведено исследование выпучивания стержня при отсутствии активных механических нагрузок вследствие равномерного нагрева;
- исследовано влияние «младшей» составляющей спектра времен релаксации полимера на примере полиэтилена высокой плотности и показано, что ею нельзя пренебрегать.

Практическое значение работы. Предложенные автором типовые формы изменения жесткости позволяют при той же массе стержня до 30% увеличить

действующую на него нагрузку по сравнению со стержнем постоянного сечения. При неизменной величине нагрузки в случае правильно подобранной формы изменения жесткости по длине стержня существенно возрастает критическое время, и как следствие увеличивается долговечность элемента конструкции.

Методы исследования. Исследование базируются на современных методах теории упругости, пластичности и ползучести. Используется численное моделирование на основе метода конечных разностей, метода Ритца-Тимошенко, метода Бубнова-Галеркина, метода Рунге-Кутты. Вычисления проводились на базе современных ПЭВМ с использованием математического пакета MatLab.

Основные положения, выносимые на защиту:

- разрешающие уравнения на основе метода конечных разностей и метода Ритца-Тимошенко для расчета с учетом ползучести стержней переменной жесткости;
- методика определения деформаций ползучести в каждый момент времени на основе метода Рунге-Кутты четвертого порядка;
- сравнение результатов автора с решениями других авторов;
- способ определения длительных критических нагрузок для сжатых стержней, подчиняющихся уравнению Максвелла-Гуревича;
- результаты расчета с учетом дискретности спектра времен релаксации полимера;
- сравнение работы стержней постоянного и переменного сечения в упругой стадии и при ползучести, а также предложенные автором эффективные формы изменения жесткости стержня по длине;
- результаты исследования температурных воздействий на процесс потери устойчивости стержней при ползучести.

Достоверность полученных результатов обеспечивается:

- проверкой выполнения всех граничных условий, дифференциальных и интегральных соотношений;
- сравнением полученных результатов с известными решениями других авторов;

– применением нескольких методов к решению одной задачи с последующим сопоставлением результатов.

Внедрение результатов работы. Результаты работы внедрены в практику проектирования группы компаний «АКСстрой», а также в образовательный процесс в Ростовском государственном строительном университете при подготовке аспирантов направления 08.06.01 – «Техника и технологии строительства».

Апробация работы. Результаты исследования доложены на двух международных научно–практических конференциях «Строительство» (Ростов–на–Дону, 2014, 2015 гг.), международной научно-практической конференции, посвященной 95-летию ФГБОУ ВПО «ГГНТУ им. акад. М. Д. Миллионщикова в г. Грозный; научном семинаре кафедры «Соппротивление материалов» Ростовского государственного строительного университета (Ростов–на–Дону, 2015 г.).

Структура и объем работы. Работа состоит из введения, четырех глав, основных выводов, списка использованной литературы и приложений. Изложена на 108 страницах машинописного текста и содержит 61 рисунок и 4 таблицы.

Основное содержание работы.

Во введении обоснована актуальность проблемы и выбор направления исследования, сформулированы цели и задачи, основные положения, приведена краткая аннотация всех глав работы.

В главе 1 приведен краткий обзор работ, посвященных теоретическим и экспериментальным данным по выпучиванию стержней при ползучести. Рассматриваются критерии устойчивости при ползучести, а также приводится обобщенное нелинейное уравнение Максвелла-Гуревича с учетом дискретного спектра времен релаксации.

В главе 2 приводится вывод разрешающих уравнений на основе метода конечных разностей, метода Ритца-Тимошенко и метода Бубнова-Галеркина. Рассматривается методика определения длительных критических нагрузок для сжатых полимерных стержней, исследуется влияние дискретности спектра времен

релаксации полимера на примере стержня из полиэтилена высокой плотности (ПВП). Приведены модельные задачи для стержней постоянной жесткости.

В главе 3 рассматриваются типовые формы изменения жесткости для различных вариантов закрепления стержня предложенные к.т.н., доцентом И.И. Кулиничем. Оценивается эффективность каждой из них при кратковременном и длительном действии нагрузки. Автором предлагается методика оптимизации и новые, более эффективные формы изменения жесткости.

Глава 4 посвящена влиянию температурных воздействий на выпучивание стержней при ползучести. Исследуется влияние изменения температуры стержня на величину длительной критической силы и критического времени. Рассматривается задача выпучивания стержня в отсутствие активных механических нагрузок в результате его нагрева с учетом ползучести.

В заключении приведены основные результаты и выводы по работе.

ГЛАВА 1. СОСТОЯНИЕ ВОПРОСА. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

1.1 Теоретические и экспериментальные данные по продольному изгибу стержней с учетом ползучести. Критерии устойчивости стержней.

Для снижения веса, стоимости и трудоемкости, а также повышения качества строительных конструкций и их элементов, предстоит осуществление разработки и внедрения новых типов легких и облегченных конструкций. Значительную роль при разработке эффективных конструкций выполняет совершенствование методов расчёта с учётом реальной работы материала.

Одним из факторов, оказывающих существенное влияние на напряженно-деформированное состояние и деформативность конструкций, является ползучесть. Это явление относится практически ко всем металлам и сплавам при действии достаточно высоких температур, к бетонам, полимербетонам, дереву, полимерным материалам. Повышение требований к современным машинам, и как следствие увеличение температуры и нагрузки, действующей на их элементы, заставляет учитывать явление ползучести, оценивая прочность и долговечность таких объектов, как энергетические установки, летательные аппараты и многие другие. Расчеты на ползучесть, в отличие от обычных прочностных расчетов, имеет своей целью не обеспечение абсолютной прочности изделия, а только дают гарантию того, что изделие будет пригодно к эксплуатации в течение определенного срока. Иными словами, все конструкции, работающие в условиях ползучести, рассчитаны на определенную долговечность.

Многие исследователи, имея дело с весьма разнообразными материалами, свойства которых к тому же зачастую обладают изменчивостью, и решая прикладные задачи, при применении теории ползучести строили только приближенные схемы, охватывающие явление в общих чертах. Универсальной теории ползучести, которая была бы пригодна для всех материалов, в настоящее время не существует. Некоторые авторы [4, 5] вообще считают, что такой единой теории быть и не может.

К моменту времени, когда с развитием техники встал вопрос определения критической нагрузки для конструкций, работающих за пределами упругости, в практически полном объеме уже была разработана теория упругой устойчивости. И поскольку на первом этапе развития проблема устойчивости при ползучести многое позаимствовала из теории устойчивости упругих систем, то стоит вкратце остановиться на основных ее положениях.

В середине XVIII в. Л. Эйлером было показано, что для центрально-сжатого прямого стержня при определенных величинах сжимающей силы наряду с прямолинейной возможна и криволинейная форма равновесия. Выпучивание стержня наблюдается при наименьшей из таких сил – Эйлеровой критической силе. Эйлерова сила определяет момент, за которым прямолинейная форма равновесия становится неустойчивой.

Потеря устойчивости любой механической системы, которая подвергается действию некоторых сил (называемых силами основного состояния), заключается в возникновении таких видов деформации (деформаций выпучивания), которые невозможны в отсутствие некоторой дополнительной системы сил (возмущающих). Поэтому определение устойчивости основано на концепции проб малыми дополнительными силами.

На интуитивном уровне понятно, что механическая система может считаться неустойчивой, если в случае действия ничтожно малых возмущающих сил в ней возникнут значительные деформации выпучивания.

Классическое определение устойчивости основано на том, что было указано выше, и заключается в следующем. Неустойчивым является такое состояние или движение механической системы, при котором действие сколь угодно малых возмущающих сил вызывает возмущение движения, расходящееся от исходного состояния или движения. В противном случае состояние или движение системы устойчиво.

В результате непосредственного исследования возмущенных движений простейших упругих систем и многочисленных экспериментов было установлено, что действительно граница устойчивых и неустойчивых исходных состояний

определяется Эйлеровой критической силой, и она отвечает моменту потери устойчивости.

Критерий Эйлера, благодаря своей принципиальной простоте, логической завершенности и достаточно широкой универсальности по отношению к упругим системам, был безоговорочно обобщен и на неупругие системы, хотя в силу специфики упругопластических и вязкоупругих систем пришлось произвести некоторые уточнения данного критерия.

По исследованию выпучивания стержней с учетом ползучести в настоящее время существует много работ, опубликованных как в нашей стране, так и за рубежом. Это свидетельствует о высокой степени актуальности с точки зрения развития теории устойчивости, а также с точки зрения совершенствования расчета конкретных конструкций и их элементов.

Первым, кто провел исследование устойчивости стержней при ползучести, был А. Р. Ржаницын. Начато это исследование было в его докторской диссертации в 1944 году и затем продолжено в статьях [6, 7, 8] и монографиях [9, 10, 11].

А. Р. Ржаницыным были рассмотрены вопросы устойчивости прямолинейной формы равновесия стержней, материал которых подчинялся наследственной теории старения, интегральному закону наследственной ползучести и, в частности, являлся вязкоупругим. Величина сжимающей силы принималась в виде произвольной функции времени, а в частных случаях считалась постоянной, либо равномерно возрастающей с течением времени и изменявшейся периодически.

Понятия длительной и мгновенной критических нагрузок, введенные А. Р. Ржаницыным, аналогичны Эйлеровой силе для упругой задачи. В случае, когда действующая нагрузка превышает длительную критическую, потеря устойчивости происходит в некоторый момент времени. Если она равна мгновенной, то потеря устойчивости происходит сразу. Если величина нагрузки не превышает длительную критическую, потери устойчивости не происходит.

Постановка вопроса устойчивости стержней, для которых характерна вязкоупругость, может отличаться в силу существования различных теорий

ползучести. Рассматривая ту или иную теорию ползучести, следует учитывать характерные особенности материала, способ нагружения, участок кривой ползучести, на котором будет работать материал, а также те задачи, которые предстоит решить. Поэтому при решении задачи выпучивания при ползучести различными авторами были приняты различные критерии потери устойчивости.

Ю. Н. Работновым [5, 12] и С. А. Шестериковым [13, 14, 15] была предложена новая трактовка, заключающаяся в том, что они связали вопрос устойчивости при ползучести с классическим определением устойчивости. Взяв за основу закон упрочнения, они провели его линеаризацию с учетом малости прогибов, а затем выполнили анализ движения стержня при действии возмущений. Состояние стержня они считали устойчивым или неустойчивым в зависимости от того, каким был характер скорости возмущенного движения.

Л. М. Куршин [16, 17, 18, 19, 20] предложил в качестве критерия потери устойчивости брать величину прогиба, по достижении которого происходит исчерпание несущей способности стержня.

Исследование влияния ползучести на устойчивость стержней проведено в работах [21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30]. В работах Н. И. Хоффа [31, 32, 33, 34, 35], Л. М. Куршина [18, 20], В. Д. Потапова [27] приведен подробный обзор публикаций отечественных и зарубежных ученых, в которых рассматривается постановка и решение задач выпучивания при ползучести конструкций и их элементов.

Влияние следящих сил на устойчивость вязкоупругих стержней рассматривается в работах зарубежных ученых I. L. Claudon [36], R. H. Maut [37], M. R. Morgan [38], G. Y. Porper [39]. Поведение неконсервативных систем при ползучести пока не исследовано. Таким образом, проблема вязкоупругой устойчивости неконсервативных систем представляет значительный практический интерес. Не менее интересным данный вопрос является и с теоретической стороны, так как для поведения неконсервативных систем характерен ряд особенностей, которые в настоящее время еще до конца не выяснены.

Вопросы выпучивания конструкций из полимеров рассмотрены в работах Г. А. Тетерса [40]. Стоит также отметить труды Л. М. Качанова [4], А. С. Вольмира [41], Ф. Де Вёбека [42].

Все работы, в которых рассматриваются вопросы выпучивания (или устойчивости) стержней с учетом ползучести, можно разбить на два направления. Эти направления можно рассматривать как дальнейшее развитие подходов, которые используются при анализе упругой и неупругой потери устойчивости.

При первом, классическом подходе предполагают существование изменения устойчивых конфигураций равновесия – по прохождении некоторого времени, которое называется критическим, происходит переход прямолинейной формы в искривленную. Считается, что процесс ползучести в стержне ведет к уменьшению его жесткости, вследствие чего и происходит потеря устойчивости.

Второй подход при исследовании выпучивания стержней при ползучести базируется на учете начальных несовершенств, дефектов (неправильная форма, эксцентриситет нагрузки и т.п.). При этом подходе полагается, что начальные несовершенства в геометрии, либо эксцентриситеты с течением времени возрастают, что приводит к разрушению.

Экспериментальных исследований по этому вопросу, к сожалению, сравнительно немного. Они показывают, что в сжатых стержнях из материалов, для которых характерно явление ползучести, с самого начала их работы накапливаются изгибные деформация. По-видимому, это обстоятельство послужило поводом к тому, что многие авторы используют второй подход к анализу устойчивости в своих теоретических исследованиях. Однако В. В. Болотиным [43, 44] было подчеркнуто, что задача о росте прогиба первоначально искривленного стержня при действии постоянной сжимающей нагрузки не является задачей устойчивости в чистом виде. В то же время В. В. Болотин отмечал, что при первом подходе, когда используется в качестве расчетной схемы прямолинейный стержень, задача чрезмерно идеализируется. Таким образом, в расчет следует вводить конечные детерминированные возмущения.

В настоящее время исследователи при использовании того или иного подхода применяют одно и то же название: устойчивость или выпучивание при ползучести. Далее такая терминология будет сохранена.

В работе [41] отмечены преимущества и недостатки обоих подходов. При кратковременной потере устойчивости предпочтительнее предсказать поведение стержня по классической теории устойчивости в отличие от более подробного анализа, необходимого при использовании теории начальных несовершенств. Второй подход требует не только точного знания начальных неправильностей, но и наличия конкретного закона ползучести при переменных напряжениях. В классическом подходе этого не требуется. По этому поводу есть некоторые возражения. При использовании классического подхода требуется наличие диаграмм сжатия $\sigma(\varepsilon)$ для каждого конкретного материала. В то же время в другом подходе используется уравнение связи, которое удовлетворительно описывает поведение материала и не требует проведения предварительных экспериментов.

Потеря устойчивости стержней из полимерных материалов при нормальных температурах, а также металлических стержней при высоких температурах происходит в течение весьма продолжительного времени. То же самое справедливо и при малых уровнях напряжений. Поэтому получение изохронных диаграмм $\sigma(\varepsilon)$ для больших интервалов времени связано с определенными трудностями.

В работе [41] приводится вывод о том, что при решении практических задач о выпучивании при ползучести окончательный выбор между классическим подходом и теорией начальных несовершенств должен зависеть от простоты метода и приводить к приемлемым результатам.

По мнению автора, приемлемыми можно считать те результаты, которые удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными (при их достаточной стабильности). Но из-за небольшого количества экспериментальных работ, посвященных только устойчивости металлических стержней при высоких температурах, пока нет возможности окончательно определиться между двумя

описанными подходами, либо их вариациями к анализу проблемы выпучивания стержней при ползучести.

Стоит отметить, что решение задач теории ползучести связано с известными математическими трудностями. Это делает необходимым ввести те или иные допущения относительно формы стержня, уравнений связи и т. д. Некоторыми исследователями были найдены оригинальные математические приемы и методы решения задач без введения слишком упрощающих предположений. Предлагаются и различные критерии потери устойчивости как исследователями, использующими классический подход, так и придерживающимися теории начальных несовершенств.

Во многих теоретических работах, где рассматриваются вопросы выпучивания при ползучести, для упрощения вводятся те или иные допущения, связанные с физическими и геометрическими закономерностями. Эти упрощения в основном сводятся к следующему:

1. Одноосное напряженное состояние. Предполагают, что при продольном изгибе связь между напряжениями и деформациями такая же, как и в случае одноосного растяжения (сжатия). Данная гипотеза используется всеми исследователями;

2. Гипотеза плоских сечений. Данного предположения также придерживаются все авторы;

3. Геометрическая линейность. Практически во всех работах, за небольшим исключением, полагается, что прогиб стержня невелик, и поэтому квадрат первой производной прогиба по координате очень мал по сравнению с единицей. При этом кривизна стержня, в общем случае имеющая вид

$$\kappa = \frac{\frac{d^2 v}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} \quad (1.1)$$

записывается в виде:

$$\kappa = -\frac{d^2 v}{dx^2}, \quad (1.2)$$

где κ – кривизна стержня; v – прогиб; x – координата вдоль оси стержня. Данное предположение позволяет существенно упростить расчеты;

4. Форма сечения. Что касается формы поперечного сечения, во многих работах вводится упрощение, что сечение стержня представляет собой идеальный двутавр, либо используется модель стойки Шенли, состоящей из двух абсолютно жестких рычагов, которые соединены двумя полками из рассматриваемого материала. При этом считается, что весь материал полки сосредоточен в точке. Такое упрощение дает возможность удовлетворить уравнениям равновесия не по всей высоте сечения стойки, а только в двух точках, в результате чего значительно упрощаются вычисления;

5. Форма прогиба. Многие авторы приходят к уравнениям, в которых содержатся смешанные производные функции прогиба по координате и времени. С целью разделения переменных вводится допущение, что кривая прогиба имеет вид полуволны синусоиды (в некоторых случаях возможны другие формы прогиба). Это предположение при геометрической линейности и в случае физически линейного материала дает возможность удовлетворить уравнениям по всей длине стержня ($0 \leq x \leq l$), что впоследствии позволяет интегрировать уравнения только по времени. Довольно часто при решении геометрически и физически нелинейных задач применяется метод коллокаций. При этом уравнения удовлетворяются только в середине пролета, что затем позволяет разделить переменные.

6. Физические уравнения. Нелинейные законы связи между напряжениями и деформациями ползучести, описывающие поведение материалов, дают лучшее совпадение с данными экспериментов по сравнению с линейными. Однако использование нелинейных уравнений связано с математическими трудностями, и это заставляет при теоретических расчетах вводить предположение о том, что поведение материала описывается линейным законом. Для упрощения расчетов

некоторые авторы предлагают методы, в которых при решении удастся так или иначе линеаризовать исходное уравнение.

Большое число работ по выпучиванию стержней при ползучести обусловлено наличием или отсутствием тех или иных из указанных выше упрощений с некоторыми вариациями. Преимущество того или иного подхода чисто теоретически оценить весьма затруднительно. Наилучший в этом смысле критерий – это совпадение результатов расчета с данными экспериментов. Необходимо отметить, что практически во всех работах достигается качественное совпадение результатов. Но количественное совпадение не всегда является удовлетворительным. Расхождение обусловлено в каких-то случаях наличием недостаточно обоснованных упрощений, а в некоторых случаях – сильным разбросом опытных данных.

Рассмотрим теперь отдельные труды. Начнем с рассмотрения теоретических работ, в которых авторы используют классическую теорию, затем рассмотрим работы, в которых применяется теория начальных несовершенств и, в заключение, – публикации, в которых приведены результаты экспериментов по выпучиванию стержней при ползучести.

Классическая теория, согласно которой принимается, что стержень в течение практически всего процесса ползучести сохраняет прямолинейную форму и только в заключительной стадии теряет устойчивость, была разработана Ю. Н. Работновым, С. А. Шестериковым, Р. Шенли, Д. Джерардом и др.

Они рассматривали прямолинейный стержень, сжимаемый постоянной силой F . В случае, когда эта сила меньше Эйлеровой, стержень при нагружении получает только осевые деформации. Ввиду того, что для материала характерно явление ползучести, продольные деформации с течением времени возрастают, жесткость стержня снижается, и в определенный момент времени, называемый критическим временем $t_{кр}$, происходит резкое выпучивание стержня. Чтобы определить этот момент, были предложены различные критерии.

Сначала рассмотрим те критерии, которые касаются *совершенных элементов* конструкций, для которых прямолинейная форма равновесия сохраняется до самого момента потери устойчивости.

Одним из вариантов решения задачи является в следующий. Допустим, что имеется связь между полной деформацией, напряжениями и временем по какой-либо теории ползучести. Для фиксированных моментов времени $t_0, t_1, t_2 \dots$ строятся изохронные кривые $\sigma(\varepsilon)$. Условно принимается, что критическое напряжение вычисляется по формуле касательного модуля для изохронных кривых

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E_k}{\lambda^2} \quad (1.3)$$

или

$$\sigma_{кр} = \sigma_{\varepsilon} \frac{E_k}{E}, \quad (1.4)$$

где σ_{ε} – Эйлерово напряжение, равное $\frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$; эффектом разгрузки здесь пренебрегаем.

Основное сжимающее напряжение σ_* , которое возникает в стержне, принимается заданным.

Через определенный интервал времени напряжение σ_* оказывается критическим: $\sigma_* = \sigma_{кр}$. Таким образом, при выпучивании касательный модуль

$$E_{кр} = \frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \frac{\sigma_*}{\sigma_{\varepsilon}} E. \quad (1.5)$$

Первый критерий устойчивости соответствует *касательно-модульной* теории. Данный подход был предложен Шенли [45].

Шенли предложил и другой способ для вычисления критического времени, он был использован в работах [46, 47, 48, 49]. Сущность его заключается в следующем. Полагается, что стержень сохраняет прямолинейную форму равновесия до того момента, когда величина производной $\frac{d\sigma}{d\varepsilon}$ не примет критическое значение. Данный критерий получен из рассмотрения тел, работающих упругопластически, однако он стал широко применяться и в решении задач теории ползучести. Для производной $\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = E_T$ за критическое значение

принимается величина $\frac{\sigma}{\sigma_Э} E$, где σ – действующее напряжение; $\sigma_Э$ – Эйлерово напряжение, определяемое как $\frac{F_Э}{A}$; E – модуль Юнга.

Для вязкоупругих материалов, данный критерий также не является достаточно обоснованным, однако относительная его простота позволяет делать приближенные оценки. По этому критерию критическое время вычисляется либо по серии изохронных кривых $\sigma(\varepsilon)$, если потеря устойчивости происходит за небольшое время, либо при помощи уравнения связи определяется производная $\frac{d\sigma}{d\varepsilon}$ как функция времени. В статье [15] проводится сравнение результатов расчета по описанному критерию с экспериментом.

Результаты сравнения неудовлетворительные. В монографии [47] приведены рекомендации по выбору параметров эмпирической зависимости, которая давала бы лучшее согласование с экспериментальными данными. Несколько иная постановка описанного критерия используется в работе [48] для решения задачи устойчивости стержня из материала с линейным упрочнением. Автором сделан вывод о том, что от величины нагрузки сильно изменяется характер зависимости прогиба от времени. Но нет сравнения с данными экспериментов для подтверждения полученного результата.

Во втором случае в качестве критерия потери устойчивости выбирается **критическая деформация**. Данная версия выдвинута Дж. Джерардом [49].

Предполагается, что потеря устойчивости элемента конструкции происходит при определенном значении полной деформации независимо от того, какими факторами она обусловлена, и является ли она упругой, либо упругопластической.

В соответствии с этой теорией потеря устойчивости стержня может произойти в тот момент, когда его полная осевая деформация примет критическое значение. Величина критической деформации принимается равной Эйлеровой деформации $\varepsilon_Э = \frac{F_Э}{EA}$. Для определения критического времени в этом случае существует два способа. Величину $t_{кр}$ можно определить, если имеются диаграммы ползучести материала $\varepsilon(t)$ для разных напряжений, непосредственно из них.

Данный метод может использоваться при кратковременной потере устойчивости, так как для больших интервалов времени получение диаграмм $\varepsilon(t)$ является весьма трудоемким.

Еще один способ – применение теоретических зависимостей, которые связывают деформации, напряжения и время (либо скорости изменения деформаций и напряжения). Если согласно такому уравнению связи найти зависимость между деформацией и временем, это даст возможность определения критического времени.

Стоит отметить, что при данной гипотезе не требуется никаких дополнительных геометрических предположений, и она приводит к желаемым результатам без громоздких вычислений. Ввиду своей математической простоты рассмотренный метод применим к уравнениям связи любых типов: как линейным, так и нелинейным. Но в то же время указанная гипотеза под собой не имеет каких-либо физических или механических обоснований. Иными словами, она является полуэмпирической формулой. Однако, сравнение результатов расчета по указанной гипотезе с экспериментальными данными для алюминиевых стержней при высоких температурах, приведенное в [50], показало удовлетворительное совпадение величин $t_{кр}$.

Очевидно, что критическое время по указанной теории всегда будет больше по сравнению с касательно-модульным вариантом.

Наклон секущей для диаграммы $\sigma(\varepsilon)$ характеризует углом α , поэтому, по существу, мы используем секущий модулем E_c , вычисляя критическое напряжение:

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E_c}{\lambda^2}. \quad (1.6)$$

Ю. Н. Работновым и С. А. Шестериковым [5] был предложен совершенно иной подход к решению задач устойчивости. Далее его применяли и другие авторы [49, 17]. Данный критерий получил название динамического. В соответствии с этим критерием рассматривается сжатый прямой стержень, и к нему в некоторый момент прикладывают возмущение. Поведение его после этого определяет

устойчивость или неустойчивость. Стержень считается устойчивым, если в результате возмущения происходят затухающие колебания. Неустойчивым считается состояние стержня, когда прогибы начинают неограниченно расти. В работе [12] Ю. Н. Работнов проводит теоретическое исследование устойчивости стержня, материал которого подчиняется следующему нелинейному уравнению:

$$\Phi(\sigma, p, \dot{p}) = 0, \quad (1.7)$$

где p – неупругая деформация, $p = \varepsilon - \frac{\sigma}{E}$.

Предполагается, что в случае приложения в некоторый момент времени к стержню небольшого возмущения (в виде отклонения его от прямолинейной формы), связь между напряжениями и деформациями будет иметь вид:

$$\frac{d\Phi}{d\sigma} \delta\sigma + \frac{d\Phi}{dp} \delta p + \frac{d\Phi}{d\dot{p}} \delta\dot{p} = 0. \quad (1.8)$$

Вводя обозначения $\frac{d\Phi}{d\sigma} = \lambda$; $\frac{d\Phi}{dp} = \mu$; $\frac{d\Phi}{d\dot{p}} = \nu$ и используя равенства

$$\delta p = \delta\varepsilon - \frac{1}{E} \delta\sigma, \quad \delta\dot{p} = \delta\dot{\varepsilon} - \frac{1}{E} \delta\dot{\sigma},$$

получают вместо (1.8) выражение для вариаций:

$$(E\lambda - \mu)\delta\sigma - \nu\delta\dot{\sigma} + E(\mu\delta\varepsilon + \nu\delta\dot{\varepsilon}) = 0. \quad (1.9)$$

Затем, применяя гипотезу плоских сечений и проинтегрировав (1.9) по сечению, Ю. Н. Работнов приходит к дифференциальному уравнению, описывающему колебания стержня:

$$\left[-(E\lambda - \mu) + \nu \frac{d}{dt} \right] \left[F \frac{d^2 y}{dx^2} + \rho F \frac{d^2 y}{dt^2} \right] + \frac{d^2}{dt^2} \left[EI \left(\mu \frac{d^2 y}{dx^2} + \nu \frac{d^3 y}{dx^2 dt} \right) \right] = 0, \quad (1.10)$$

где y – прогиб; F – сжимающая сила. Переходя от (1.9) к (1.10), Ю. Н. Работнов делает предположение о том, что в течение некоторого времени величины ν , λ и μ являются постоянными, что и позволяет получить линейное уравнение (1.10). Данное предположение по сути есть линеаризация уравнения (1.7).

Разделение переменных в (1.10) удастся выполнить, предполагая, что для стержня, шарнирно опертого по концам

$$y = \tau(t) \sin \frac{\pi x}{L}.$$

В результате для $\tau(t)$ получено обыкновенное дифференциальное уравнение 3-го порядка. Его решение имеет вид:

$$y = Ae^{st}.$$

Если $s > 0$, то прогибы неограниченно возрастают с течением времени. Поэтому при определении области устойчивости необходимо, чтобы выполнялось условие $s \leq 0$. Данное требование приводит к условию устойчивости

$$E\lambda P + \mu(F_3 - F) - v\dot{F} = 0.$$

Если сжимающая сила постоянная, то $\dot{F} = 0$, откуда было получено условие

$$F < \frac{F_3}{1 - \frac{E\lambda}{\mu}}. \quad (1.11)$$

В работах [12, 7] рассматривается несколько уравнений связи типа (1.7) и для каждого из них проводится исследование. Если в уравнении (1.10) пренебречь инерционным членом, то при решении задачи в квазистатической постановке получается аналогичный результат. При этом порядок уравнения для τ понижается, вид решения такой же.

Предложенный С. А. Шестериковым и Ю. Н. Работновым метод анализа устойчивости стержней при ползучести, может считаться наиболее правильным из всех рассмотренных выше. Он базируется на общепринятом определении устойчивости, и в нем не вводится никаких предположений. Однако из-за математических трудностей применимость его ограничена при анализе устойчивости стержней из материалов, которые подчиняются нелинейным уравнениям. Но с другой стороны, рассмотренный прием линеаризации дает возможность получить довольно важные и интересные выводы.

Среди публикаций, в которых авторы используют классический подход, нужно отметить работы А. Р. Ржаницына [6, 7, 8, 9, 10, 11]. Он рассматривает как линейные, так и нелинейные уравнения связи. Более подробно остановимся на задаче потери устойчивости стержня, для материала которого выполняется линейное соотношение:

$$nH\dot{y} + Ey = p + n\dot{p}, \quad (1.12)$$

где n , H и E – константы материала; p – обобщенное усилие, y – обобщенное перемещение.

А. Р. Ржаницын рассматривает прямолинейный стержень, сжимаемый центральной силой N . Он составляет уравнение равновесия (в квазистатической постановке) для возмущенного состояния, которое имеет следующее решение:

$$y = ce^{-\frac{(E-P)t}{n(H-p)}}. \quad (1.13)$$

Здесь P – обобщенная параметрическая нагрузка, которая определяется соотношением $p = Py$. Из формулы (1.13) можно определить область устойчивого и неустойчивого равновесия. Если сжимающая сила в стержне равна N , то $P = \frac{Nl^2}{\pi^2 I} N$ и из (1.13) получается:

$$y \rightarrow \infty \text{ при } N_3 < N; \quad y = \text{const} \text{ при } N_3 = N; \quad y \rightarrow 0 \text{ при } N_3 > N.$$

Аналогичный результат, но несколько иначе был получен С. А. Шестериковым [14] (он предполагал, что стержень имеет начальное искривление). Существенное отличие состоит в том, что при $N_3 > N$ прогиб стремится не к нулю, а к конечному значению, которое больше начального.

С. А. Шестериков замечает, что для анализа при помощи квазистатического метода обязательным является наличие начального искривления стержня. В противном случае, во-первых, невозможным становится удовлетворение начальных условий и, во-вторых, метод анализа с учетом начальных несовершенств свободен от такого противоречия, которое является следствием (1.13), что начальный прогиб при ползучести может уменьшаться. Далее в работах [13, 14] С. А. Шестериков приводит результаты теоретических исследований стержней, имеющих начальное искривление, на примере различных материалов.

Классический подход также используется в работах [19, 46].

Четвертый подход к решению задачи устойчивости при ползучести относится к несовершенным системам и распространяет критерий начальных несовершенств на случай ползучести. Значительные теоретические исследования в

данном направлении были выполнены Н. Хоффом, В.И. Розенблумом, Ф. Шенли, М. Жычковским.

Н. Хофф [31, 32, 34, 35] исследовал потерю устойчивости стержней, материал которых описывался нелинейными уравнениями, позволявшими учесть установившуюся и неуставившуюся ползучесть. Предполагалось, что форма прогиба имеет вид полуволны синусоиды, но так как уравнения нелинейные, то не удавалось автоматически удовлетворить их по координате. Для разделения переменных использовался не метод коллокаций, упомянутый ранее, а все функции, в которые входили синусы, раскладывались в ряд Фурье. Таким образом было выполнено разделение переменных (в рядах брались только первые члены). Н. Хофф пришел к выводам, что потеря устойчивости имеет место при любой сжимающей силе, какой бы малой ни была она. Данный вывод достаточно очевиден для материалов с неограниченной ползучестью (металлы при высокой температуре), но несправедлив для материалов с ограниченной ползучестью (бетоны, дерево, полимеры)

В работе [33] Н. Хоффом приведены результаты экспериментальных исследований металлических стержней при высоких температурах, которые дают приемлемое совпадение с приближенными расчетами, основанными на использовании изохронных диаграмм $\sigma(\varepsilon)$. Наблюдается совпадение качественного характера кривой роста прогиба от времени. Н. Хофф определяет критическое время как момент, в который происходит резкий рост стрелы прогиба.

А. Фрейденталь [51] провел исследование на основе линейного уравнения связи. Им также сделан вывод о существовании критического времени. В дальнейшем другими авторами была неоднократно показана неверность этого вывода. Если материал стержней описывается линейным уравнением связи, то критического времени, в том смысле как оно определено у Н. Хоффа, не существует. Прогиб в этом случае растет монотонно по экспоненциальному закону. Условно величину критического времени можно определить, ограничиваясь конкретным значением стрелы прогиба, или скорости его роста.

В работе [52] А. М. Проценко приводит результаты решения задач о выпучивании сжато-изогнутого стержня, в случае линейной наследственной теории ползучести. Задавая различные отношения $\frac{F}{F_3}$, он получил различные кривые роста прогиба с течением времени. Ни на одной из них нет явно выраженного участка резкого возрастания прогиба.

Интересная задача была решена В. И. Розенблумом [53]. Он взял за основу уравнение течения:

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = f(\sigma^2, t)\sigma + \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt} \quad (1.14)$$

Рассматривая стержень с произвольным поперечным сечением, автор решал задачу при помощи вариационного метода. Полученные им уравнения требовали применения численных методов. В. И. Розенблум провел исследование, при функции f , имеющей вид $f = B(t)|\sigma|^{m-1}$. Автор пришел к следующему выводу: в течение почти всего интервала времени от t_0 до t^* прогибы малы и не превышают высоту сечения стержня. Резкий рост наблюдается при $t \cong t^*$.

Индийскому ученому Р. Desayi принадлежит еще одна работа, в которой использован критерий начальных несовершенств [54]. В данной работе рассматривался стержень с начальной погибью при совместном действии продольной сжимающей силы и распределенной по длине стержня продольной нагрузки. Закон, которому подчиняется материал стержня, имеет вид: $\dot{\varepsilon} = \left(\frac{\sigma}{\lambda}\right)^m$. Упругие деформации не учитываются. Автор получил выражение для величины критического времени, используя критерий стремления к бесконечности прогиба стержня. При этом критическое время зависит от начальной погиби. Подобные результаты приведены в работе [55], в которой в уравнении связи учитываются еще и упругие деформации.

Стоит выделить еще несколько работ, которые отличаются оригинальными математическими методами. В работе [56] автором рассмотрен стержень, имеющий прямоугольное сечение. Уравнение связи для материала стержня имеет нелинейный вид. Всё это обуславливает существенные трудности при решении

задачи. Но автору эти трудности удастся обойти, используя метод последовательных приближений. Указанный метод позволяет без дополнительных предположений упростить решение. Расчет выполнялся численно при помощи ПЭВМ. Уравнение связи принималось в виде $\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + A\sigma^m$. На кривых изменения прогиба во времени не наблюдалось резкого возрастания.

Учет геометрической нелинейности также приводит к достаточно сложному расчету [57, 58]. Авторами были найдены оригинальные способы решения довольно сложных нелинейных уравнений. Однако выводы, которые были получены при решении, экспериментального подтверждения не получили.

В работах [42, 59] проводится исследование выпучивания стержней с применением различных уравнений связи. Рассматриваются как линейные, так и нелинейные теории ползучести.

В работах [60, 61] в отличие от многих других исследований рассматриваются неоднородные стержни, которые состоят из двух или более материалов, имеющих различные свойства. В статье [60] исследуется простейшая модель стеклопластика. Если говорить о поперечном сечении стержня, то внутренний его элемент принимается упругим, а внешний состоит из вязкого материала, который подчиняется степенному закону ползучести.

В указанной выше работе установлено, что существование критического времени возможно для нагрузок, которые лежат между верхней и нижней критическими силами. Нижняя соответствует внутреннему упругому элементу, а верхняя вычисляется для всего стержня с приведенным модулем упругости. Приводятся зависимости от нагрузки критического времени. При критическом времени, стремящемся к бесконечности, кривые приближаются к асимптоте, соответствующей нижней критической силе.

Рассмотрим теперь экспериментальные исследования по выпучиванию стержней при ползучести. Такого рода эксперименты требуют большой точности при проведении. Этим обусловлен существенный разброс результатов, который указывается многими исследователями.

Явление ползучести характерно для многих полимеров при повышенных и нормальных температурах, а также для некоторых металлов и сплавов при высоких температурах. При нормальных температурах скорость ползучести полимеров относительно невелика. Поэтому испытания на устойчивость при ползучести требуют значительного времени. Исследования устойчивости полимерных оболочек, в том числе и экспериментальные, приводятся в работах Тетерса [40]. Остальные эксперименты по выпучиванию выполнялись на металлических стержнях.

Имеются работы по выпучиванию металлических оболочек при ползучести [62, 63, 64]. Качественные результаты, полученные в этих работах, близки по своему характеру к потере устойчивости стержней. Так, в [50] указывается, что у тонких оболочек после длительного медленного деформирования происходит хлопок. Несмотря на большое число испытаний (около 70 оболочек) наблюдается значительный разброс количественных результатов. В работе [64] получен такой же качественный характер кривых роста деформаций.

Из немногочисленных работ по выпучиванию стержней необходимо отметить упоминавшуюся ранее работу А.П. Кузнецова [50]. Она была выполнена на стержнях из дуралюмина, имеющих температуру 300°C . Стержни имели шарнирное опирание по концам, прогибы фиксировались при помощи индикаторов через определенные интервалы времени. А.П. Кузнецов отмечает, что, как правило, рост прогиба наблюдается с самого начала. Критическим считалось время, когда происходит разрушение стержня. Вблизи этого времени наблюдался резкий рост прогиба. В данной работе также выполнено сравнение экспериментальных и теоретических результатов. По критерию критической деформации получено удовлетворительное совпадение.

Еще одна интересная работа [65] посвящена исследованию влияния на критическое время эксцентриситета продольной силы. Данная работа имеет очень важное значение, так как в ней предлагаются пути корректирования результатов. Испытания проводились не в условиях ползучести, а путем сжатия с постоянной скоростью. Качественно зависимости прогиба от времени одинаковы при всех

значениях эксцентриситетов. К сожалению, эксперименты выполнялись в области очень малых прогибов, в то время как другими исследователями установлено, что в смысле потери устойчивости характерными являются прогибы, сопоставимые с толщиной стержня.

Относительно полученных результатов по выпучиванию стержней в условиях ползучести, можно сделать следующие выводы. Большинство экспериментальных и теоретических работ указывают на то, что рост прогибов стержней происходит с момента приложения нагрузки.

В некоторый момент времени, называемый критическим, происходит резкий рост стрелы прогиба. Критическое время сильно зависит от величины сжимающей силы. Большинство экспериментальных работ проводилось для нагрузок, близких к мгновенной критической силе. Теоретические исследования дают возможность изучить характер поведения стержней при меньших значениях сжимающей силы. В зависимости от того, какое используется уравнение связи, качественные результаты получаются различными.

Одни авторы приходят к выводам, что потеря устойчивости имеет место при любой, сколь угодно малой нагрузке; другие приходят к выражению для нижней критической силы. При сжатии стержня силой меньшей, чем нижняя критическая, не происходит потери устойчивости, и стрела прогиба стержня стремится к конечному значению.

Как правило, реальное поведение материалов, для которых характерно явление ползучести, описывается нелинейными уравнениями, и при решении задач это приводит к значительным математическим трудностям.

Данное обстоятельство заставляет вводить многочисленные предположения для получения приемлемых результатов сравнительно простыми способами. Небольшое количество экспериментов, а также разрозненность не только результатов, но и подходов при теоретическом исследовании не позволяет считать исчерпанным вопрос выпучивания стержней при ползучести.

1.2 Уравнение связи Максвелла-Гуревича для полимерных стержней.

Дискретный спектр времен релаксации.

В литературе широко известно уравнение Максвелла-Томпсона для случая одноосного напряжённого состояния, в котором коэффициент вязкости является константой [66, 67]. Описание с помощью этого уравнения реологического поведения сетчатых и многих линейных полимеров даёт неудовлетворительные результаты. Г. И. Гуревичем в работах [68, 69, 70] было выполнено обобщение данного уравнения с учетом сильной зависимости времени релаксации от напряжений, температуры и самой высокоэластической деформации, а также развитие его на случай трехосного напряженного состояния. А. Л. Рабиновичем в работах [71, 72] был проведен дальнейший анализ этого уравнения с применением его к некоторым задачам.

Полная система уравнений связи в тензорных обозначениях имеет вид:

$$\frac{d\varepsilon_{ik}}{dt} = \frac{de_{ik}}{dt} + \frac{d\varepsilon_{ik}^{\circ}}{dt} + \frac{d\varepsilon_{ik}^*}{dt} + \alpha \frac{dT}{dt} \delta_{ik}, \quad (i, k = 1, 2, 3), \quad (1.15)$$

где e_{ik} – упругая деформация; ε_{ik}° – остаточная деформация; ε_{ik}^* – высокоэластическая деформация; T – температура; δ_{ik} – символ Кронекера.

Для скоростей деформаций это означает следующее: скорость полной деформации $\frac{d\varepsilon_{ik}}{dt}$ – это сумма скоростей компонентов деформации.

Для отдельных компонентов деформации уравнения связи имеют вид:

$$e_{ik} = \left(\sigma_{ik} \frac{3\mu}{1+\mu} p \delta_{ik} \right) \frac{1}{2G}, \quad (i, k = 1, 2, 3); \quad (1.16)$$

$$\frac{\partial \varepsilon_{ik}^{\circ}}{\partial t} = \frac{3}{2} (\sigma_{ik} - p \delta_{ik}) \frac{1}{\eta^{\circ}}, \quad (i, k = 1, 2, 3); \quad (1.17)$$

$$\frac{\partial \varepsilon_{ik}^*}{\partial t} = \left[\frac{3}{2} (\sigma_{ik} - p \delta_{ik}) - E_{\infty} \varepsilon_{ik}^* \right] \frac{1}{\eta^*}, \quad (i, k = 1, 2, 3), \quad (1.18)$$

где $p = \frac{(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})}{3}$ – среднее напряжение; η° и η^* – инвариантные функции главных напряжений и температуры, а последняя, η^* , является функцией и от высокоэластической деформации для главных направлений. Эта величина

пропорциональна времени релаксации. Формула (1.16) представляет собой закон Гука, а уравнения (1.17) и (1.18) – это обобщенные уравнения Максвелла. При этом последнее уравнение описывает поведение релаксирующей среды. Многими авторами было показано, что у сетчатых полимеров практически отсутствует остаточная деформация. С учетом этого, уравнения связи (1.16) – (1.18) для одноосного напряженного состояния переписутся в виде:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} = \frac{1}{E} \frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{f^*}{\eta^*}, \quad (1.19)$$

где $f^* = \left(1 + \frac{E_\infty}{E}\right) \sigma - E_\infty \varepsilon = \sigma - E_\infty \varepsilon^*$ – функция напряжений, ε – полная деформация; ε^* – высокоэластическая составляющая деформации (деформация ползучести); σ – напряжение; E – модуль упругости; E_∞ – модуль высокоэластичности, η^* – релаксационная вязкость.

В свою очередь релаксационная вязкость η^* – это функция напряжений и деформаций. При отсутствии объемных деформаций зависимость релаксационной вязкости от напряжения и высокоэластической деформации имеет вид:

$$\frac{1}{\eta^*} = \frac{1}{\eta_0^*} e^{\left(\frac{|f^*|}{m^*}\right)}, \quad (1.20)$$

где η_0^* – коэффициент начальной релаксационной вязкости, m^* – модуль скорости.

Величина η_0^* является экспоненциальной функцией температуры, ее развернутое выражение приводится в [71]. Полное выражение для модуля скорости m^* через коэффициент Больцмана и температуру также дано в [71].

В настоящей диссертационной работе зависимость параметров η_0^* и m^* от температуры для некоторых материалов будет приведена в главе 4. В главах 2-3 они считаются заранее известными константами полимера. Методики определения этих констант приводятся в работе [73].

Уравнение (1.19) представляет собой обобщенное нелинейное уравнение Максвелла-Гуревича для одного члена спектра. В общем случае, ввиду сложности строения, неоднородности, как на молекулярном, так и на более высоких уровнях, для многих полимеров характерен дискретный спектр времен релаксации, так что

в правой части (1.19) должна стоять сумма нескольких членов. Деформация ползучести при этом запишется в виде:

$$\varepsilon^* = \sum_{s=1}^n \varepsilon_s^*. \quad (1.21)$$

Скорость роста каждой составляющей спектра определяется следующим образом:

$$\frac{\partial \varepsilon_s^*}{\partial t} = \frac{f_s^*}{\eta_s^*} = \frac{\sigma - E_{\infty s}}{\eta_{0s}^*} \exp\left(\frac{|\sigma - E_{\infty s}|}{m_s^*}\right). \quad (1.22)$$

При учете нескольких членов спектра вычисления сильно затрудняются. Было многократно показано, что в разных режимах нагружения роль различных членов спектра меняется [73, 71, 74]. В результате анализа данных экспериментов в работах [73, 75, 76] показывается, что при решении конкретных задач механики полимеров достаточно учета только двух составляющих высокоэластической деформации: «старшей» и «младшей». Старшей считается составляющая с наибольшим модулем высокоэластичности $E_{\infty s}$ (т.е. $E_{\infty 1} > E_{\infty 2}$) и наименьшим коэффициентом релаксационной вязкости η_{0s}^* (т.е. $\eta_{01}^* < \eta_{02}^*$).

В ряде работ [77, 78, 79, 80, 81, 82, 83, 84] учитывается только «старшая» составляющая высокоэластической деформации и при решении задач используется одночленное уравнение с соответственно выбранными константами. Объясняется это тем, что потеря устойчивости происходит в течение относительно непродолжительного временного периода. В настоящей работе будет проведено сравнение результатов, получаемых с учетом одного и двух членов спектра.

ГЛАВА 2. УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ С УЧЕТОМ ПОЛЗУЧЕСТИ ПРИ ДЕЙСТВИИ МЕХАНИЧЕСКИХ НАГРУЗОК

2.1 Вывод уравнений для шарнирно опертого стержня

Рассмотрим шарнирно опертый по концам стержень, сжимаемый силой F , и имеющий начальную погибь в плоскости наименьшей жесткости $v_0 = f(x)$ (рисунок 2.1 а).

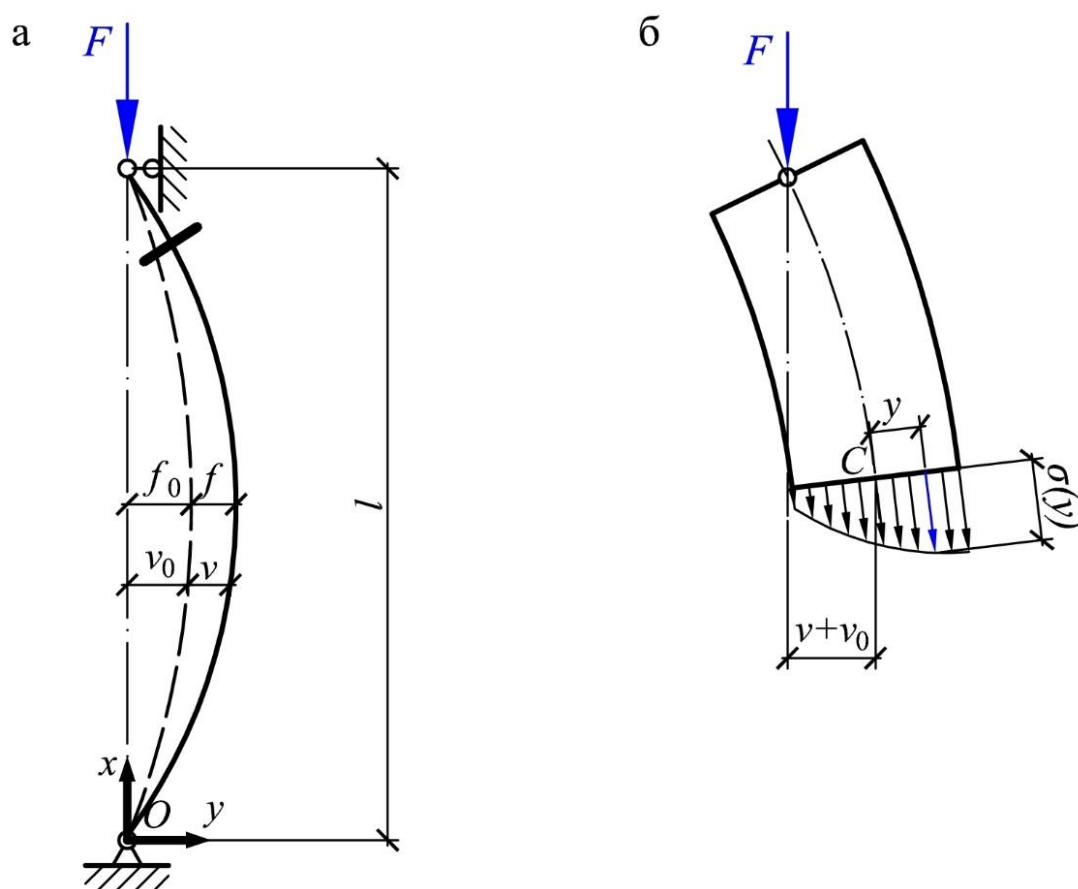


Рисунок 2.1 — К расчету на устойчивость сжатого стержня при ползучести

Будем использовать модель вязкоупругого материала, в соответствии с которой полная деформация представляется в виде суммы упругой деформации и деформации ползучести ε^* :

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \varepsilon^* \quad (2.1)$$

Причем модуль упругости E может быть переменным по длине стержня, т.е. $E = f(x)$, а ε^* – функция от x и y .

Положительными будем считать растягивающие напряжения, что отражено на рисунке 2.1 б.

В соответствии с гипотезой плоских сечений, полная деформация стержня ε представляет собой сумму осевой деформации ε_0 и деформации, вызванной изменением кривизны:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 - y \frac{d^2 v}{dx^2}. \quad (2.2)$$

Из уравнений (2.1) и (2.2) получим:

$$\sigma = E \left(\varepsilon_0 - y \frac{d^2 v}{dx^2} - \varepsilon^* \right). \quad (2.3)$$

Рассмотрим равновесие отсеченной части стержня (рис. 2.1 б). Составим сумму моментов относительно центра тяжести поперечного сечения:

$$\sum M_C = 0: F(v + v_0) - \int_A \sigma y dA = 0. \quad (2.4)$$

Составив сумму проекций всех сил на ось стержня в недеформированном состоянии, получим:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow F = - \int_A \sigma dA. \quad (2.5)$$

Подставим (2.3) в (2.4):

$$M = F(v + v_0) = E \left(\varepsilon_0 \int_A y dA - \frac{d^2 v}{dx^2} \int_A y^2 dA - \int_A \varepsilon^* y dA \right). \quad (2.6)$$

Величина $\int_A y dA$ представляет собой статический момент сечения, и она равна нулю; величина $I_z = \int_A y^2 dA$ — осевой момент инерции. Индекс «z» далее будет опущен.

Окончательно разрешающее уравнение для шарнирно опертого стержня переменной жесткости примет вид:

$$E(x)I(x)\frac{d^2v}{dx^2} + Fv = -(M_0 + M^*), \quad (2.7)$$

где $M_0 = Fv_0$, если стержень имеет начальную погибь; $M_0 = Fe$, если сила приложена с эксцентриситетом e ; $M^* = E \int_A \varepsilon^* y dA$.

Выражение для осевой деформации получим, подставив (2.3) в (2.5):

$$F = - \int_A E(\varepsilon_0 - y \frac{d^2v}{dx^2} - \varepsilon^*) dA = -EA\varepsilon_0 + \frac{d^2v}{dx^2} \int_A y dA + E \int_A \varepsilon^* dA. \quad (2.8)$$

$$\varepsilon_0 = -\frac{F}{EA} + \frac{1}{A} \int_A \varepsilon^* dA = \frac{N + N^*}{EA}, \quad (2.9)$$

где $N = -F$ – продольная сила в стержне, $N^* = E \int_A \varepsilon^* dA$.

Величины M^* и N^* можно рассматривать как дополнительную нагрузку, которую нужно приложить к упругому стержню, чтобы его прогиб и осевая деформация были такими же, как у вязкоупругого стержня.

2.2 Методика решения задачи

Уравнение (2.7) решается методом Бубнова–Галеркина, либо методом конечных разностей. Граничные условия имеют вид: $v(0) = v(l) = 0$.

При использовании метода конечных разностей интервал $x \in [0; l]$ разбивается на Nx частей Δx . Вторая производная прогиба в узле с номером i аппроксимируется следующим образом:

$$\left. \frac{d^2v}{dx^2} \right|_i = \frac{v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}}{\Delta x^2}. \quad (2.10)$$

Уравнение (2.7) с учетом (2.10) принимает вид:

$$E_i I_i \frac{v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}}{\Delta x^2} + Fv_i = f_i, \quad (2.11)$$

где $f_i = -(M_{0,i} + M_i^*)$.

Уравнение (2.11) составляется для всех узлов сетки кроме крайних. В итоге задача сводится к системе линейных алгебраических уравнений, имеющей вид:

$$[A]\{X\} = \{B\}, \quad (2.12)$$

$$\text{где } [A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & c_3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{Nx} & b_{Nx} & c_{Nx} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \{B\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ f_2 \\ f_3 \\ \dots \\ f_{Nx} \\ 0 \end{Bmatrix}, \{X\} = \begin{Bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \dots \\ v_{Nx} \\ v_{Nx+1} \end{Bmatrix}.$$

Коэффициенты матрицы A определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} a_i &= c_i = \frac{E_i I_i}{\Delta x^2}; \\ b_i &= -\frac{2E_i I_i}{\Delta x^2} + F. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Временной интервал t , на котором исследуется процесс ползучести, разбивается на n шагов Δt . Для определения деформаций ε^* в каждый момент времени можно использовать линейную аппроксимацию по времени:

$$\frac{\partial \varepsilon^*}{\partial t} \approx \frac{\varepsilon_{t+\Delta t}^* - \varepsilon_t^*}{\Delta t} \Rightarrow \varepsilon_{t+\Delta t}^* = \varepsilon_t^* + \frac{\partial \varepsilon^*}{\partial t} \Delta t. \quad (2.14)$$

Такой прием используется в работах [85, 77, 86, 87, 88], однако он является не очень эффективным, и для получения приемлемых результатов требуется достаточно густая сетка по времени. Поэтому вместо линейной аппроксимации производной предлагается использовать метод Рунге-Кутты четвертого порядка.

Пусть закон ползучести задан в следующем виде:

$$\frac{\partial \varepsilon^*}{\partial t} = f(t, \varepsilon^*), \quad \varepsilon^*|_{t=0} = 0. \quad (2.15)$$

В виде (2.15) может быть представлено и уравнение Максвелла-Гуревича. Приближенное значение деформации ползучести в момент времени $t + \Delta t$ вычисляется по итерационной формуле:

$$\varepsilon_{t+\Delta t}^* = \varepsilon_t^* + \frac{\Delta t}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4). \quad (2.16)$$

Вычисление значения $\varepsilon_{t+\Delta t}^*$ происходит в 4 стадии:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t, \varepsilon_t^*); \\ k_2 &= f\left(t + \frac{\Delta t}{2}, \varepsilon_t^* + \frac{\Delta t}{2} k_1\right); \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$k_3 = f\left(t + \frac{\Delta t}{2}, \varepsilon_t^* + \frac{\Delta t}{2} k_2\right);$$

$$k_4 = f(t + \Delta t, \varepsilon_t^* + \Delta t k_3).$$

На каждом шаге по времени в уравнение (2.7) сначала подставляются величины $\varepsilon_t^*(x, y)$, затем определяются значения $k_1(x, y)$ в каждой точке. Далее вместо ε^* в уравнение (2.7) последовательно подставляются величины $\varepsilon_t^* + \frac{\Delta t}{2} k_1$, $\varepsilon_t^* + \frac{\Delta t}{2} k_2$ и $\varepsilon_t^* + \Delta t k_3$. Таким образом, на каждом шаге по времени необходимо 4 раза решать систему уравнений (2.12). Матрица $[A]$ в процессе всех вычислений остается неизменной, меняется только вектор $[B]$. Поэтому целесообразно один раз вычислить матрицу $[A]^{-1}$ и определять $\{X\}$, не решая систему уравнений по методу Гаусса или прогонки, а перемножением матрицы $[A]^{-1}$ на вектор $\{B\}$:

$$\{X\} = [A]^{-1}\{B\}. \quad (2.18)$$

Для прямоугольного поперечного сечения интегралы по площади, входящие в (2.7) и (2.8) сводятся к определенным интегралам:

$$\int_A \varepsilon^* y dA = b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \varepsilon^* y dy;$$

$$\int_A \varepsilon^* dA = b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \varepsilon^* dy. \quad (2.19)$$

В работах [80, 89] для расчета стержня круглого сечения вводится сетка по r и φ . Однако двойной интеграл по площади сводится к определенному интегралу и для круглого сечения, т.к. деформация ползучести ε^* в поперечном сечении зависит только от y .

$$\int_A \varepsilon^* y dA = \int_{-R}^R \varepsilon^* y b(y) dy = 2 \int_{-R}^R \varepsilon^* y \sqrt{R^2 - y^2} dy; \quad (2.20)$$

$$\int_A \varepsilon^* dA = 2 \int_{-R}^R \varepsilon^* \sqrt{R^2 - y^2} dy.$$

Сечение по высоте разбивается на Ny частей Δy . Интегралы, в которые входят деформации ползучести, вычисляются численно при помощи формулы трапеций:

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \varepsilon^* y dy = \Delta y \left(\frac{\varepsilon_1^* y_1}{2} + \sum_{i=2}^{Ny} \varepsilon_i^* y_i + \frac{\varepsilon_{Ny+1}^* y_{Ny+1}}{2} \right). \quad (2.21)$$

Для сравнения результатов расчета при помощи линейной аппроксимации производной и с использованием метода Рунге-Кутты была решена модельная задача для стержня постоянной жесткости из сетчатого полимера ЭДТ-10. Исходные данные при этом были следующие: длина стержня $l = 157$ мм, сечение круглое, $d = 10$ мм, $E = 2950$ МПа.

Расчет велся с учетом только одного члена спектра времен релаксации ε_1^* . Реологические константы: $E_{\infty l} = 3150$ МПа, $\eta_{0,1}^* = 10^{10}$ МПа·с, $m_1^* = 3.5$ МПа. Начальная погибь задавалась в виде: $v_0(x) = f_0 \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right)$, $f_0 = 0.16$ мм. Величина сжимающей силы: $F = 500$ Н.

На рисунке 2.2 представлены графики роста стрелы прогиба при различном числе шагов по времени n . Сплошным линиям соответствуют результаты, полученные с использованием линейной аппроксимации производной по времени. Синей линией показан результат при $n = 10$, черной – при $n = 30$, зеленой – при $n = 100$, красной – при $n = 500$. Синей штриховой линии соответствует результат, полученный при помощи метода Рунге-Кутты четвертого порядка при $n = 10$.

Из представленных графиков видно, что при использовании метода Рунге-Кутта разбиение на 10 шагов дает такой же результат в конечный момент времени, что и разбиение на 500 шагов при линейной аппроксимации производной. Таким образом скорость вычислений увеличивается в $\frac{500}{10 \cdot 4} = 12.5$ раз. Также из рисунка 2.2 видно, что при использовании линейной аппроксимации по времени резкий

рост прогиба проявляется позднее, чем при расчете по методу Рунге-Кутты. Это отражается на величине критического времени: применение формулы (2.15) дает завышенную оценку $t_{кр}$.

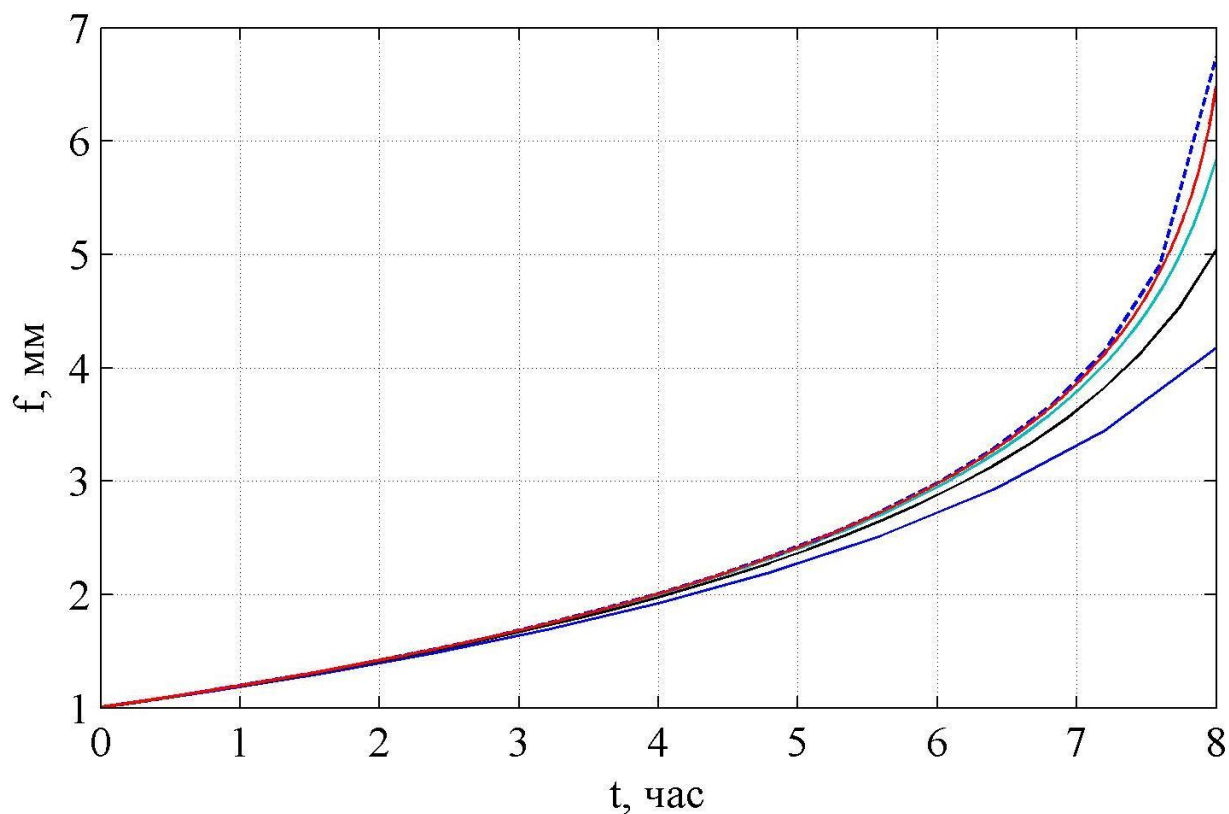


Рисунок 2.2 – Графики роста стрелы прогиба

Также было выполнено сравнение результатов решения задачи для образца из эпоксидной смолы ЭДТ-10 прямоугольного сечения с известными решениями доц. И. И. Кулинича и академика РААСН, проф. В. И. Андреева.

Размеры сечения $b = 15\text{ мм}$, $h = 8\text{ мм}$. Величина сжимающей силы $F = 680\text{ Н}$. Стержень не имеет начальной погиби, но сила приложена с эксцентриситетом $e = 0.16\text{ мм}$. Расчетная схема приведена на рисунке 2.3. Остальные данные такие же, как предыдущей задаче.

Результаты сравнения по напряжениям в середине пролета приведены в таблице 2.1 (положительным напряжениям соответствует сжатие). Стержень по длине разбивался на 50 частей, по высоте на 100 частей, а по времени – на 20 шагов. Величинами σ_1 , σ_2 и σ_3 соответственно обозначены результаты, полученные

автором, академиком РААСН, проф. В.И. Андреевым и к.т.н., доц. И.И. Кулиничем.

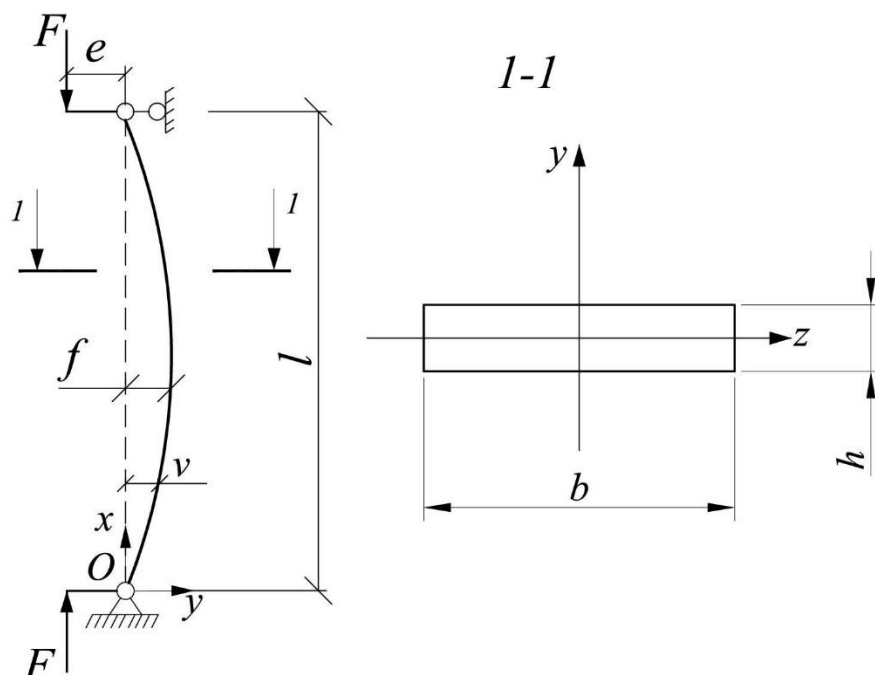


Рисунок 2.3 – Расчетная схема внецентренно сжатого стержня

Таблица 2.1 – Сравнение решения автора с результатами других авторов

y, мм	t = 54 мин			t = 108 мин			t = 162 мин		
	σ_1 , МПа	σ_2 , МПа	σ_3 , МПа	σ_1 , МПа	σ_2 , МПа	σ_3 , МПа	σ_1 , МПа	σ_2 , МПа	σ_3 , МПа
-4	16,062	16,002	16,000	19,500	19,800	19,310	54,893	31,632	34,435
-2	11,186	11,147	11,152	13,423	13,586	13,305	35,365	21,134	22,893
0	5,780	5,780	5,780	5,992	6,010	5,982	7,217	6,680	6,692
2	-0,238	-0,274	-0,270	-1,856	-2,001	-1,947	-23,71	-9,189	-9,396
4	-5,325	-5,247	-5,254	-9,688	-10,00	-9,860	-46,13	-23,80	-23,88

Из представленной таблицы видно, что в моменты времени $t = 54$ мин и $t = 108$ мин результаты автора очень близки к решению В. И. Андреева [78] и И. И. Кулинича [90]. Однако при $t = 142$ мин наблюдается существенное расхождение по напряжениям. Объясняется это тем, что момент времени $t = 142$ мин близок к критическому. Потеря устойчивости

сопровождается резким ростом не только прогиба, но и напряжений. Метод Рунге-Кутты позволяет более точно поймать этот момент.

График роста напряжений в середине пролета при $y = -h/2$ показан на рисунке 2.4. Знаку «+» соответствует сжатие.

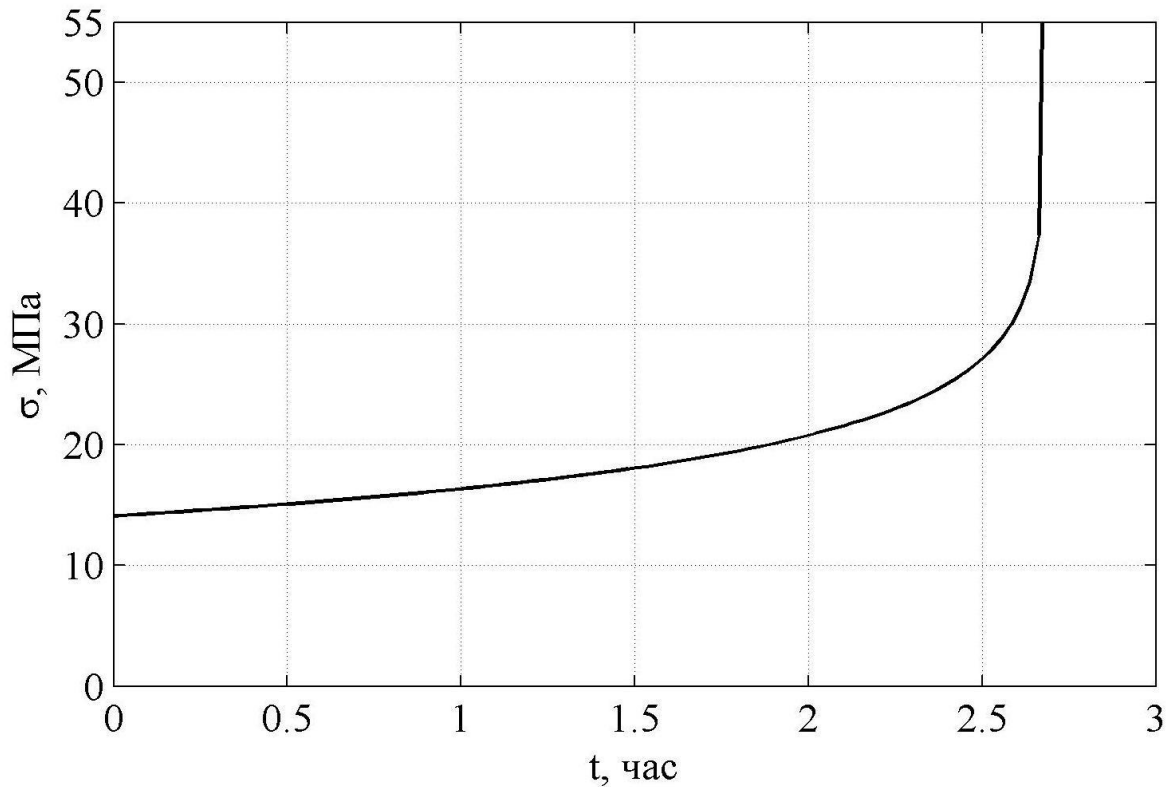


Рисунок 2.4 – График роста напряжений в середине пролета

Рисунок 2.5 – распределение напряжений по высоте сечения в середине пролета стержня в зависимости от времени. Из представленного графика видно, что при потере устойчивости наблюдается нелинейный характер эпюр напряжений по высоте.

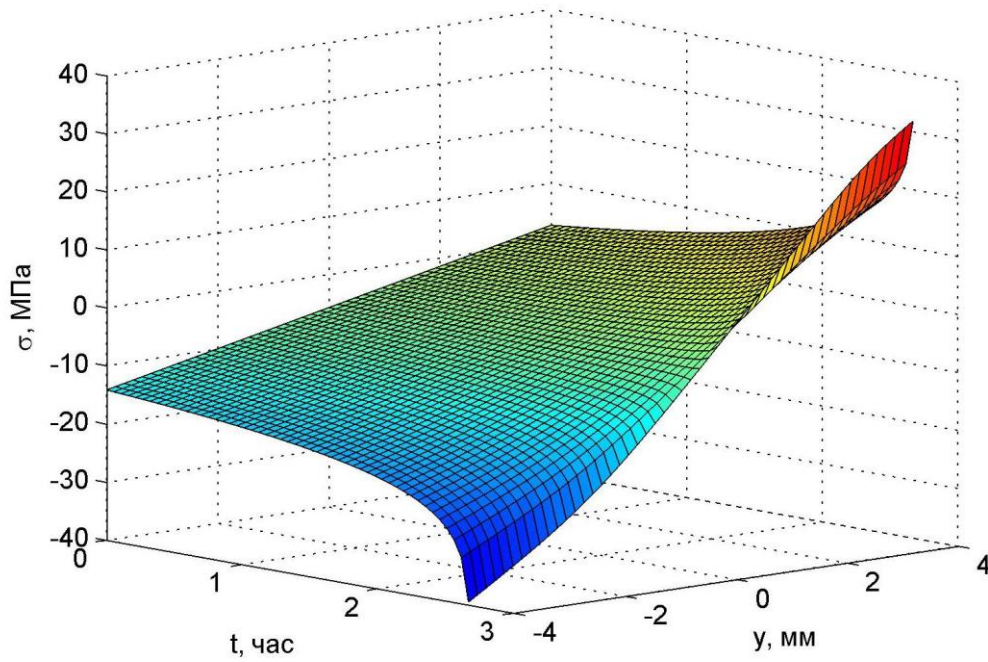


Рисунок 2.5 – Распределение напряжений по высоте сечения в середине пролета

2.3 Определение длительных критических нагрузок для сжатых полимерных стержней

В ряде работ [87, 67, 81] при анализе устойчивости в условиях линейной ползучести вводится понятие длительной критической силы $F_{\text{дл}}$. При $F < F_{\text{дл}}$ прогиб стержня затухает, при $F = F_{\text{дл}}$ прогиб растет с постоянной скоростью, а при $F > F_{\text{дл}}$ скорость роста стрелы прогиба монотонно возрастает.

Чтобы найти длительную критическую силу для материала, подчиняющегося закону Максвелла–Гуревича, проанализируем данное уравнение при $t \rightarrow \infty$. Допустим, что при времени, стремящемся к бесконечности, прогиб стремится к конечному значению. Тогда в конце процесса ползучести равны нулю скорости роста каждой составляющей ε_s^* :

$$\frac{\partial \varepsilon_s^*}{\partial t} = 0 \Rightarrow f_s^* = 0. \quad (2.22)$$

Приравнявая к нулю функции напряжений f_s^* , получим предельные величины каждой составляющей спектра:

$$f_s^* = 0 \Rightarrow \sigma - E_{\infty s} \varepsilon_s^* = 0 \Rightarrow \varepsilon_{s, \text{пред}}^* = \frac{\sigma}{E_{\infty s}}. \quad (2.23)$$

Подставим (2.23) в (2.1):

$$\varepsilon = \sigma \left(\frac{1}{E} + \frac{1}{E_{\infty 1}} + \frac{1}{E_{\infty 2}} + \dots \right) = \sigma \left(\frac{1}{E} + \sum_{s=1}^n \frac{1}{E_{\infty s}} \right). \quad (2.24)$$

Введем величину длительного модуля H , определяемую по формуле:

$$\frac{1}{H} = \frac{1}{E} + \sum_{s=1}^n \frac{1}{E_{\infty s}}. \quad (2.25)$$

Уравнение (2.7) при $t \rightarrow \infty$ переписывается в виде:

$$H(x)I(x) \frac{d^2 v}{dx^2} + Fv = -M_0. \quad (2.26)$$

Полученное уравнение отличается от уравнения продольного изгиба упругого стержня, имеющего начальную погибь, только тем, что в нем вместо мгновенного модуля упругости $E(x)$ стоит величина $H(x)$. Таким образом, задача определения длительной критической нагрузки сводится к упругой путем замены мгновенного модуля на длительный.

Для стержня постоянной жесткости:

$$F_{\text{дл}} = \frac{\pi^2 H I}{l^2}. \quad (2.27)$$

Отметим, что условие $F < F_{\text{дл}}$ является необходимым, но не достаточным для того, чтобы прогиб затухал. Иными словами, можно утверждать, что при $F \geq F_{\text{дл}}$ стержень гарантированно потеряет устойчивость, но нельзя утверждать обратного.

Была решена модельная задача для стержня постоянной жесткости из полиметилметакрилата (ПММА) при следующих исходных данных: длина стержня $l = 157$ мм, сечение круглое, $d = 10$ мм, $E = 2940$ МПа. Учитывалась только «старшая» составляющая спектра времен релаксации ε_1^* . Реологические константы: $E_{\infty I} = 2500$ МПа, $\eta_{0,1}^* = 10^{10}$ МПа·с, $m_1^* = 4.5$ МПа. Длительная критическая сила для стержня составила $F_{\text{дл}} = 266$ Н.

На рисунке 2.6 представлены графики роста стрелы прогиба при $F = 245$ Н (кривая 1), $F = 266$ Н (кривая 2) и $F = 280$ Н (кривая 3).

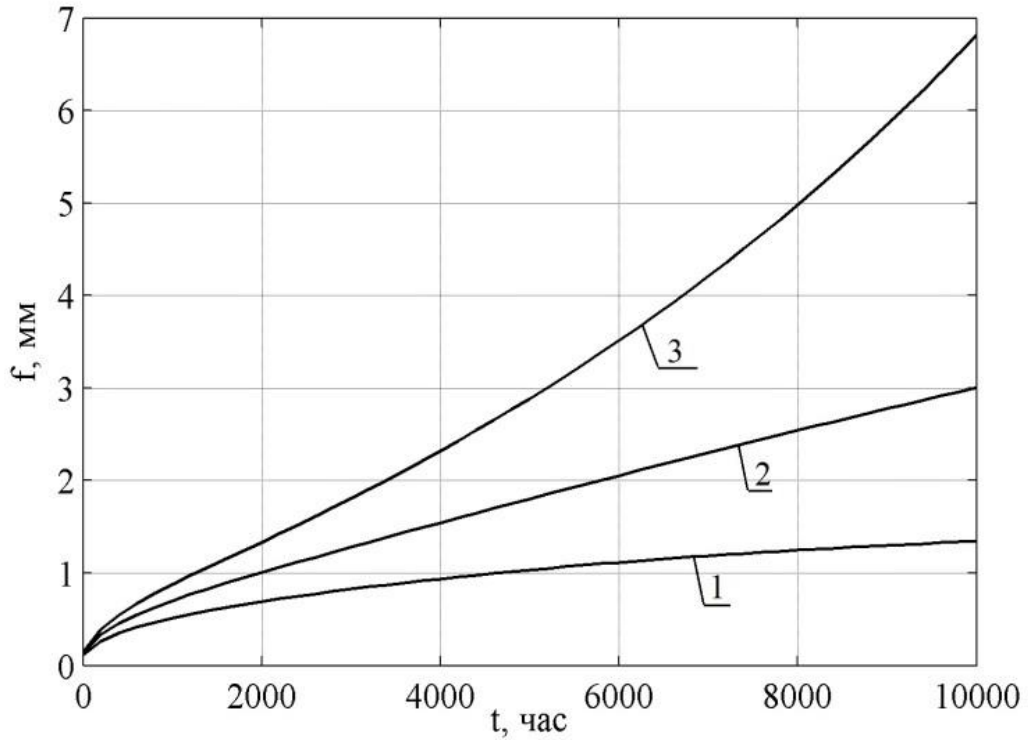


Рисунок 2.6 – Графики роста стрелы прогиба

Из рисунка 2.6 видно, что, в отличие от линейной ползучести, как при $F < F_{\text{дл}}$, так и при $F \geq F_{\text{дл}}$ имеется участок с затухающей скоростью роста стрелы прогиба $\frac{\partial f}{\partial t}$. Далее при $F = F_{\text{дл}}$ прогиб растет с постоянной скоростью, а при $F > F_{\text{дл}}$ величина $\frac{\partial f}{\partial t}$ возрастает.

Перепишем систему (2.12) в виде:

$$([C] + F[E])\{X\} = [B], \quad (2.28)$$

где $[E]$ – единичная матрица, $\{X\} = \{v_2 \ v_3 \ \dots \ v_{Nx}\}^T$, $[B] = \{f_2 \ f_3 \ \dots \ f_{Nx}\}^T$,

$$[C] = \frac{1}{\Delta x^2} \begin{bmatrix} -2E_2I_2 & E_2I_2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ E_3I_3 & -2E_3I_3 & E_3I_3 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & E_{Nx-1}I_{Nx-1} & -2E_{Nx-1}I_{Nx-1} & E_{Nx-1}I_{Nx-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & E_{Nx}I_{Nx} & -2E_{Nx}I_{Nx} \end{bmatrix}.$$

Мгновенную критическую силу можно найти из условия равенства нулю определителя системы (2.28):

$$\det([C] + F[E]) = 0. \quad (2.29)$$

Первой критической силой будет соответствовать минимальное по модулю из собственных значений матрицы $[C]$. Для определения длительной критической силы необходимо в матрице $[C]$ заменить E_i на H_i .

Для однородного стержня переменного сечения длительная критическая сила связана с мгновенной следующим образом:

$$F_{\text{дл}} = \frac{H}{E} F_{\text{мгн}}. \quad (2.30)$$

Представляет интерес сравнение уровня критической сжимающей силы для стержней с постоянной и переменной жесткостью. Из формулы (2.30) следует, что однородный стержень переменного сечения, для которого мгновенная критическая сила при заданной массе минимальна, будет оптимальным и при длительном действии нагрузок. Вопросы сравнения стержней постоянной и переменной жесткости будут рассмотрены в главе 3.

Из уравнения (2.26) можно также определить стрелу прогиба в конце процесса ползучести, если она стремится к конечному значению. Решение уравнения (2.26) имеет вид:

$$v(x) = f \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right). \quad (2.31)$$

Подставив (2.31) в (2.26), получим:

$$-\frac{\pi^2 H I}{l^2} f_{\infty} \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) + F f_{\infty} \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) = -F f_0 \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right); \quad (2.32)$$

$$f_{\infty} = \frac{f_0}{\frac{F_{\text{дл}}}{F} - 1}.$$

2.4 Вывод разрешающего уравнения с учетом вязкоупругости для произвольных вариантов закрепления

Уравнение (2.7) справедливо только для стержней, шарнирно опертых по концам. При произвольных вариантах закрепления можно воспользоваться методом Ритца-Тимошенко. Этот метод будет рассмотрен в параграфе 2.5. Также, чтобы удовлетворить произвольным граничным условиям, можно дважды

продифференцировать уравнение (2.26) по x . Для этого предварительно разделим левую и правую часть на изгибную жесткость $E(x)I(x)$. Основное разрешающее уравнение для произвольных вариантов закрепления концов стержня примет вид:

$$\frac{d^4 v}{dx^4} + F \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{v}{E(x)I(x)} \right) = - \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{M_0 + M^*}{E(x)I(x)} \right). \quad (2.33)$$

При решении уравнения (2.33) методом конечных разностей четвертая производная прогиба аппроксимируется следующим образом:

$$\left. \frac{d^4 v}{dx^4} \right|_i = \frac{v_{i+2} - 4v_{i+1} + 6v_i - 4v_{i-1} + v_{i-2}}{\Delta x^4}. \quad (2.34)$$

Второе слагаемое в правой части уравнения (2.33) запишется в виде:

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{v}{E(x)I(x)} \right) = \frac{1}{\Delta x^2} \left(\frac{v_{i+1}}{E_{i+1}I_{i+1}} - \frac{2v_i}{E_i I_i} + \frac{v_{i-1}}{E_{i-1}I_{i-1}} \right). \quad (2.35)$$

Уравнение МКР для i – го узла примет вид:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta x^4} v_{i+2} + \left(\frac{F}{\Delta x^2 E_{i+1} I_{i+1}} - \frac{4}{\Delta x^4} \right) v_{i+1} + \left(\frac{6}{\Delta x^4} - \frac{2F}{\Delta x^2 E_i I_i} \right) v_i \\ + \left(\frac{F}{\Delta x^2 E_{i-1} I_{i-1}} - \frac{4}{\Delta x^4} \right) v_{i-1} + \frac{1}{\Delta x^4} v_{i-2} = f_i, \end{aligned} \quad (2.36)$$

где $f_i = - \left. \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{M_0 + M^*}{E(x)I(x)} \right) \right|_i$.

Рассмотрим граничные условия для уравнения (2.33).

1. Жестко защемленный по концам стержень

Расчетная схема представлена на рисунке 2.7. Граничные условия имеют вид:

$$\begin{aligned} v(0) = v(l) = 0; \\ \left. \frac{dv}{dx} \right|_{x=0} = \left. \frac{dv}{dx} \right|_{x=l} = 0. \end{aligned} \quad (2.37)$$

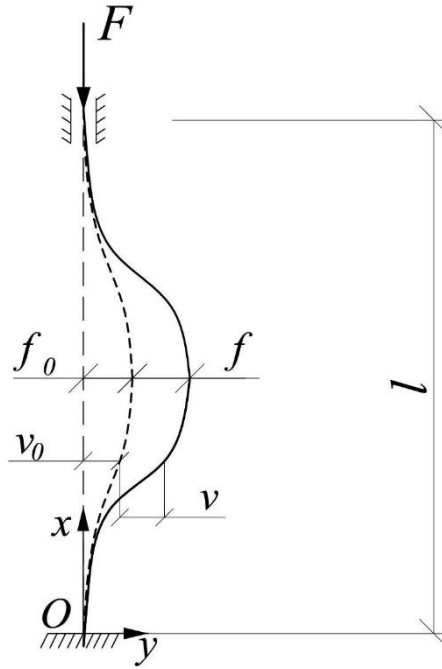


Рисунок 2.7 – Жестко защемленный по концам стержень

Аппроксимация граничных условий при $x = 0$ и $x = l$ показана на рисунке 2.8. С учетом этой аппроксимации уравнение (2.36) для узлов с номерами $i = 2$ и $i = Nx$ переписывается в виде:

$$\frac{1}{\Delta x^4} v_4 + \left(\frac{F}{\Delta x^2 E_3 I_3} - \frac{4}{\Delta x^4} \right) v_3 + \left(\frac{7}{\Delta x^4} - \frac{2F}{\Delta x^2 E_2 I_2} \right) v_2 = f_2; \quad (2.38)$$

$$\left(\frac{7}{\Delta x^4} - \frac{2F}{\Delta x^2 E_{Nx} I_{Nx}} \right) v_{Nx} + \left(\frac{F}{\Delta x^2 E_{Nx-1} I_{Nx-1}} - \frac{4}{\Delta x^4} \right) v_{Nx-1} + \frac{1}{\Delta x^4} v_{Nx-2} = f_{Nx}. \quad (2.39)$$

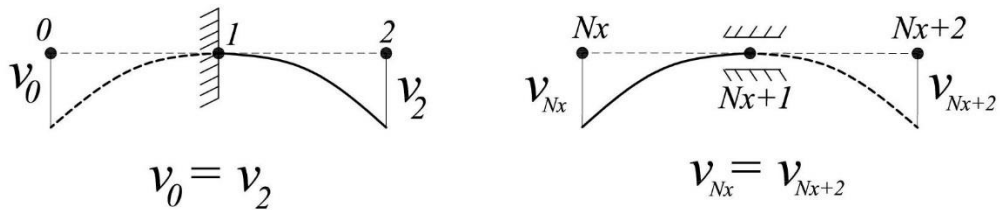


Рисунок 2.8 – Аппроксимация граничных условий при $x = 0$ и $x = l$ для жестко защемленного по концам стержня

Общий вид системы линейных алгебраических уравнений следующий:

$$([A] + F[B])\{X\} = \{C\}, \quad (2.40)$$

где

$$[A] = \frac{1}{\Delta x^4} \begin{bmatrix} 7 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 6 & -4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -4 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & -4 & 7 \end{bmatrix};$$

$$[B] = \frac{1}{\Delta x^2} \begin{bmatrix} \frac{-2}{E_2 I_2} & \frac{1}{E_3 I_3} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{E_2 I_2} & \frac{-2}{E_3 I_3} & \frac{1}{E_4 I_4} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{1}{E_{Nx-2} I_{Nx-2}} & \frac{-2}{E_{Nx-1} I_{Nx-1}} & \frac{1}{E_{Nx} I_{Nx}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{1}{E_{Nx-1} I_{Nx-1}} & \frac{-2}{E_{Nx} I_{Nx}} \end{bmatrix};$$

$$\{X\} = \{v_2 \ v_3 \dots v_{Nx}\}^T; \{C\} = \{f_2 \ f_3 \dots f_{Nx}\}^T.$$

Умножим (2.40) на $[B]^{-1}$:

$$([B]^{-1}[A] + F[E])\{X\} = [B]^{-1}\{C\}. \quad (2.41)$$

Мгновенную критическую силу найдем, приравняв к нулю определитель системы (2.41):

$$\det([B]^{-1}[A] + F[E]) = 0. \quad (2.42)$$

Первая критическая сила будет равна минимальному по абсолютной величине собственному значению матрицы $[B]^{-1}[A]$. Чтобы найти длительную критическую силу, нужно в матрице $[B]$ заменить E_i на H_i .

2. Вариант закрепления «защемление-свободный край»

Расчетная схема представлена на рисунке 2.9.

При $x = 0$ граничные условия аппроксимируются так же, как и для предыдущего варианта закрепления. На свободном конце первое граничное условие имеет вид:

$$M|_{x=l} = 0 \Rightarrow \left. \frac{d^2 v}{dx^2} \right|_{x=l} = 0. \quad (2.43)$$

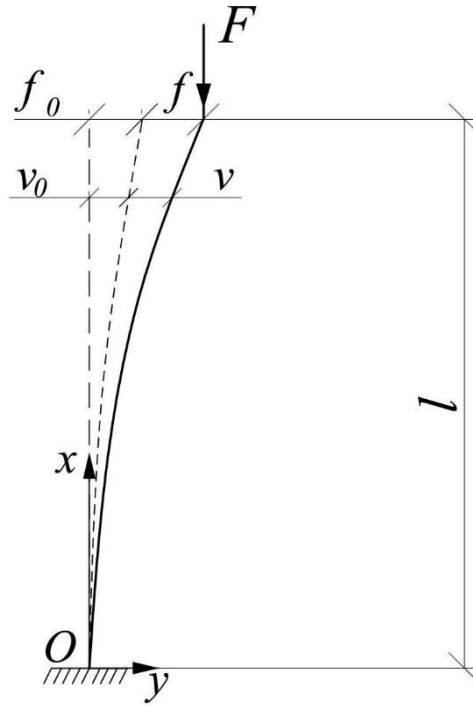


Рисунок 2.9 – Вариант закрепления «защемление-свободный край»

В произвольном сечении стержня изгибающий момент определяется следующим образом:

$$M(x) = -F(f - v - v_0) \quad (2.44)$$

Поперечная сила запишется в виде:

$$Q = \frac{dM}{dx} = F \left(\frac{dv}{dx} + \frac{dv_0}{dx} \right). \quad (2.45)$$

С другой стороны, изгибающий момент может быть найден следующим образом:

$$\begin{aligned} M &= \int_A \sigma y dA = E \left(\varepsilon_0 \int_A y dA - \frac{d^2 v}{dx^2} \int_A y^2 dA - \int_A \varepsilon^* y dA \right) = \\ &= -EI \frac{d^2 v}{dx^2} - M^*. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Дифференцируя (2.46), получим:

$$\begin{aligned} Q = \frac{dM}{dx} &= -\frac{d}{dx} \left(E(x)I(x) \frac{d^2 v}{dx^2} \right) - \frac{dM^*}{dx} \\ &= -\frac{d(E(x)I(x))}{dx} \frac{d^2 v}{dx^2} - E(x)I(x) \frac{d^3 v}{dx^3} - \frac{dM^*}{dx}. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Приравнявая (2.45) к (2.47), получим второе граничное условие при $x = l$:

$$\begin{aligned}
F \left(\frac{dv}{dx} + \frac{dv_0}{dx} \right) + \frac{d(E(x)I(x))}{dx} \frac{d^2v}{dx^2} + E(x)I(x) \frac{d^3v}{dx^3} + \frac{dM^*}{dx} = \\
= F \left(\frac{dv}{dx} + \frac{\pi f_0}{2l} \right) + EI \frac{d^3v}{dx^3} + \frac{dM^*}{dx} = 0.
\end{aligned} \tag{2.48}$$

Для удовлетворения условиям (2.43) и (2.48) необходимо ввести 2 законтурные точки с $i = Nx + 2$ и $i = Nx + 3$. Разностная аппроксимация условия (2.43) имеет вид:

$$\left. \frac{d^2v}{dx^2} \right|_{x=l} = \frac{v_{Nx+2} - v_{Nx+1} + v_{Nx}}{\Delta x^2} = 0. \tag{2.49}$$

Условие (2.48) запишется в виде:

$$\begin{aligned}
\frac{E_{Nx+1}I_{Nx+1}}{2\Delta x^3} (v_{Nx+3} - 2v_{Nx+2} + 2v_{Nx} - v_{Nx-1}) + F \frac{v_{Nx+2} - v_{Nx}}{2\Delta x} \\
= -\frac{1}{2\Delta x} (M_{Nx-1}^* - 4M_{Nx}^* + 3M_{Nx+1}^*) - \frac{F\pi f_0}{2l}.
\end{aligned} \tag{2.50}$$

В итоге задача также сводится к системе уравнений вида (2.40), однако порядок системы при этом получается $Nx + 2$.

3. Вариант закрепления «защемление-шарнир»

Расчетная схема представлена на рисунке 2.10. При $x = 0$ граничные условия такие же, как в случае жестко защемленного по концам стержня. При $x = l$ граничные условия имеют вид:

$$\begin{aligned}
v &= 0; \\
M &= 0 \Rightarrow \left. \frac{d^2v}{dx^2} \right|_{x=l} = 0.
\end{aligned} \tag{2.51}$$

Аппроксимация граничных условий при $x = l$ показана на рисунке 2.11.

При $i = Nx$ уравнение (2.36) примет вид:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{5}{\Delta x^4} - \frac{2F}{\Delta x^2 E_{Nx} I_{Nx}} \right) v_{Nx} + \left(\frac{F}{\Delta x^2 E_{Nx-1} I_{Nx-1}} - \frac{4}{\Delta x^4} \right) v_{Nx-1} + \frac{1}{\Delta x^4} v_{Nx-2} \\
= f_{Nx}.
\end{aligned} \tag{2.52}$$

По сравнению с вариантом «защемление-защемление» в матрице $[A]$ меняется только один коэффициент в правом нижнем углу. Остальные коэффициенты, а также матрица $[B]$ и вектор $[C]$ остаются неизменными.

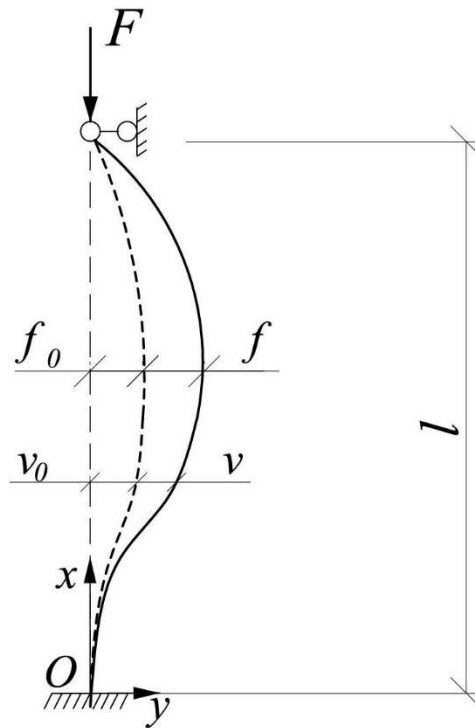


Рисунок 2.10 – Вариант закрепления «защемление-шарнир»

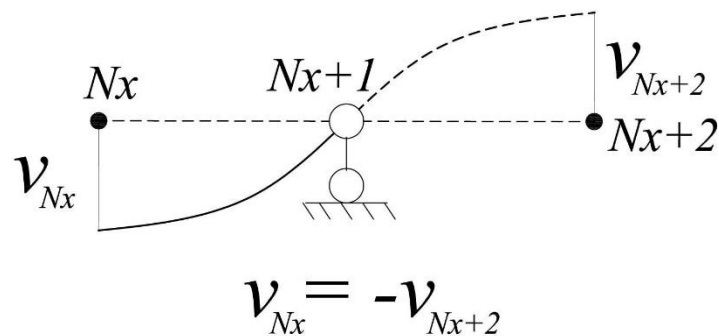


Рисунок 2.11 – Аппроксимация граничных условий при $x = l$ для варианта закрепления «защемление-шарнир»

2.5 Применение к задаче энергетического метода в форме Ритца-Тимошенко и метода Бубнова-Галеркина

Согласно методу Ритца-Тимошенко выбирается предполагаемая форма потери устойчивости в виде суммы функций с неопределенными коэффициентами a_i ($i = 1, \dots, n$):

$$v(x) = \sum_{i=1}^n a_i f_i. \quad (2.53)$$

Под f_i понимаются функции от x , удовлетворяющие кинематическим граничным условиям задачи, т.е. такие, которые относятся к прогибам и углам поворота, независимо от a_i .

Разрешающие уравнения для определения неизвестных коэффициентов ряда получаются из условия минимума полной потенциальной энергии $\mathcal{E}$ системы:

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial a_2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial a_n} = 0. \quad (2.54)$$

Полная потенциальная энергия стержня записывается в виде:

$$\mathcal{E} = \Pi - A, \quad (2.55)$$

где Π – потенциальная энергия деформации, A – работа внешних сил.

Потенциальная энергия деформации имеет вид:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V \sigma \varepsilon^{el} dV = \frac{1}{2} \int_V E (\varepsilon^{el})^2 dV. \quad (2.56)$$

Здесь под ε^{el} понимается упругая деформация, которая представляет разность между полной деформацией и деформацией ползучести:

$$\varepsilon^{el} = \varepsilon_0 - \frac{d^2 v}{dx^2} y - \varepsilon^* \quad (2.57)$$

Подставив (2.57) в (2.56), получим:

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{1}{2} \int_0^l E(x) dx \int_A \left\{ \varepsilon_0^2 + \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 y^2 + (\varepsilon^*)^2 + 2\varepsilon^* \frac{d^2 v}{dx^2} y - 2\varepsilon_0 \varepsilon^* - 2\varepsilon_0 \frac{d^2 v}{dx^2} y \right\} dA \\ &= \frac{1}{2} \int_0^l E(x) \left\{ I(x) \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 + 2 \frac{d^2 v}{dx^2} \int_A \varepsilon^* y dA + \int_A (\varepsilon^*)^2 dA \right. \\ &\quad \left. - 2\varepsilon_0 \int_A \varepsilon^* dA + \varepsilon_0^2 A \right\} dx. \end{aligned}$$

Сближение концов элементарного фрагмента dx стержня (см. рисунок 2.12) при выпучивании можно определить по формуле:

$$\begin{aligned}
\Delta(dx) &= dx \cdot \left(\cos\left(\frac{dv_0}{dx}\right) - \cos\left(\frac{dv}{dx} + \frac{dv_0}{dx}\right) \right) \\
&= -dx \cdot 2 \sin \frac{\frac{dv_0}{dx} + \left(\frac{dv}{dx} + \frac{dv_0}{dx}\right)}{2} \cdot \sin \frac{\frac{dv_0}{dx} - \left(\frac{dv}{dx} + \frac{dv_0}{dx}\right)}{2} \\
&= \left(\frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 + \frac{dv}{dx} \frac{dv_0}{dx} \right) dx.
\end{aligned}$$

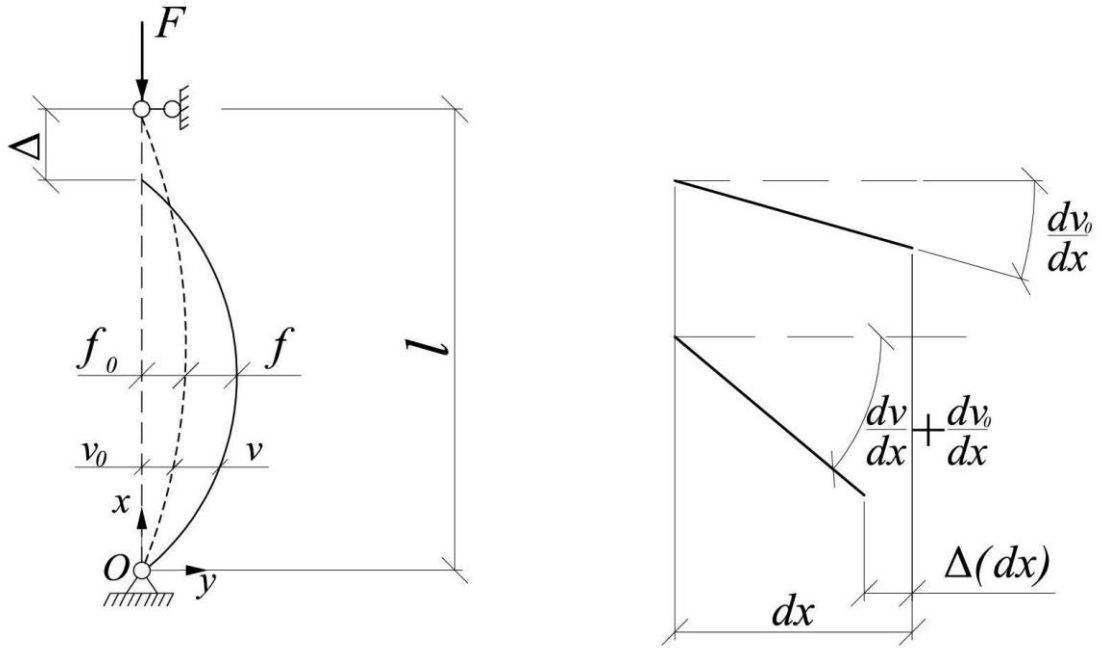


Рисунок 2.12 – К определению сближения концов стержня при выпучивании

Тогда сближение концов всего стержня запишется в виде:

$$\Delta = \frac{1}{2} \int_0^l \left\{ \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 + 2 \frac{dv}{dx} \frac{dv_0}{dx} \right\} dx.$$

Работа внешних сил определяется следующим образом:

$$A = F\Delta = \frac{1}{2} F \int_0^l \left\{ \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 + 2 \frac{dv}{dx} \frac{dv_0}{dx} \right\} dx$$

Полная потенциальная энергия системы записывается в виде:

$$\begin{aligned} \Theta = \frac{1}{2} \int_0^l E(x) \left\{ I(x) \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 + 2 \frac{d^2 v}{dx^2} \int_A \varepsilon^* y dA + \int_A (\varepsilon^*)^2 dA \right. \\ \left. - 2 \varepsilon_0 \int_A \varepsilon^* dA + \varepsilon_0^2 A \right\} dx - \frac{1}{2} F \int_0^l \left\{ \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 + 2 \frac{dv}{dx} \frac{dv_0}{dx} \right\} dx. \end{aligned} \quad (2.58)$$

После подстановки (2.53) в (2.58) и последующей минимизации по неизвестным коэффициентам a_i , получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Theta}{\partial a_j} = \sum_{i=1}^n a_i \left\{ \int_0^l E(x) I(x) \frac{d^2 f_i}{dx^2} \frac{d^2 f_j}{dx^2} dx - F \int_0^l \frac{df_i}{dx} \frac{df_j}{dx} dx \right\} \\ + \int_0^l E(x) \frac{d^2 f_j}{dx^2} \left\{ \int_A \varepsilon^* y dA \right\} dx - F \int_0^l \frac{df_j}{dx} \frac{dv_0}{dx} dx = 0, \quad j = 1 \dots n \end{aligned}$$

или в матричном виде:

$$([K] - F[B])\{X\} = \{C\}, \quad (2.59)$$

$$\text{где } X = \begin{Bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{Bmatrix}, \quad \{C\} = \begin{Bmatrix} c_1 \\ \dots \\ c_n \end{Bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \dots k_{1n} \\ \dots & \dots \dots \dots \\ k_{n1} & k_{n2} \dots k_{nn} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \dots b_{1n} \\ \dots & \dots \dots \dots \\ b_{n1} & b_{n2} \dots b_{nn} \end{bmatrix}.$$

$$k_{ij} = \int_0^l E(x) I(x) \frac{d^2 f_i}{dx^2} \frac{d^2 f_j}{dx^2} dx; \quad b_{ij} = \int_0^l \frac{df_i}{dx} \frac{df_j}{dx} dx;$$

$$c_j = - \int_0^l E(x) \frac{d^2 f_j}{dx^2} \left\{ \int_A \varepsilon^* y dA \right\} dx + F \int_0^l \frac{df_j}{dx} \frac{dv_0}{dx} dx.$$

Мгновенную критическую силу можно определить из условия равенства нулю определителя системы (2.59):

$$\det([K] - F[B]) = 0. \quad (2.60)$$

Таким образом, задача определения критической силы сводится к обобщенному вековому уравнению. В случае, если матрица $[B]$ не является вырожденной, систему (2.59) можно умножить на $[B]^{-1}$:

$$([B]^{-1}[K] - F[E])\{X\} = [B]^{-1}\{C\}, \quad (2.61)$$

где $[E]$ – единичная матрица.

Первой критической силе будет соответствовать минимальное из собственных значений матрицы $[B]^{-1}[K]$.

Рассмотрим функции формы $f_i(x)$ при различных вариантах закрепления стержня:

1. Шарнирно опертый по концам стержень

Для такого варианта начальная погибь аппроксимируется выражением:

$$v_0(x) = f_0 \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right). \quad (2.62)$$

Удобно функции формы принять в виде:

$$f_i = \sin\left(\frac{\pi x i}{l}\right). \quad (2.63)$$

Дифференцируя (2.62) и (2.63), получим:

$$\begin{aligned} \frac{dv_0}{dx} &= \frac{\pi f_0}{l} \cos\left(\frac{\pi x}{l}\right); \\ \frac{df_i}{dx} &= \frac{\pi i}{l} \cos\left(\frac{\pi x i}{l}\right); \\ \frac{d^2 f_i}{dx^2} &= -\left(\frac{\pi i}{l}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi x i}{l}\right). \end{aligned} \quad (2.64)$$

Некоторые интегралы, входящие в формулы коэффициентов существенно упростятся:

$$\int_0^l \frac{df_i}{dx} \frac{df_j}{dx} dx = \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 ij \int_0^l \cos\left(\frac{\pi x i}{l}\right) \cos\left(\frac{\pi x j}{l}\right) dx = \begin{cases} 0, & i \neq j; \\ \frac{\pi^2 ij}{2l}, & i = j. \end{cases} \quad (2.65)$$

$$\int_0^l \frac{df_j}{dx} \frac{dv_0}{dx} dx = \frac{\pi^2 j f_0}{l^2} \int_0^l \cos\left(\frac{\pi x j}{l}\right) \cos\left(\frac{\pi x}{l}\right) dx = \begin{cases} 0, & j \neq 1; \\ \frac{\pi^2 j f_0}{2l}, & j = 1. \end{cases} \quad (2.66)$$

В случае постоянной жесткости стержня коэффициенты k_{ij} записываются в виде:

$$\begin{aligned}
k_{ij} &= EI \int_0^l \frac{d^2 f_i}{dx^2} \frac{d^2 f_j}{dx^2} dx = EI \left(\frac{\pi}{l}\right)^4 i^2 j^2 \int_0^l \sin\left(\frac{\pi x i}{l}\right) \sin\left(\frac{\pi x j}{l}\right) dx \\
&= \begin{cases} 0, & i \neq j; \\ \frac{EI \pi^4 i^2 j^2}{2l^3}, & i = j. \end{cases}
\end{aligned} \tag{2.67}$$

Остальные интегралы могут быть вычислены численно при помощи формул трапеций или Симпсона. Отметим, что для стержня постоянной жесткости в левой части системы уравнений ненулевыми оказываются только коэффициенты на главной диагонали, то есть неизвестные величины a_i можно найти сразу, не решая систему уравнений.

2. Жестко зашеченный по концам стержень

Выражение для начальной погиби записывается в виде:

$$v_0(x) = f_0 \sin^2\left(\frac{\pi x}{l}\right). \tag{2.68}$$

Функции формы принимаем в виде:

$$f_i = \sin^2\left(\frac{\pi x i}{l}\right). \tag{2.69}$$

Продифференцируем (2.68) и (2.69):

$$\begin{aligned}
\frac{dv_0}{dx} &= \frac{\pi f_0}{l} \cdot 2 \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) \cos\left(\frac{\pi x}{l}\right) = \frac{\pi f_0}{l} \sin\left(\frac{2\pi x}{l}\right); \\
\frac{df_i}{dx} &= \frac{\pi i}{l} \cdot 2 \sin\left(\frac{\pi x i}{l}\right) \cos\left(\frac{\pi x i}{l}\right) = \frac{\pi i}{l} \sin\left(\frac{2\pi x i}{l}\right); \\
\frac{d^2 f_i}{dx^2} &= 2 \left(\frac{\pi i}{l}\right)^2 \cos\left(\frac{2\pi x i}{l}\right).
\end{aligned} \tag{2.70}$$

Интегралы в формулах коэффициентов примут вид:

$$\int_0^l \frac{df_i}{dx} \frac{df_j}{dx} dx = \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 ij \int_0^l \sin\left(\frac{2\pi x i}{l}\right) \sin\left(\frac{2\pi x j}{l}\right) dx = \begin{cases} 0, \text{ при } i \neq j; \\ \frac{\pi^2 ij}{2l}, \text{ при } i = j. \end{cases} \tag{2.71}$$

$$\int_0^l \frac{df_j}{dx} \frac{dv_0}{dx} dx = \frac{\pi^2 j f_0}{l^2} \int_0^l \sin\left(\frac{2\pi x j}{l}\right) \sin\left(\frac{2\pi x}{l}\right) dx = \begin{cases} 0, \text{ при } j \neq 1; \\ \frac{\pi^2 j f_0}{2l}, \text{ при } j = 1. \end{cases} \tag{2.72}$$

Для стержня постоянной жесткости коэффициенты k_{ij} записываются в виде:

$$\begin{aligned}
k_{ij} &= EI \int_0^l \frac{d^2 f_i}{dx^2} \frac{d^2 f_j}{dx^2} dx = 4EI \left(\frac{\pi}{l}\right)^4 i^2 j^2 \int_0^l \cos\left(\frac{2\pi x i}{l}\right) \cos\left(\frac{2\pi x j}{l}\right) dx \\
&= \begin{cases} 0, \text{ при } i \neq j; \\ \frac{2EI\pi^4 i^2 j^2}{l^3}, \text{ при } i = j. \end{cases}
\end{aligned} \tag{2.73}$$

3. Вариант закрепления «защемление-свободный край»

Начальная погибь определяется следующим образом:

$$v_0(x) = f_0 \left(1 - \cos\left(\frac{\pi x}{2l}\right)\right). \tag{2.74}$$

Функции формы принимаем в виде:

$$f_i(x) = 1 - \cos\left(\frac{\pi x i}{2l}\right). \tag{2.75}$$

Производные от (2.74) и (2.75) записываются в виде:

$$\frac{dv_0}{dx} = \frac{\pi f_0}{2l} \sin \frac{\pi x}{2l}; \tag{2.76}$$

$$\frac{df_i}{dx} = \frac{\pi i}{2l} \sin \frac{\pi x i}{2l}; \tag{2.77}$$

$$\frac{d^2 f_i}{dx^2} = \frac{\pi^2 i^2}{4l^2} \cos \frac{\pi x i}{2l}.$$

Интегралы, входящие в формулы коэффициентов системы уравнений записываются в виде:

$$\int_0^l \frac{df_i}{dx} \frac{df_j}{dx} dx = \left(\frac{\pi}{2l}\right)^2 ij \int_0^l \sin\left(\frac{\pi x i}{2l}\right) \sin\left(\frac{\pi x j}{2l}\right) dx = \begin{cases} 0, \text{ при } i \neq j; \\ \frac{\pi^2 ij}{8l}, \text{ при } i = j. \end{cases} \tag{2.78}$$

$$\int_0^l \frac{df_j}{dx} \frac{dv_0}{dx} dx = \frac{\pi^2 j f_0}{4l^2} \int_0^l \sin\left(\frac{\pi x j}{2l}\right) \sin\left(\frac{\pi x}{2l}\right) dx = \begin{cases} 0, \text{ при } j \neq 1; \\ \frac{\pi^2 j f_0}{8l}, \text{ при } j = 1. \end{cases} \tag{2.79}$$

В случае постоянной жесткости стержня коэффициенты k_{ij} принимают вид:

$$\begin{aligned}
k_{ij} &= EI \int_0^l \frac{d^2 f_i}{dx^2} \frac{d^2 f_j}{dx^2} dx = EI \left(\frac{\pi}{2l} \right)^4 i^2 j^2 \int_0^l \cos \left(\frac{\pi x i}{2l} \right) \cos \left(\frac{\pi x j}{2l} \right) dx \\
&= \begin{cases} 0, & \text{при } i \neq j; \\ \frac{EI \pi^4 i^2 j^2}{32 l^3}, & \text{при } i = j. \end{cases}
\end{aligned} \tag{2.80}$$

4. Вариант закрепления «зашемление-шарнир»

Функцию начальной погиби принимаем в виде:

$$v_0(x) = \frac{27 f_0}{4 l^3} x^2 (l - x). \tag{2.81}$$

В качестве функции формы в отличие от вариантов 1–3 принимаем степенную функцию:

$$f_i = x^{i+1} (l - x). \tag{2.82}$$

Производные (2.81) и (2.82) запишутся в виде:

$$\begin{aligned}
\frac{dv_0}{dx} &= \frac{27 f_0}{4 l^3} (2lx - 3x^2); \\
\frac{df_i}{dx} &= x^i l(i+1) - x^{i+1}(i+2) = x^i [l(i+1) - (i+2)x]; \\
\frac{d^2 f_i}{dx^2} &= li(i+1)x^{i-1} - (i+1)(i+2)x^i = (i+1)x^{i-1} [il - (i+2)x].
\end{aligned} \tag{2.83}$$

Интегралы в формулах коэффициентов запишутся в виде:

$$\begin{aligned}
\int_0^l \frac{df_i}{dx} \frac{df_j}{dx} dx &= \int_0^l x^{i+j} [l(i+1) - (i+2)x] \cdot [l(j+1) - (j+2)x] dx = \\
&= \int_0^l x^{i+j} \{ l^2(i+1)(j+1) - l[(i+2)(j+1) + (i+1)(j+2)]x + \\
&\quad + (i+2)(j+2)x^2 \} dx =
\end{aligned} \tag{2.84}$$

$$= l^{i+j+3} \left[\frac{(i+1)(j+1)}{i+j+1} - \frac{2ij+3i+3j+4}{i+j+2} + \frac{(i+2)(j+2)}{i+j+3} \right].$$

$$\int_0^l \frac{df_j}{dx} \frac{dv_0}{dx} dx = \frac{27 f_0}{4 l^3} \int_0^l x^{j+1} [l(j+1) - (j+2)x] (2l - 3x) dx = \tag{2.85}$$

$$= \frac{27f_0 l^{j+1}}{4} \left(\frac{2(j+1)}{j+2} - \frac{5j+7}{j+3} + \frac{3(j+2)}{j+4} \right).$$

При постоянной жесткости стержня коэффициенты k_{ij} примут вид:

$$\begin{aligned} k_{ij} &= EI \int_0^l \frac{d^2 f_i}{dx^2} \frac{d^2 f_j}{dx^2} dx = EI \int_0^l (i+1)x^{i-1} [il - (i+2)x] (j+1)x^{j-1} [jl - \\ &\quad - (j+2)x] dx = EI(i+1)(j+1) \int_0^l x^{i+j-2} [ijl^2 - 2(ij+i+j)lx + \\ &\quad + (i+2)(j+2)x^2] dx = \\ &= EI(i+1)(j+1)l^{i+j+1} \left[\frac{ij}{i+j-1} - \frac{2(ij+i+j)}{i+j} + \frac{(i+2)(j+2)}{i+j+1} \right]. \end{aligned} \quad (2.86)$$

Рассмотрим теперь решение задачи методом Бубнова-Галеркина на примере шарнирно опертого по концам стержня. Данный метод представляет собой метод приближенного решения дифференциальных уравнений. Сущность его заключается в том, что сначала задается базисная функция, удовлетворяющая кинематическим граничным условиям. В качестве базисной примем ту же функцию, что использовалась при выводе коэффициентов по методу Ритца-Тимошенко:

$$v(x) = \sum_{i=1}^n a_i \sin\left(\frac{\pi x i}{l}\right). \quad (2.87)$$

Далее эта функция подставляется в исходное уравнение (2.7) и вычисляется невязка $\delta(x)$:

$$\begin{aligned} \delta(x) &= EI \frac{d^2 v}{dx^2} + F(v + v_0) + E \int_A \varepsilon^* y dA = -EI \sum_{i=1}^n \left(\frac{\pi i}{l}\right)^2 a_i \sin\left(\frac{\pi x i}{l}\right) + \\ &\quad + F \left(\sum_{i=1}^n a_i \sin\left(\frac{\pi x i}{l}\right) + f_0 \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) \right) + E \int_A \varepsilon^* y dA. \end{aligned} \quad (2.88)$$

Затем выдвигается условие ортогональности невязки к базисным функциям:

$$\begin{aligned}
\int_0^l \delta(x) \sin\left(\frac{\pi x j}{l}\right) dx = & - \sum_{i=1}^n \left(\frac{\pi i}{l}\right)^2 a_i \int_0^l E(x) I(x) \sin\left(\frac{\pi x i}{l}\right) \sin\left(\frac{\pi x j}{l}\right) dx + \\
& + F \sum_{i=1}^n a_i \int_0^l \sin\left(\frac{\pi x i}{l}\right) \sin\left(\frac{\pi x j}{l}\right) dx + F f_0 \int_0^l \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) \sin\left(\frac{\pi x j}{l}\right) dx + \\
& + \int_0^l E(x) \int_A \varepsilon^* y dA \cdot \sin\left(\frac{\pi x j}{l}\right) dx = 0, \quad j = 1 \dots n.
\end{aligned} \quad (2.89)$$

Интегралы от тригонометрических функций в (2.89) обладают следующим свойством:

$$\int_0^l \sin\left(\frac{\pi x i}{l}\right) \sin\left(\frac{\pi x j}{l}\right) dx = \begin{cases} 0, & \text{при } i \neq j; \\ \frac{l}{2}, & \text{при } i = j. \end{cases} \quad (2.90)$$

В итоге задача сводится к системе линейных алгебраических уравнений, имеющей вид (2.59). Причем коэффициенты матриц получаются такими же, как и при использовании метода Ритца-Тимошенко, что говорит о правильности полученных уравнений.

2.6 Решение модельных задач для стержней постоянной жесткости при различных вариантах закрепления

Задача 1. Рассматривается стержень прямоугольного постоянного сечения из эпоксидной смолы ЭДТ-10, жестко защемленный по концам. Размеры стержня: $l = 157$ мм, $b = 15$ мм, $h = 8$ мм, $f_0 = 0.16$ мм. На стержень действует сила $F = 2.2$ кН. Данная задача была решена М. Ю. Козельской в работе [91]. Ею было получено значение критического времени $t_{кр} = 1$ ч 43 мин.

Эйлерова сила для рассматриваемой задачи: $F_э = \frac{4\pi^2 EI}{l^2} = 3.02$ кН.

Длительная критическая сила $F_d = \frac{H}{E} F_э = 1.56$ кН.

На рисунке 2.13 показан полученный автором график роста стрелы прогиба. Величина критического времени $t_{кр} = 1$ ч 41 мин. За критерий потери устойчивости было принято условие: $f > l/10$.

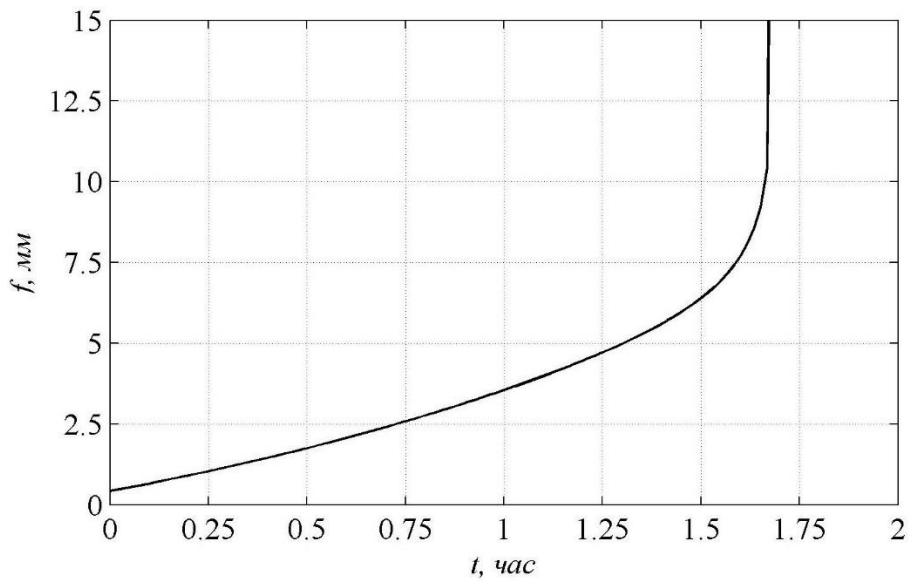


Рисунок 2.13 – График роста стрелы прогиба при $F = 2.2$ кН

Объемный график, показывающий изменение прогиба в зависимости от x и t представлен на рисунке 2.14. На этом графике хорошо видно выполнение кинематических граничных условий.

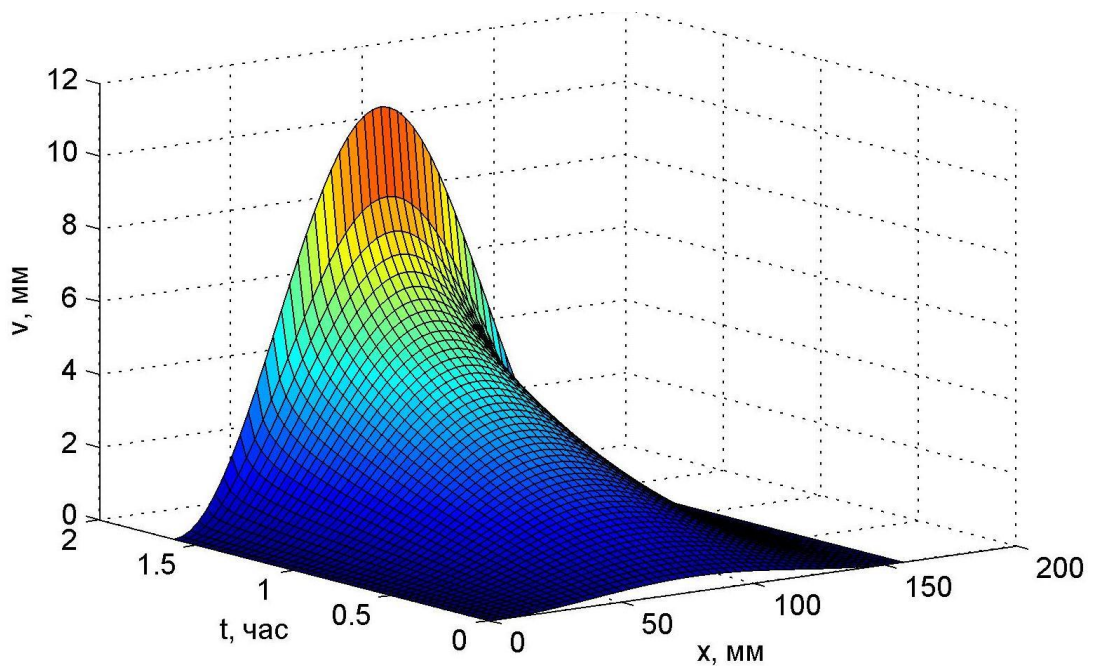


Рисунок 2.14 – График роста прогиба в зависимости от x и t

Рисунок 2.15 – распределение напряжений по высоте сечения при $x = l/2$. Из данного графика видно, что характер эпюр напряжений в момент потери устойчивости нелинейный.

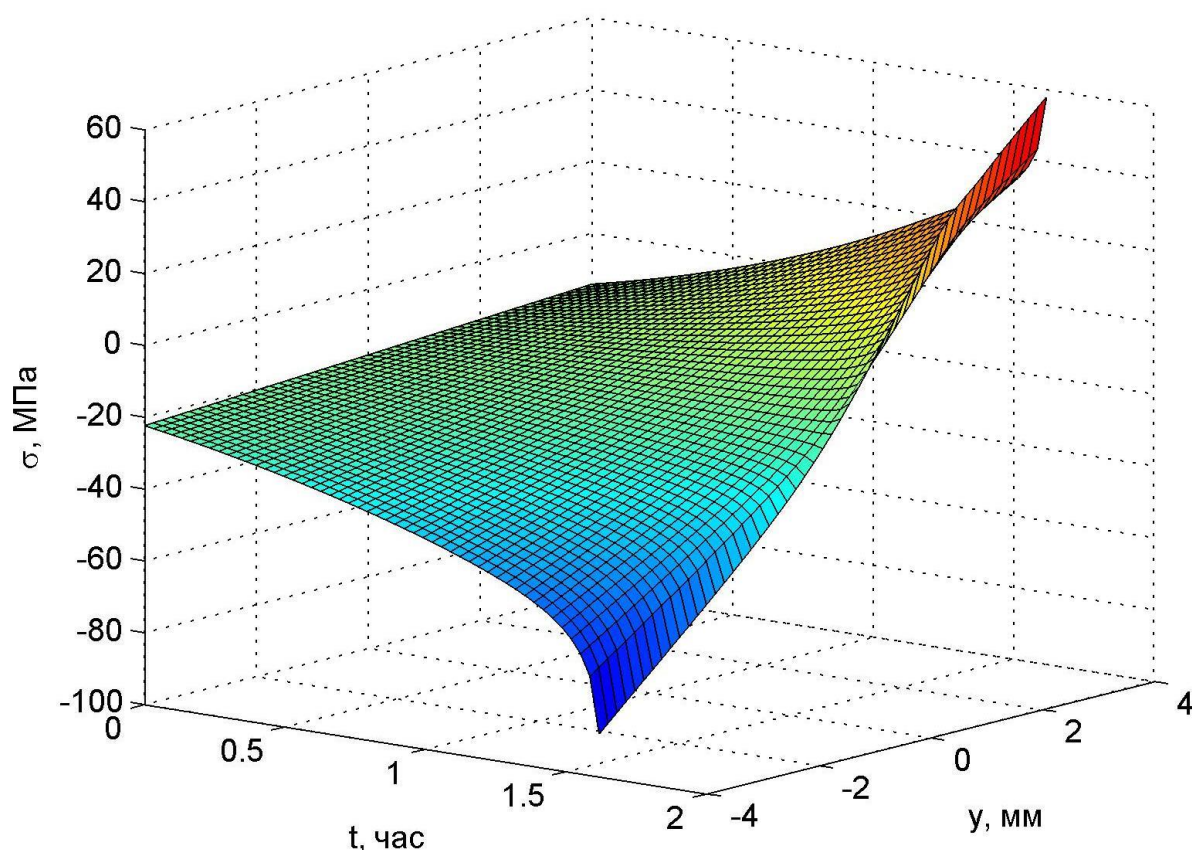


Рисунок 2.15 – Изменение напряжений в середине пролета при $F = 2.2$ кН

Была также решена задача при сжимающей силе меньше длительной критической: $F = 1$ кН. График изменения напряжений по высоте сечения в середине пролета показан на рисунке 2.16. При $F < F_{\text{дл}}$ распределение напряжений по высоте сечения как в начале, так и в конце процесса ползучести оказывается линейным. Это следует из формул (2.24) и (2.25):

$$\sigma_{\infty} = H\varepsilon = H \left(\varepsilon_0 - y \frac{d^2 v}{dx^2} \right). \quad (2.91)$$

Кроме того, из рисунка 2.16 видно, что у более сжатой грани напряжения по абсолютной величине возрастают, а у менее сжатой – убывают.

График роста стрелы прогиба при $F = 1$ кН показан на рисунке 2.17. При $t = 2000$ ч прогиб в середине пролета равен 0.281 мм. По формуле (2.32): $f_{\infty} = \frac{0.16}{1.56/1-1} = 0.286$ мм, что свидетельствует о достоверности разработанной методики.

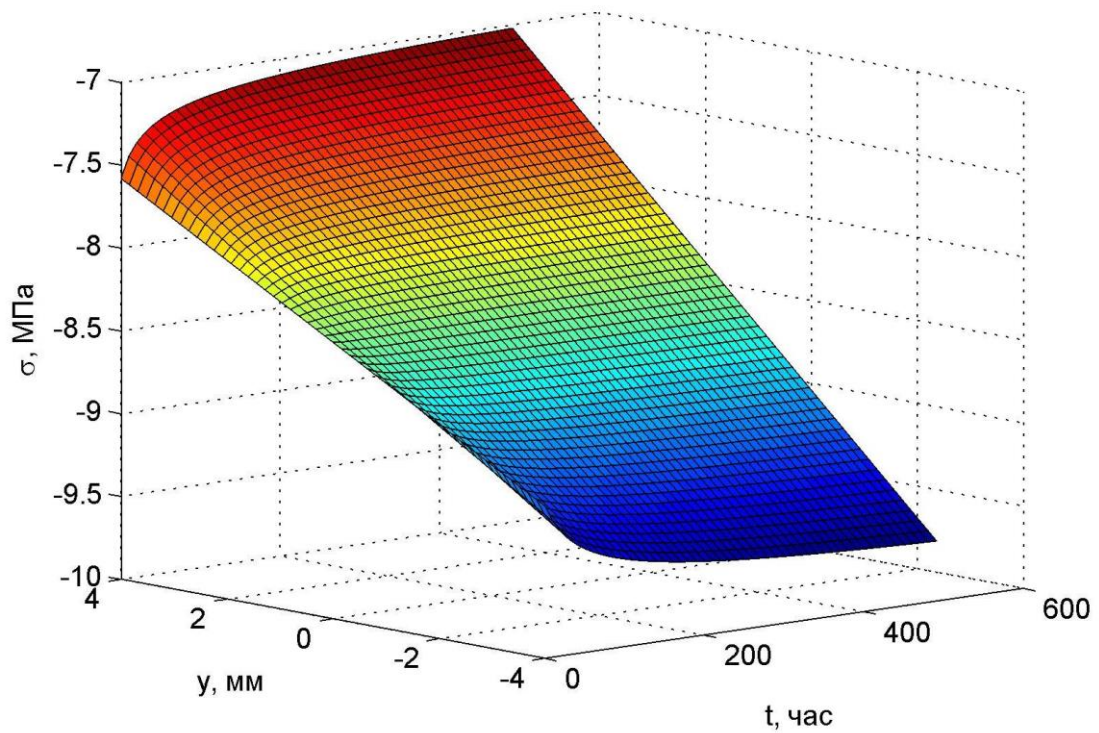


Рисунок 2.16 – Изменение напряжений по высоте сечения при $F = 2.2$ кН

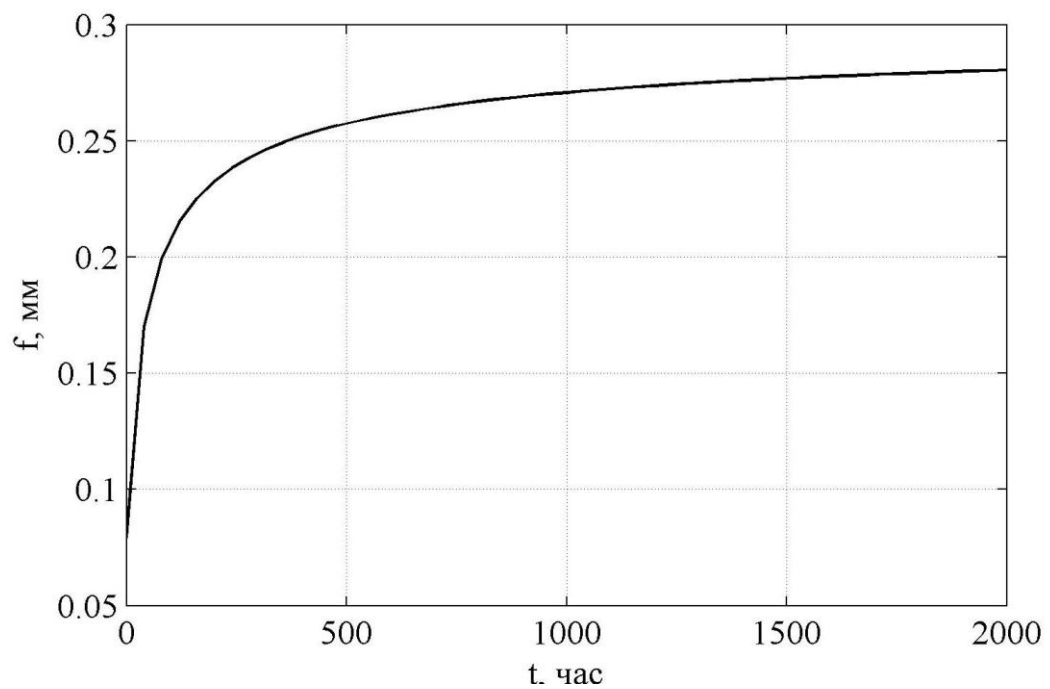


Рисунок 2.17 – Рост стрелы прогиба при $F = 1$ кН

Задача 2. Рассматривается стержень из ЭДТ-10, у которого один конец жестко зашпелен, а другой закреплен шарнирно. Начальная погнбь задается выражением (2.81). Размеры такие же, как в предыдущей задаче. Сжимающая сила

$F = 1.35$ кН. Эйлера сила $F_э = 1.54$ кН, длительная критическая сила $F_{дл} = 0.8$ кН. График роста стрелы прогиба показан на рисунке 2.18. Стержень теряет устойчивость через 42 мин.

Данная задача была решена Е. С. Клименко в работе [79], однако она некорректно задавала выражение для начальной погиби (в виде (2.68)). В результате она получила сильно завышенное значение критического времени: $t_{кр} = 3$ ч 12 мин.

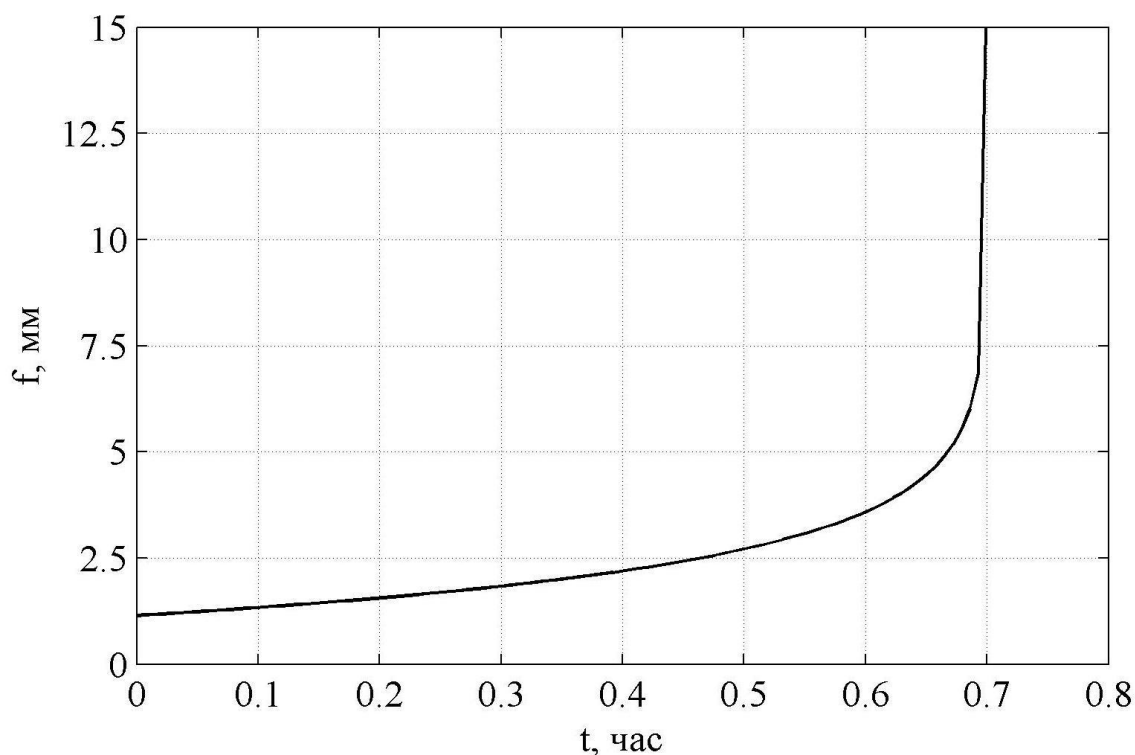


Рисунок 2.18 – Рост стрелы прогиба при $F = 1.35$ кН

Трехмерный график, показывающий изменение прогиба в зависимости от x и t показан на рисунке 2.19. На рисунке 2.20 представлено распределение нормальных напряжений в зависимости от x и y при $t = 41$ мин. Из рисунка 2.20 видно выполнение статических граничных условий: напряжения по высоте сечения не меняются по высоте при $x = l$. Это говорит о том, что изгибающий момент на верхнем конце стержня равен нулю.

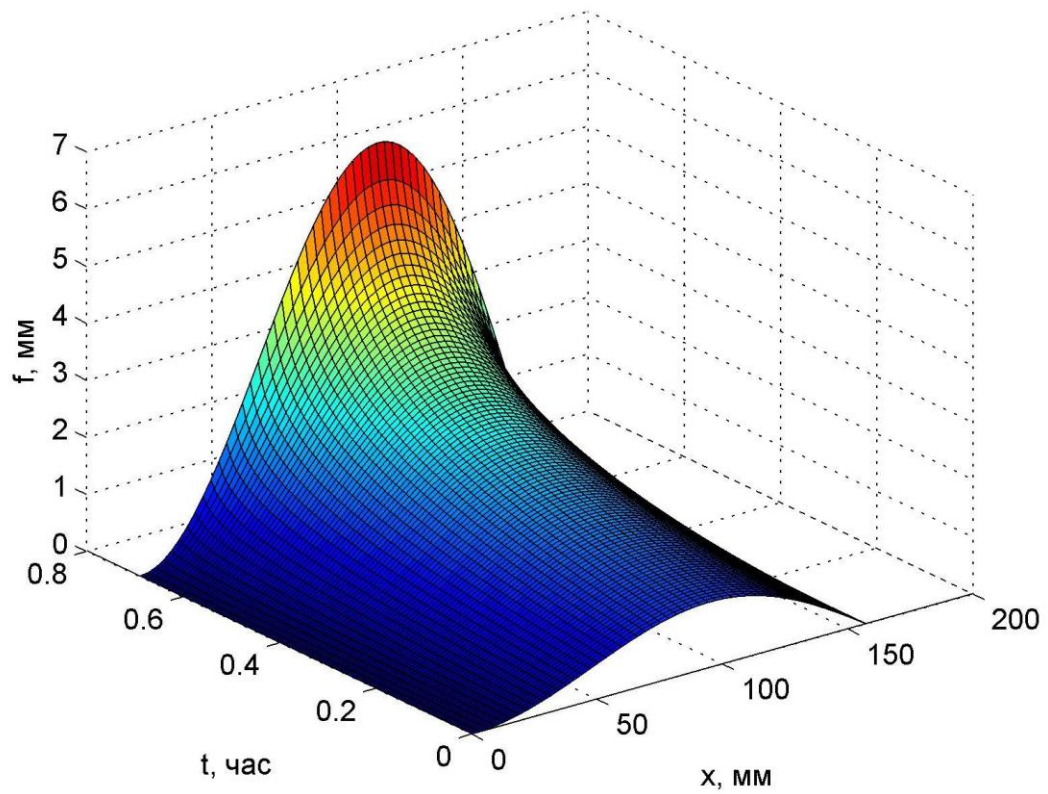


Рисунок 2.19 – график роста прогиба при $F = 1.35$ кН

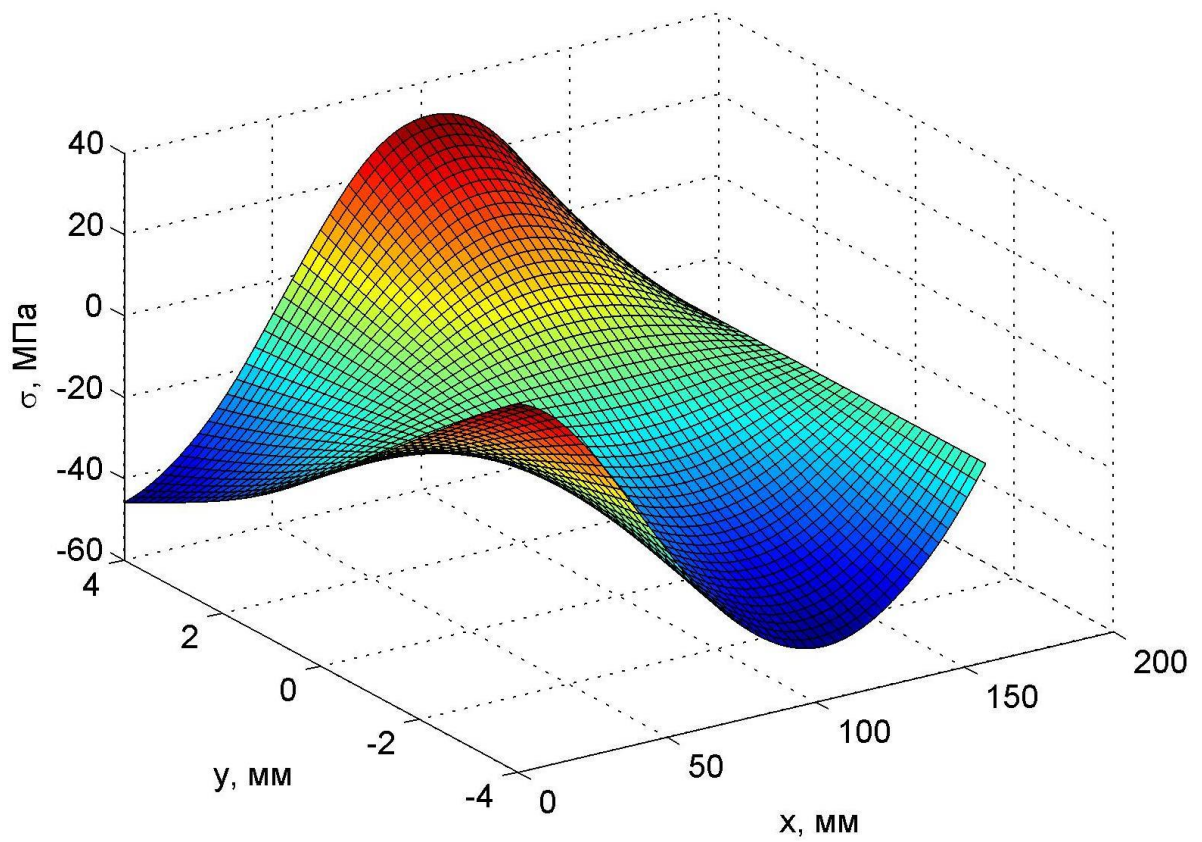


Рисунок 2.20 – Распределение напряжений при $t = 41$ мин в зависимости от x и y

Также была решена тестовая задача для варианта закрепления «защемление-шарнир» при $F = 0.5$ кН, что меньше $F_{\text{дл}}$. Теоретический прогиб в конце процесса ползучести при этом равен $f_{\infty} = \frac{0.16}{0.8/0.5-1} = 0.267$ мм. График роста стрелы прогиба при $F = 0.5$ кН показан на рисунке 2.21.

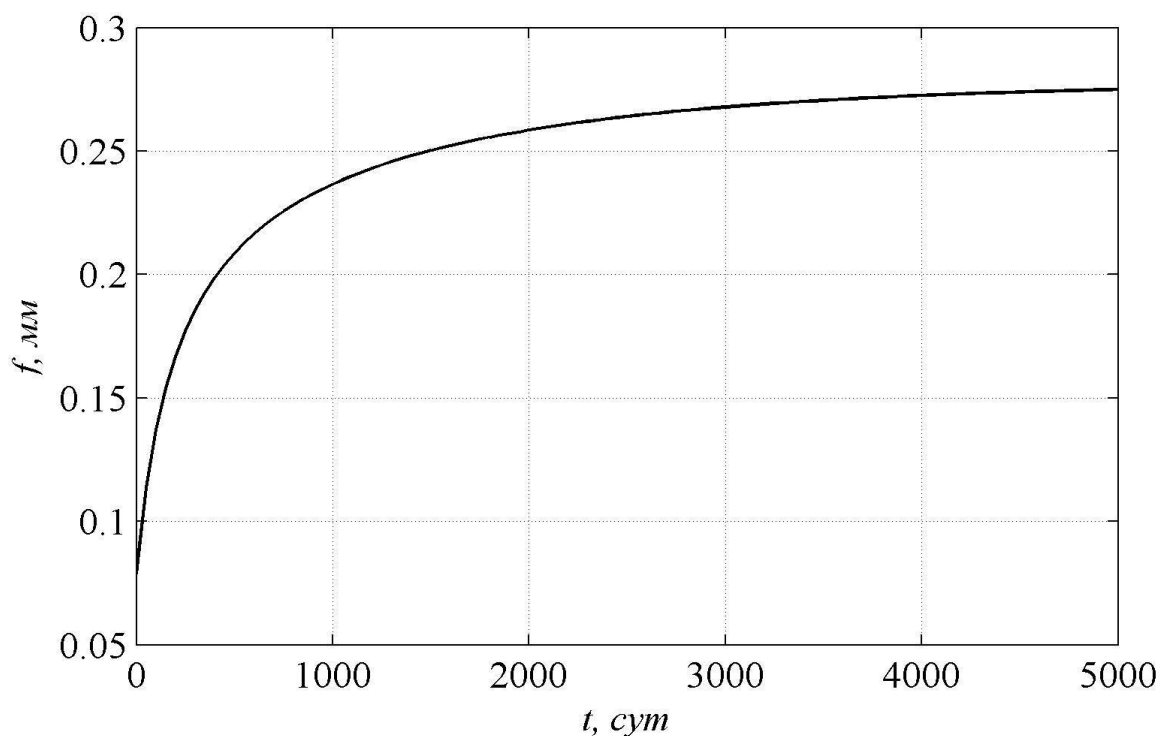


Рисунок 2.21 – Рост стрелы прогиба при $F = 0.5$ кН

При $t = 5000$ ч получено значение стрелы прогиба $f = 0.275$ мм, что больше теоретического. Отклонение в большую сторону на 3% можно объяснить тем что форма начальной погиби (2.81) не соответствует форме потери устойчивости прямолинейного стержня. Однако для практических расчетов такая погрешность не существенна.

Задача 3. Стержень закреплен в соответствии с рисунком 2.9. Материал стержня – ЭДТ-10. Размеры такие же, как в предыдущей задаче. Величина сжимающей силы $F = 0.165$ кН. Эйлера сила $F_3 = \frac{\pi^2 EI}{4l^2} = 0.189$ кН. Длительная критическая сила $F_{\text{дл}} = 0.0976$ кН. График роста стрелы прогиба показан на рисунке 2.22. Стержень теряет устойчивость через 130 ч.

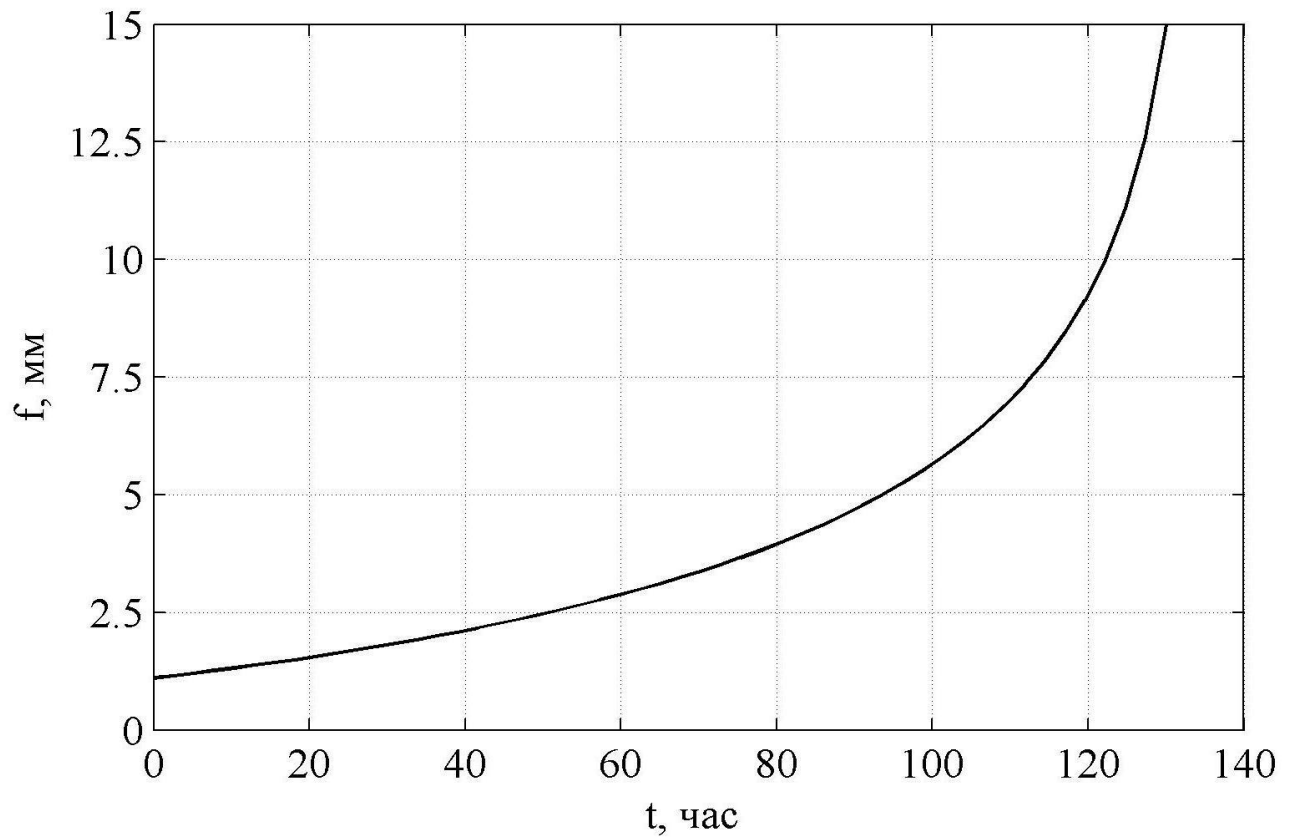


Рисунок 2.22 – График роста стрелы прогиба при $F = 0.165$ кН

Изменение прогиба в зависимости от x и t представлено на рисунке 2.23.

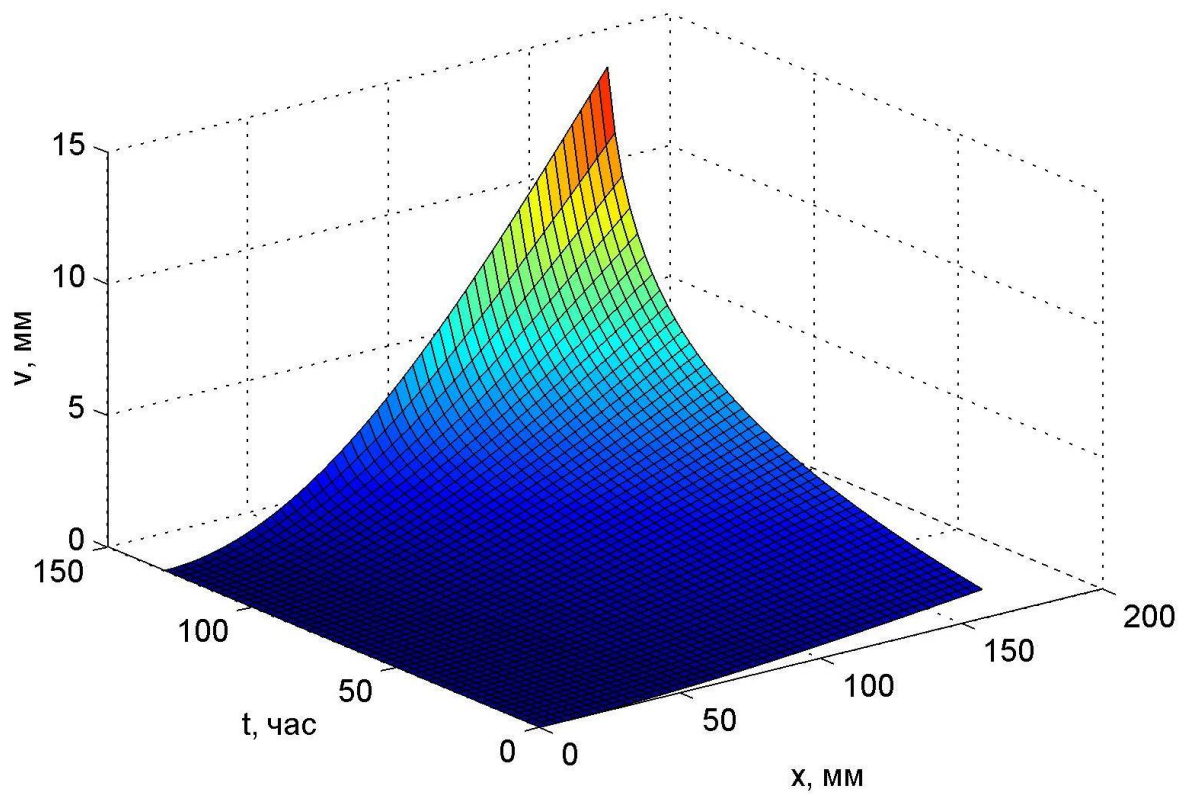


Рисунок 2.23 – Рост прогиба при $F = 0.165$ кН

На рисунке 2.24 представлен график изменения напряжений в зависимости от x и y при $t = 130$ ч. Из данного графика видно, что при $x = l$ напряжения по высоте стержня не меняются, т.е. граничное условие (2.43) выполняется.

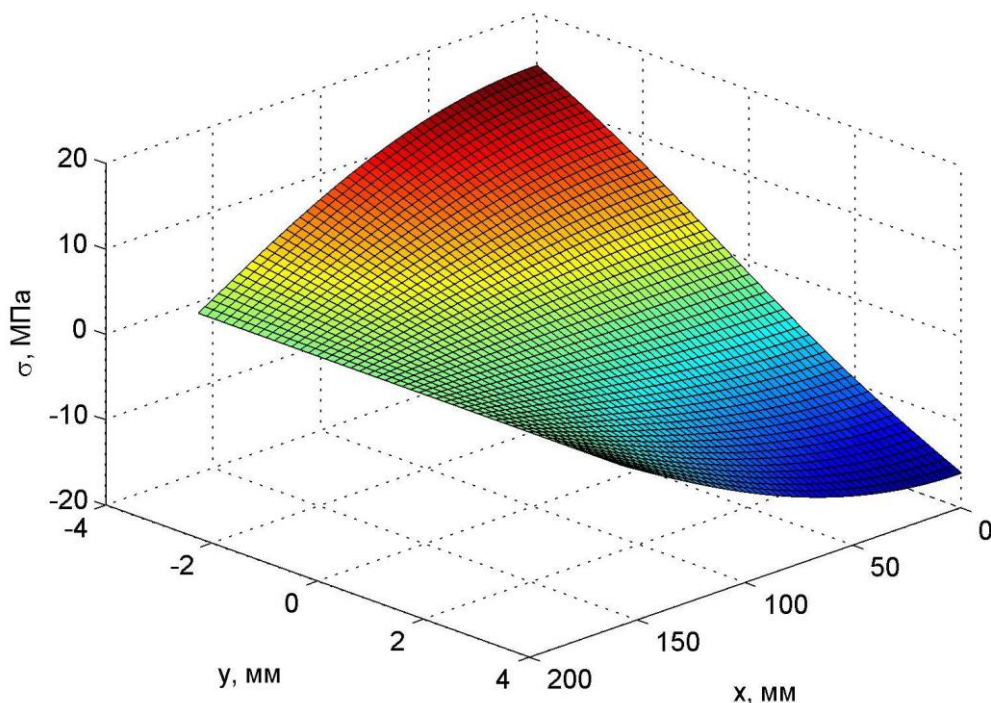


Рисунок 2.24 – Изменение напряжений в зависимости от x и y при $t = 130$ ч

Данная задача решалась как методом конечных разностей, так и методом Ритца-Тимошенко. Сравнение величины стрелы прогиба в различные моменты времени представлено в таблице 2.2. При решении методом Ритца-Тимошенко число членов ряда n принималось равным 4. Количество интервалов по x и y – 50.

Таблица 2.2 – Сравнение прогибов стержня, полученных по методу Ритца-Тимошенко и при помощи МКР

t, час		20	40	60	80	100	120	130
f , мм	метод Ритца-Тимошенко	1.5425	2.1131	2.8719	3.9430	5.6411	9.2379	14.9301
	МКР	1.5439	2.1151	2.8747	3.9472	5.6480	9.2533	14.9895

Из представленной таблицы видно, что результаты совпадают, что свидетельствует о их достоверности, а также о достоверности разработанной автором методики расчета.

Была также решена тестовая задача при $F = 80$ Н, что меньше $F_{\text{дл}}$. Теоретическая величина стрелы прогиба в конце процесса ползучести: $f_{\infty} = \frac{0.16}{97.6/80 - 1} = 0.727$ мм. График роста стрелы прогиба при $F = 80$ Н показан на рисунке 2.25. При $t = 15000$ ч $f = 0.726$ мм.

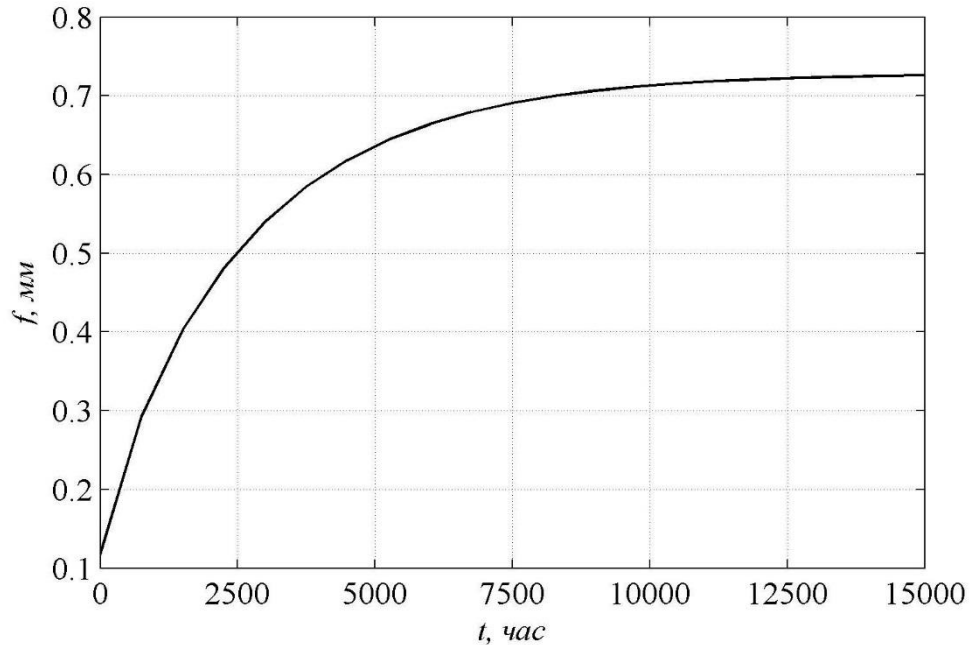


Рисунок 2.25 – Рост стрелы прогиба при $F = 80$ Н

2.7 Учет дискретности спектра времен релаксации полимера

В ряде работ [79, 86, 81, 91, 89] авторы при решении задач устойчивости с учетом ползучести используют только «старший» член спектра времен релаксации полимера ε_1^* . Объясняют они это тем, что потеря устойчивости происходит за относительно небольшое время. Представляет интерес вклад «младшей» составляющей ε_2^* при выпучивании стержня.

Было проведено исследование влияния дискретности спектра времен релаксации на примере стержня из полиэтилена высокой плотности (ПВП). Данные для расчета с учетом одного и двух спектров представлены в таблице 2.3 [87, 85, 92].

Рассматривался стержень квадратного сечения 10×10 мм, шарнирно опертый по концам. Длина стержня $l = 157$ мм, начальная погибь $f_0 = 0.16$ мм. На рис. 2.26

представлен график роста стрелы прогиба при $F = 50$ Н. Штриховой линии соответствует решение с учетом одного спектра времен релаксации, сплошной линии – с учетом двух спектров.

Таблица 2.3 – Упругие и релаксационные параметры ПВП

E , МПа	m^* , МПа	Расчет с одним членом спектра времен релаксации		Расчет с двумя членами спектра времен релаксации			
		E_∞ , МПа	η_0^* , МПа·с	$E_{\infty,1}$, МПа	$E_{\infty,2}$, МПа	$\eta_{0,1}^*$, МПа·с	$\eta_{0,2}^*$, МПа·с
750	1.89	171.6	$9.7 \cdot 10^7$	900	285	$1.3 \cdot 10^7$	$1 \cdot 10^8$

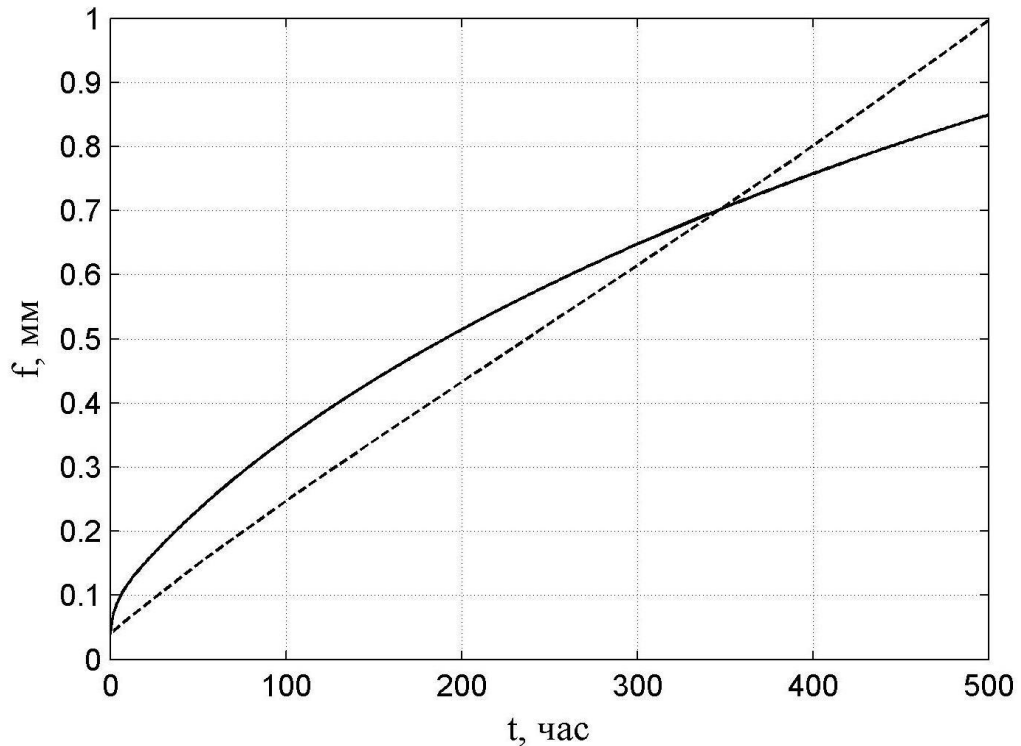


Рис. 2.26 – Графики роста стрелы прогиба

Из представленных графиков видно, что характер кривых роста прогиба существенно отличается: при учете только одного спектра прогиб растет с постоянной скоростью, а с учетом двух спектров скорость роста стрелы прогиба затухает.

Отличается также и величина длительной критической силы. При расчете с учетом одного спектра $F_{дл,1} = 46.7$ Н, а с учетом двух спектров: $F_{дл,2} = 56.1$ Н.

Таким образом, расчет на устойчивость полимерных стержней необходимо вести с учетом как минимум двух спектров времен релаксации полимера.

2.8 Выводы по главе

Получены разрешающие уравнения и разработана методика на основе метода конечных разностей, метода Бубнова-Галеркина и метода Ритца-Тимошенко для расчета на устойчивость при ползучести стержней переменной жесткости с учетом начальных несовершенств, различных вариантов закрепления и произвольных законов ползучести.

Для сжатых полимерных стержней, подчиняющихся нелинейному уравнению Максвелла-Гуревича, разработана методика определения длительных критических нагрузок. Установлено, что если сжимающая не превышает длительную критическую, то потери устойчивости не происходит.

Усовершенствована методика определения деформаций ползучести в каждый момент времени на основе метода Рунге-Кутты четвертого порядка. При этом существенно повышается быстродействие программ расчета на ЭВМ.

Исследовано влияние дискретности спектра времен релаксации полимера при продольном изгибе стержней с учетом ползучести. Показано существенное различие между кривыми роста прогиба при расчете с учетом одного и двух членов спектра. Также значительно (на 20%) отличается величина длительной критической силы. Таким образом, расчет полимерных стержней должен вестись с учетом как минимум двух членов спектра времен релаксации полимера.

ГЛАВА 3. СРАВНЕНИЕ РАБОТЫ СТЕРЖНЕЙ ПОСТОЯННОГО И ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ В УПРУГОЙ СТАДИИ И ПРИ ПОЛЗУЧЕСТИ

3.1 Типовые формы изменения жесткости для шарнирно опертого по концам стержня

Рассмотрим некоторые типовые формы изменения жесткости стержня по длине, предложенные к.т.н., доц. И. И. Кулиничем в работах [90, 93] и оценим эффективность каждой из них при кратковременном и длительном действии нагрузки для различных вариантов закрепления стержня.

Сравнение будем выполнять со стержнем постоянного круглого сечения из ЭДТ-10, рассмотренным в параграфе 2.2. Размеры стержня: $d = 10$ мм, $l = 157$ мм. Эйлера сила для такого стержня $F_э = 574$ Н. Длительная критическая сила $F_{дл} = 296$ Н.

За ΔF обозначим увеличение критической силы в процентах для стержня переменной жесткости по отношению к стержню постоянной жесткости при той же массе. За ΔV будем обозначать снижение массы стержня переменной жесткости по отношению к стержню постоянной жесткости при одинаковой критической силе.

Форма №1. Момент инерции стержня изменяется по закону:

$$I(x) = I_0 \left[0,3 \sin \frac{\pi x}{l} + 0,7 \right]^3 = \frac{\pi d_0^4}{64} \left[0,3 \sin \frac{\pi x}{l} + 0,7 \right]^3. \quad (3.1)$$

График изменения диаметра стержня в зависимости от безразмерной координаты $\xi = x/l$ представлен на рисунке 3.1.

Объем стержня переменной жесткости при круглом поперечном сечении можно найти следующим образом:

$$V = \int_0^l A(x) dx = \frac{\pi}{4} \int_0^l (d(x))^2 dx = 2\sqrt{\pi} \int_0^l \sqrt{I(x)} dx = 2\sqrt{\pi} l \int_0^1 \sqrt{I(\xi)} d\xi. \quad (3.2)$$

Подставив (3.1) в (3.2), получим:

$$V = 2\sqrt{\pi I_0} l \int_0^1 \sqrt{[0,3\sin(\pi\xi) + 0,7]^3} d\xi = 2\sqrt{\pi I_0} l \cdot 0,8444 \approx 3\sqrt{I_0} l. \quad (3.3)$$

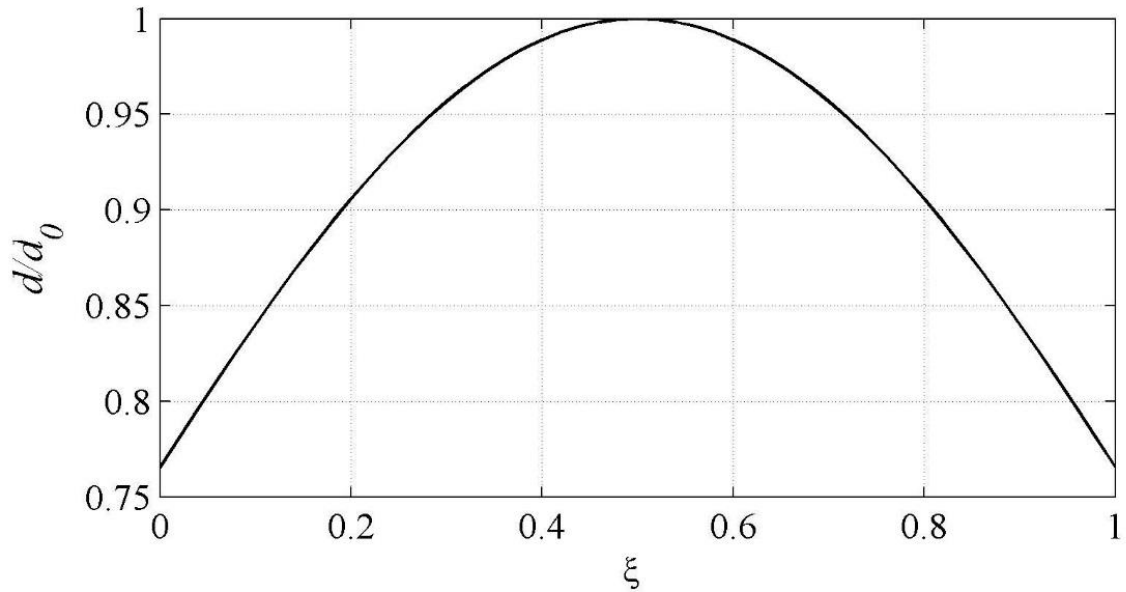


Рисунок 3.1 – Изменение диаметра стержня для типовой формы №1

Диаметр эквивалентного по массе стержня постоянного сечения можно найти следующим образом:

$$d_{\text{экв}} = 2 \sqrt{\frac{V}{l\pi}} = 2 \sqrt{\frac{3\sqrt{I_0}l}{l\pi}} = 2 \sqrt{\frac{3}{8\sqrt{\pi}}} d_0 = 0,92d_0. \quad (3.4)$$

При $d_{\text{экв}} = 10$ мм: $d_0 = 10,87$ мм. Для формы №1 получен следующий эффект: $\Delta F = 18,4\%$, $\Delta V = 8,82\%$.

На рисунке 3.2 показаны графики роста стрелы прогиба для стержня постоянного сечения (штриховая линия) и переменного сечения (сплошная линия) при $F = 0,5$ кН.

В случае постоянного сечения стержень теряет устойчивость через 8 ч 10 мин. Эквивалентный по массе стержень переменной жесткости теряет устойчивость через 119 ч. Таким образом, для стержня переменной жесткости при той же нагрузке и массе критическое время увеличилось в 14,6 раз.

На рисунке 3.3 показано распределение напряжений в зависимости от x и y при $t = 119$ ч для стержня переменной жесткости.

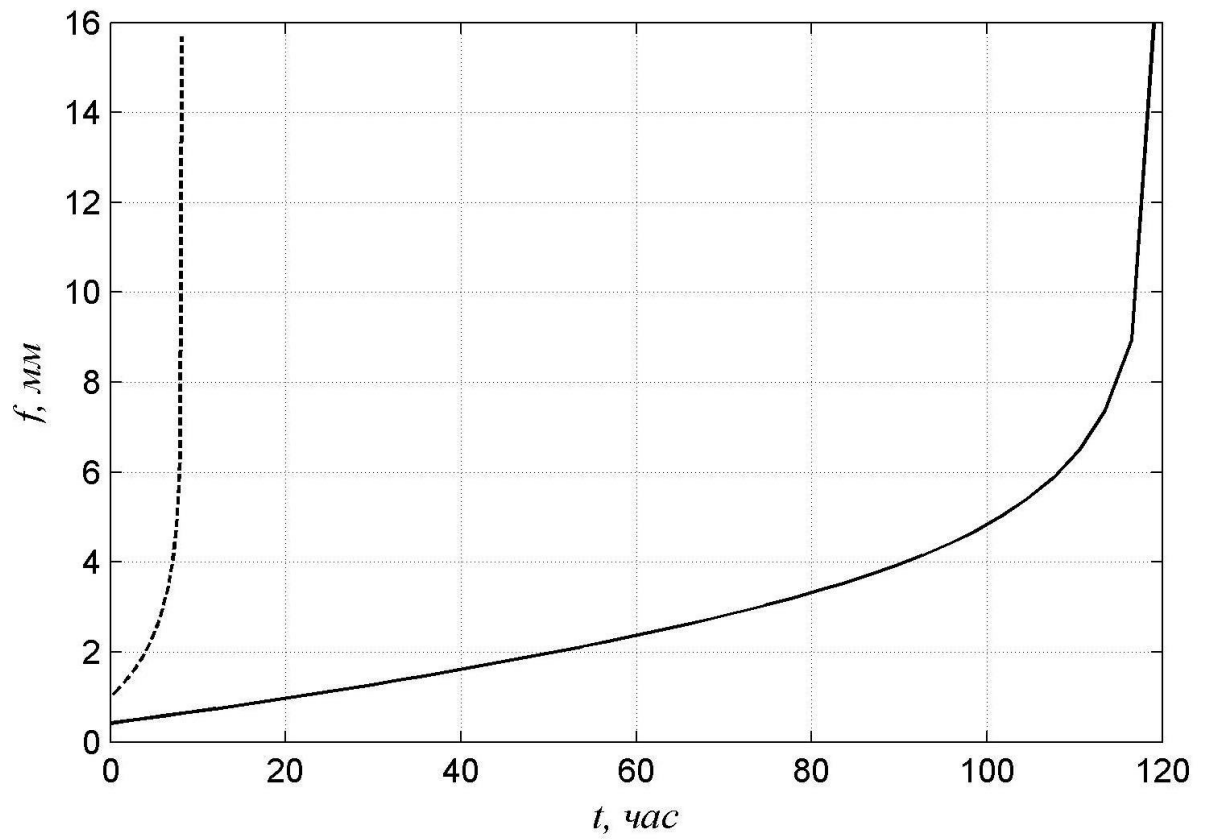


Рисунок 3.2 – Графики роста стрелы прогиба

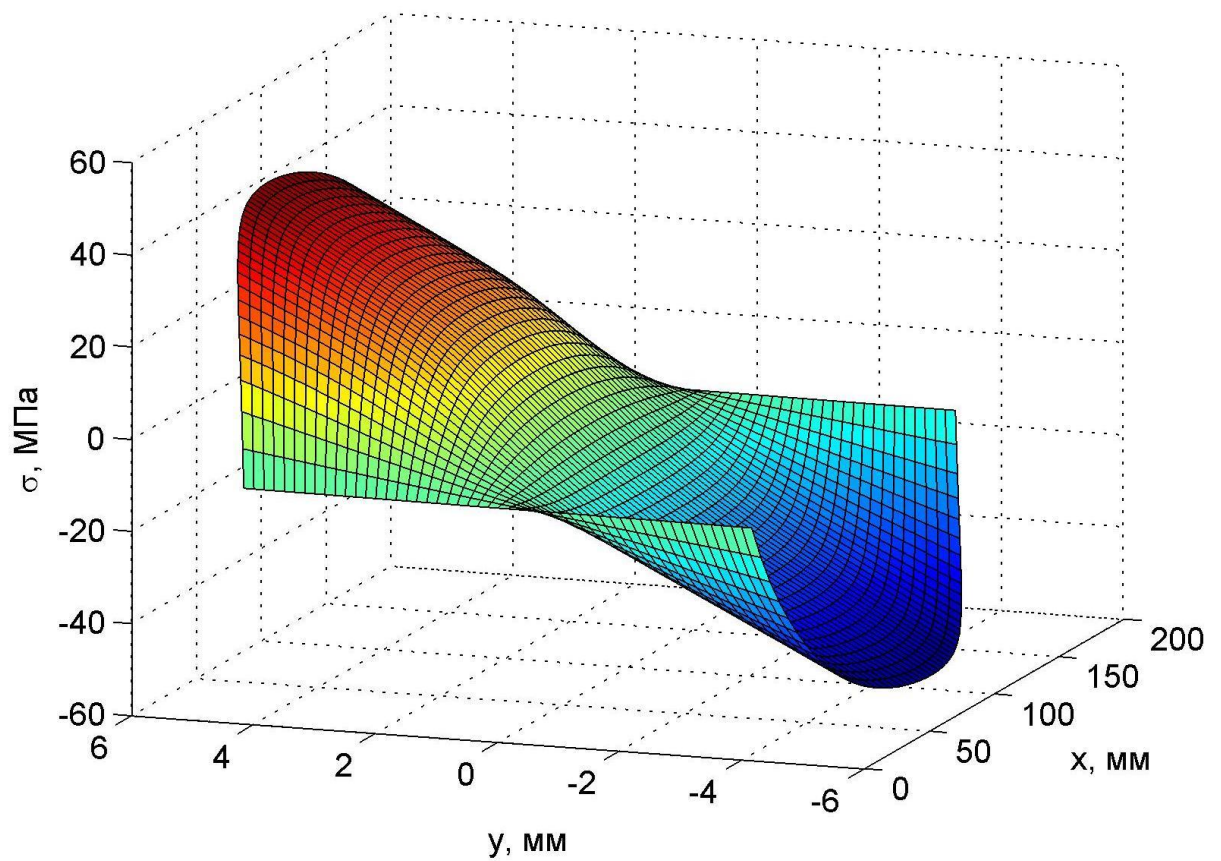


Рисунок 3.3 – Изменение напряжений в зависимости от x и y при $t = 119$ ч

Форма №2. Закон изменения момента инерции имеет вид:

$$I(x) = \frac{I_0}{2} \left[\sin \frac{\pi x}{l} + 1 \right] = \frac{\pi d_0^4}{64} \cdot \frac{1}{2} \left[\sin \frac{\pi x}{l} + 1 \right]. \quad (3.5)$$

График изменения диаметра стержня показан на рисунке 3.4. Объем стержня переменной жесткости определяется следующим образом:

$$V = 2\sqrt{\pi}l \int_0^1 \sqrt{I(\xi)} d\xi = \sqrt{2\pi I_0}l \int_0^1 \sqrt{[\sin(\pi\xi) + 1]} d\xi = \sqrt{2\pi I_0}l \cdot 1,273. \quad (3.6)$$

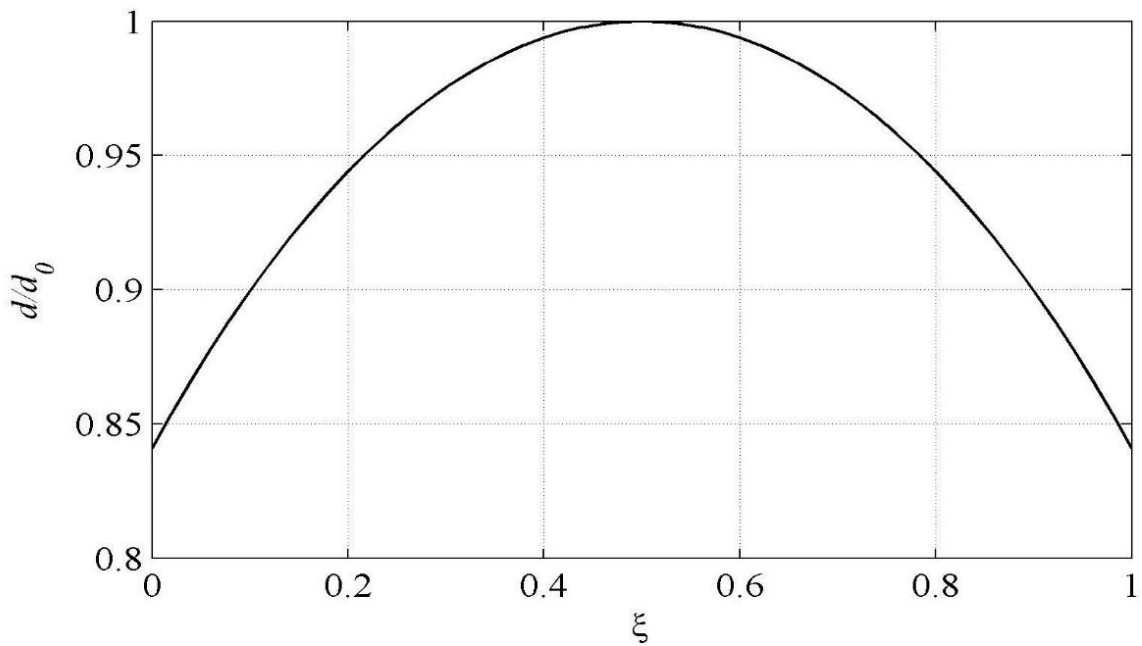


Рисунок 3.4 – Изменение диаметра стержня для типовой формы №2

Диаметр эквивалентного по массе стержня постоянного сечения:

$$d_{\text{экв}} = 2 \sqrt{\frac{V}{l\pi}} = 2 \sqrt{\frac{\sqrt{2\pi I_0}l \cdot 1,273}{l\pi}} = 2 \sqrt{\frac{\sqrt{2\pi \frac{\pi d_0^4}{64} \cdot 1,273}}{\pi}} = 0,95d_0. \quad (3.7)$$

При $d_{\text{экв}} = 10$ мм: $d_0 = 10,54$ мм. Эффективность формы №2 следующая: $\Delta F = 13,4\%$, $\Delta V = 6.16\%$. При $F = 0.5$ кН стержень переменной жесткости теряет устойчивость через 58 ч. График роста прогиба показан на рисунке 3.5.

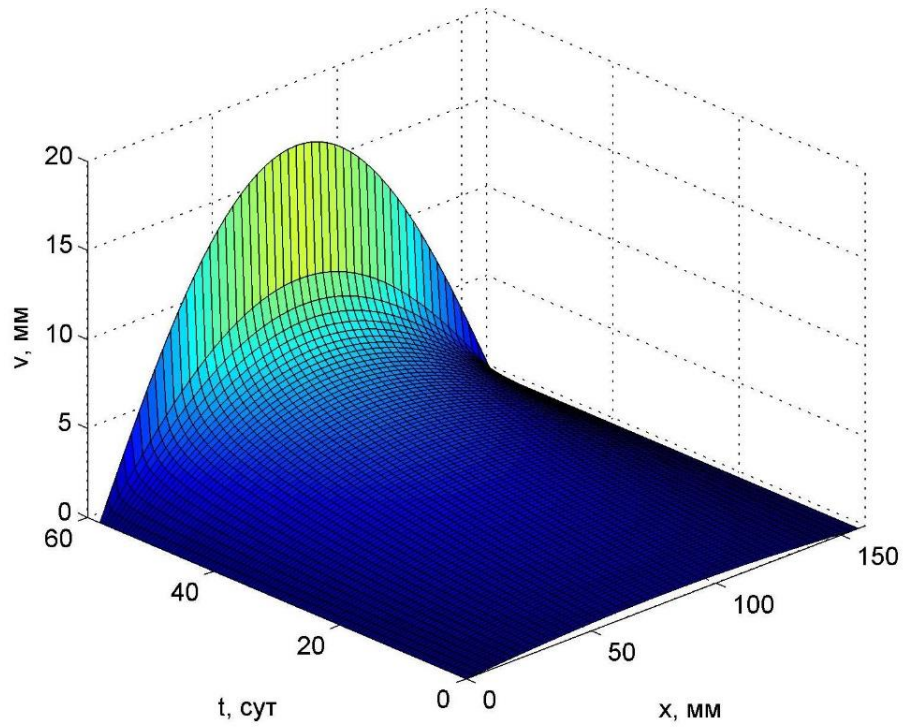


Рисунок 3.5 – График роста прогиба для типовой формы №2

Форма №3. Закон изменения момента инерции имеет вид:

$$I(x) = \begin{cases} I_0 \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{l} \right)^3 = \frac{\pi d_0^4}{64} \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{l} \right)^3, & \text{при } x \in \left[0; \frac{l}{2} \right] \\ I_0 \left(\frac{3}{2} - \frac{x}{l} \right)^3 = \frac{\pi d_0^4}{64} \left(\frac{3}{2} - \frac{x}{l} \right)^3, & \text{при } x \in \left[\frac{l}{2}; l \right]. \end{cases} \quad (3.8)$$

График изменения диаметра стержня показан на рисунке 3.6.

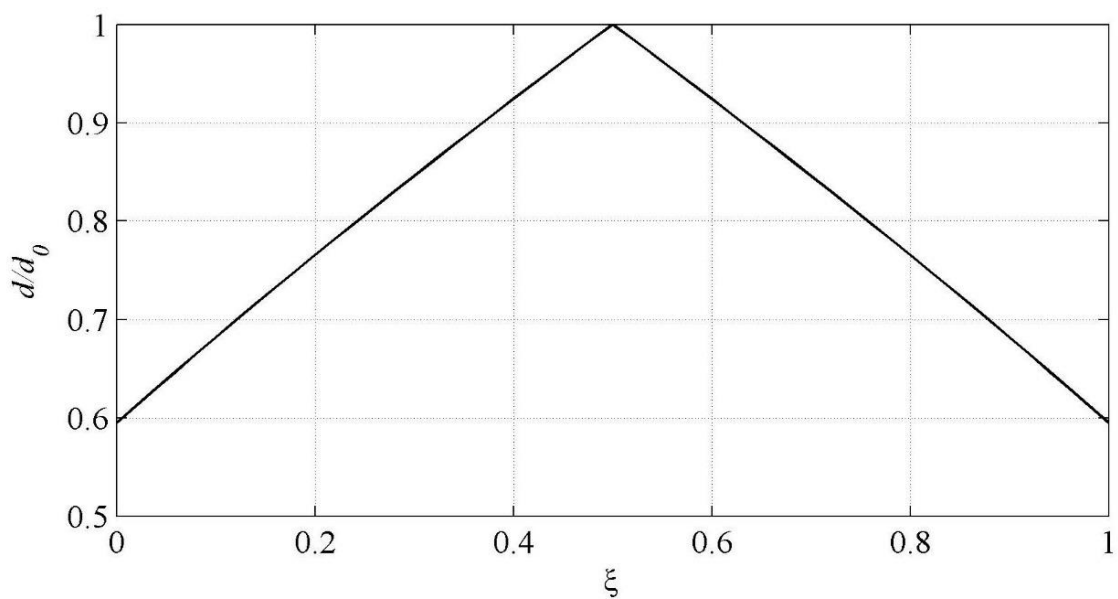


Рисунок 3.6 – Изменение диаметра стержня для типовой формы №3

Объем стержня определяется следующим образом:

$$V = 4\sqrt{\pi}l \int_0^{0.5} \sqrt{I(\xi)} d\xi = 4\sqrt{\pi I_0}l \int_0^{0.5} \left(\frac{1}{2} + \xi\right)^{\frac{3}{2}} d\xi = 4\sqrt{\pi I_0}l \cdot 0,329. \quad (3.9)$$

Диаметр эквивалентного по массе стержня постоянного сечения:

$$d_{\text{экв}} = 2 \sqrt{\frac{V}{l\pi}} = 2 \sqrt{\frac{4\sqrt{\pi I_0}l \cdot 0,329}{l\pi}} = 0,811d_0. \quad (3.10)$$

При $d_{\text{экв}} = 10$ мм $d_0 = 12,33$ мм. Эффективность типовой формы №3: $\Delta F = 26,4\%$, $\Delta V = 11,73\%$. При $F = 0,5$ кН потеря устойчивости происходит через 236 ч. График роста прогиба показан на рисунке 3.7.

На рисунке 3.8 представлено распределение напряжений в стержне переменной жесткости при $t = 236$ ч в зависимости от x и y . Из данного графика видно, что в момент потери устойчивости максимальные напряжения возникают не в середине пролета.

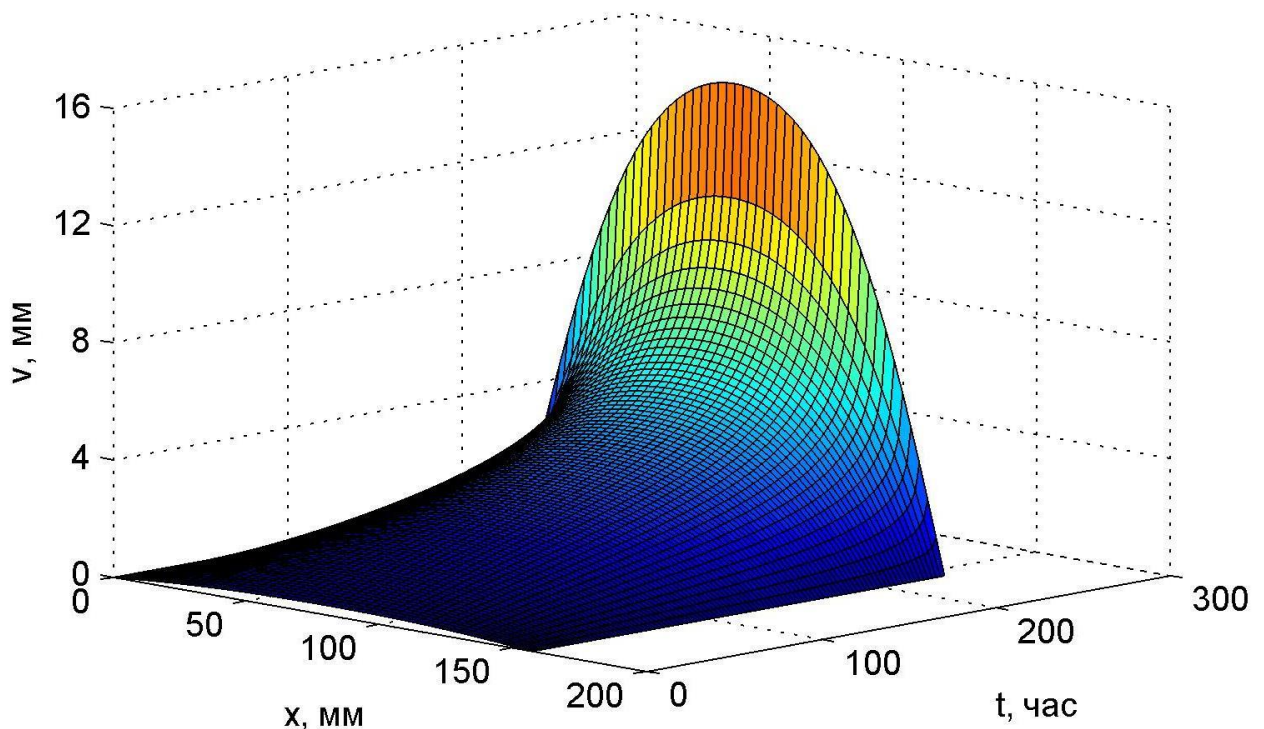


Рисунок 3.7 – Рост прогиба для стержня переменной жесткости

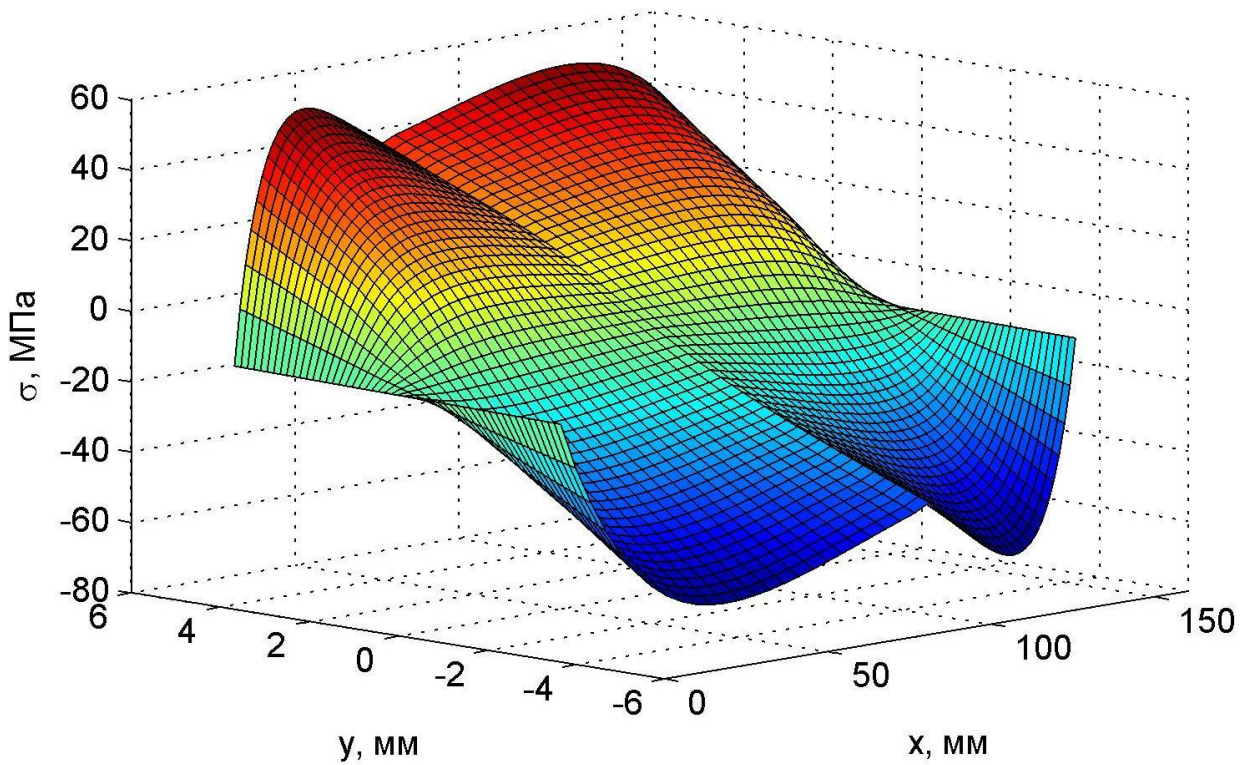


Рисунок 3.8 – Распределение напряжений в стержне переменной жесткости при $t = 236$ ч

Форма №4. Момент инерции стержня изменяется по длине следующим образом:

$$I(x) = \begin{cases} I_0 \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{l} \right) = \frac{\pi d_0^4}{64} \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{l} \right), & \text{при } x \in \left[0; \frac{l}{2} \right] \\ I_0 \left(\frac{3}{2} - \frac{x}{l} \right) = \frac{\pi d_0^4}{64} \left(\frac{3}{2} - \frac{x}{l} \right), & \text{при } x \in \left[\frac{l}{2}; l \right]. \end{cases} \quad (3.11)$$

График изменения диаметра стержня показан на рисунке 3.9.

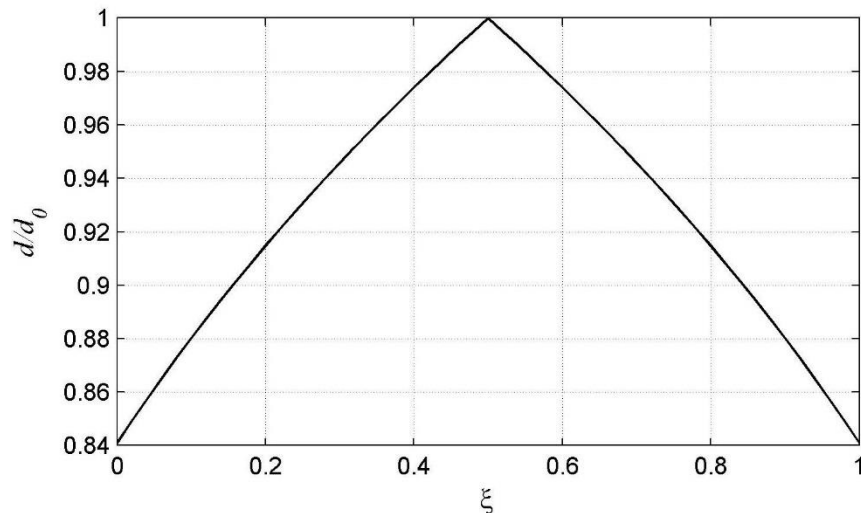


Рисунок 3.9 – Изменение диаметра стержня для типовой формы №4

Объем стержня переменной жесткости определяется следующим образом:

$$V = 4\sqrt{\pi}l \int_0^{0.5} \sqrt{I(\xi)} d\xi = 4\sqrt{\pi I_0}l \int_0^{0.5} \sqrt{\left(\frac{1}{2} + \xi\right)} d\xi = 4\sqrt{\pi I_0}l \cdot 0,431. \quad (3.12)$$

Диаметр эквивалентного по массе стержня постоянного сечения:

$$d_{\text{экв}} = 2 \sqrt{\frac{V}{l\pi}} = 2 \sqrt{\frac{4\sqrt{\pi I_0}l \cdot 0,431}{l\pi}} = 0,928d_0. \quad (3.13)$$

При $d_{\text{экв}} = 10$ мм $d_0 = 10,78$ мм. Эффективность типовой формы №4: $\Delta F = 13,94\%$, $\Delta V = 6,05\%$. При $F = 0,5$ кН потеря устойчивости происходит через 62 ч 6 мин. График роста стрелы прогиба показан на рисунке 3.10.

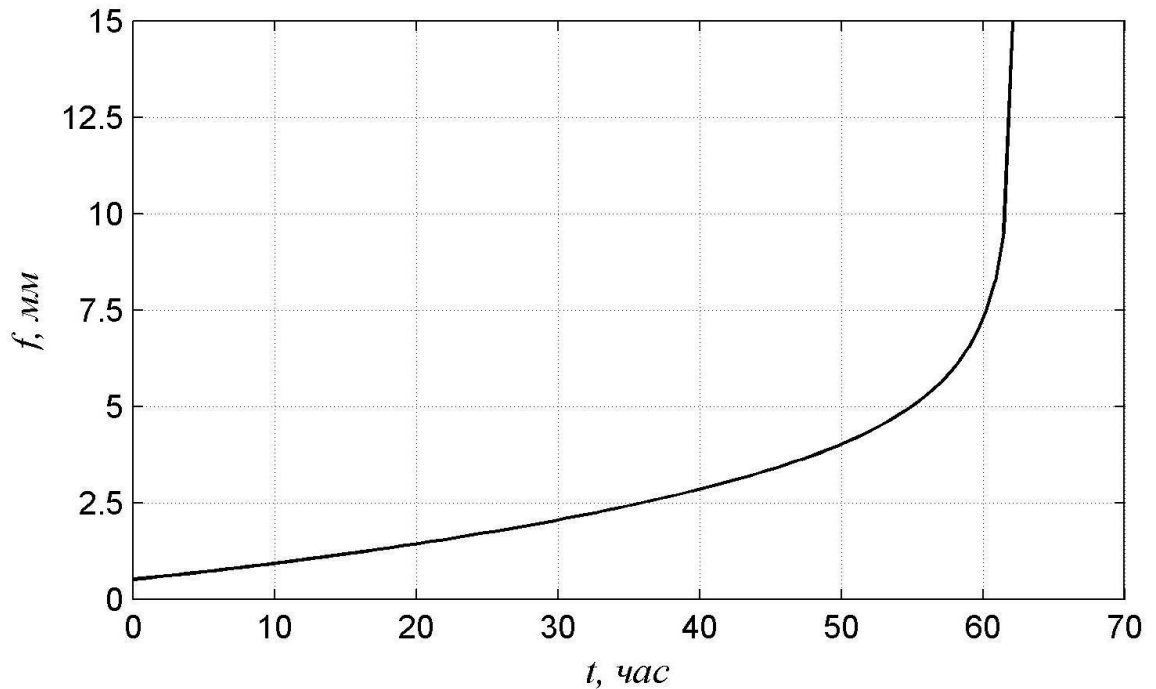


Рисунок 3.10 – График роста стрелы прогиба для типовой формы №4

Распределение напряжений в зависимости от x и y в момент потери устойчивости показано на рисунке 3.11. Для типовой формы №4, как и для формы №3 максимальные напряжения возникают не в середине пролета.

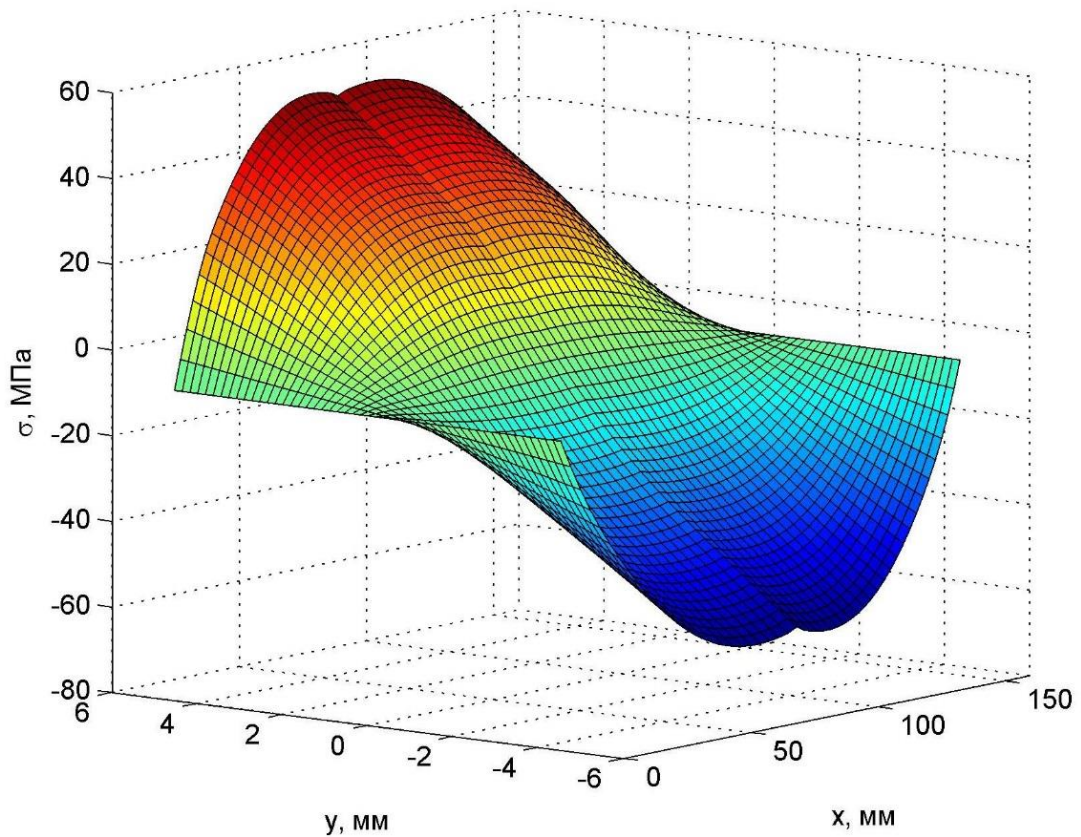


Рисунок 3.11 – Распределение напряжений в момент потери устойчивости

Форма №5. Момент инерции стержня изменяется по следующему закону:

$$I(x) = I_0 \left[-2 \frac{\left(\frac{l}{2} - x\right)^2}{l^2} + 1 \right]^3 = \frac{\pi d_0^4}{64} \left[-2 \frac{\left(\frac{l}{2} - x\right)^2}{l^2} + 1 \right]^3. \quad (3.14)$$

В безразмерных координатах выражение (3.14) принимает вид:

$$I(\xi) = I_0 \left[1 - 2 \left(\frac{1}{2} - \xi \right)^2 \right]^3. \quad (3.15)$$

График изменения диаметра для типовой формы №5 показан на рисунке 3.12.

Объем стержня определяется следующим образом:

$$V = 2\sqrt{\pi}l \int_0^1 \sqrt{I(\xi)} d\xi = 2\sqrt{\pi I_0}l \int_0^1 \left[1 - 2 \left(\frac{1}{2} - \xi \right)^2 \right]^{\frac{3}{2}} d\xi = 2\sqrt{\pi I_0}l \cdot 0,77. \quad (3.16)$$

Диаметр эквивалентного по массе стержня:

$$d_{\text{экв}} = 2 \sqrt{\frac{V}{l\pi}} = 2 \sqrt{\frac{2\sqrt{\pi I_0 l} \cdot 0,77}{l\pi}} = 2 \sqrt{\frac{2\sqrt{\pi \frac{\pi d_0^4}{64}} \cdot 0,77}{\pi}} = 0,877 d_0. \quad (3.17)$$

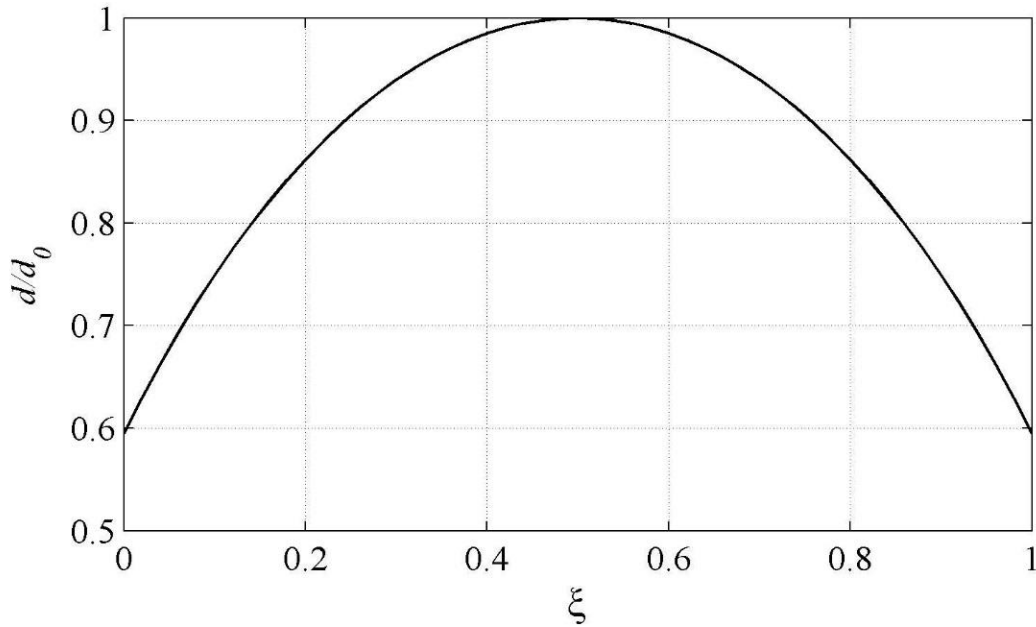


Рисунок 3.12 – Изменение диаметра для типовой формы №3

Эквивалентному диаметру стержня постоянного сечения $d_{\text{экв}} = 10$ мм соответствует величина $d_0 = 11,4$ мм. Типовая форма №5 имеет следующую эффективность: $\Delta F = 29,6\%$, $\Delta V = 13,24\%$. Потеря устойчивости при $F = 0.5$ кН происходит через 347 ч. График роста стрелы прогиба показан на рисунке 3.13. Штриховой линии соответствует результат для стержня постоянной жесткости при той же массе. Критическое время для стержня переменного сечения увеличилось в 42,5 раз.

На рисунке 3.14 показано распределение напряжений в стержне переменной жесткости в зависимости от x и y при $t = 347$ ч. Из данного графика видно, что на достаточно протяженном участке длины стержня напряжения в его крайних волокнах остаются примерно постоянными. Это говорит о том, что стержень близок к равнопрочному, и это также объясняет наибольшую эффективность данной формы изменения жесткости по сравнению с предыдущими.

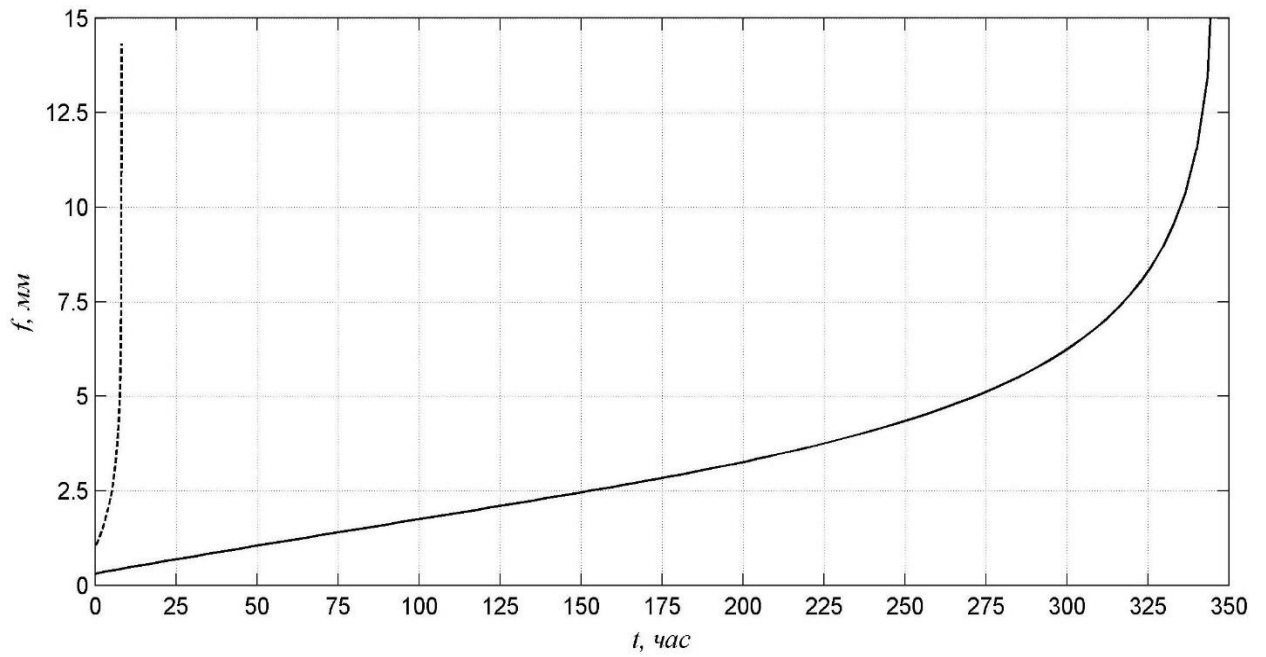


Рисунок 3.13 – Рост стрелы прогиба для стержня постоянной и переменной жесткости при одинаковой массе

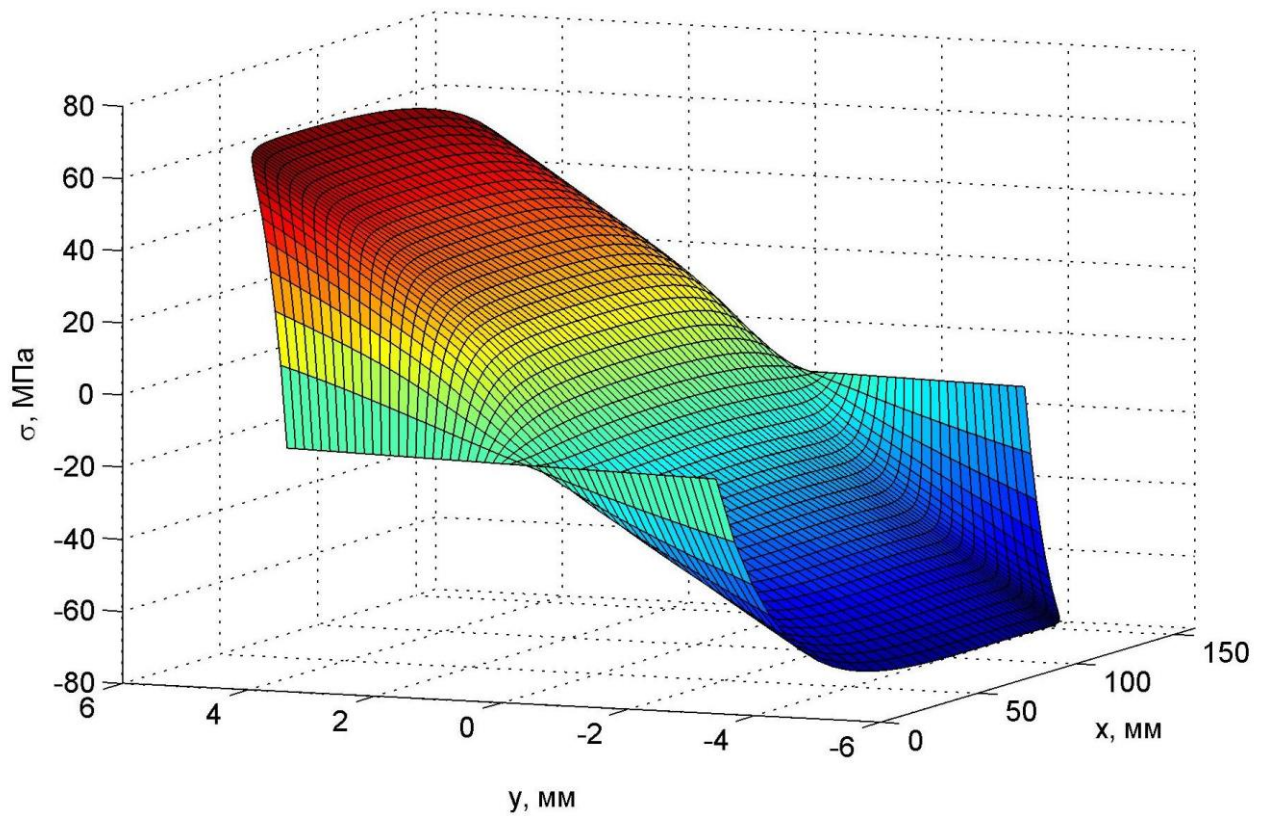


Рисунок 3.14 – Распределение напряжений в стержне переменной жесткости в зависимости от x и y

3.2 Методика оптимизации формы сжатых стержней

В работе [94] приводится методика оптимизации сжатых стержней, работающих в упругой стадии. Автором данная методика была модифицирована. Сущность ее состоит в следующем:

1. Задается величина начальной погиби $\tilde{f}_0$ и рассчитывается стержень постоянной жесткости на определенную величину сжимающей силы F . Вычисляются максимальные напряжения в каждом сечении.
2. Корректируется диаметр d в каждом сечении пропорционально возникшим напряжениям:

$$d_{i+1}(x) = \frac{1}{2} d_i(x) \left(1 + \left[\frac{\sigma(x)}{\sigma_{max}} \right]^\gamma \right),$$

где $d_{i+1}(x)$ – откорректированный диаметр стержня, $d_i(x)$ – текущий диаметр стержня, $\sigma(x)$ – наибольшее по абсолютной величине напряжение в заданном сечении, σ_{max} – наибольшее по абсолютной величине напряжение во всем стержне. Лучшая сходимость достигается при $\gamma = 1/2$.

3. Чтобы объем стержня оставался постоянным, умножаем величину d в каждом сечении на $k = (V_0/V)^{0.5}$, где V_0 – объем стержня постоянной жесткости, $V = \int_0^l A(x)dx$ – объем стержня переменного сечения. Интеграл может быть вычислен численно, например, при помощи формулы Симпсона или трапеций.
4. Итерационный процесс повторяется, пока напряжения σ_{max} в предыдущем и последующем приближении отличаются более чем на 1%.

Задавая различные величины $\tilde{f}_0$, можно получить формы изменения жесткости с различным отношением максимального диаметра стержня к диаметру на опорах.

На рисунке 3.15 представлены графики изменения диаметра стержня переменной жесткости в зависимости от x , построенные при различных значениях

начальной погиби $\tilde{f}_0$. Масса всех стержней одинакова и равна массе стержня постоянного сечения при $d = 10$ мм. Величина сжимающей силы принималась равной $F = 0.5$ кН. Кривой 1 соответствует $\tilde{f}_0 = 0,16$ мм, 2 – $\tilde{f}_0 = 0.25$ мм, 3 – $\tilde{f}_0 = 1$ мм, 4 – $\tilde{f}_0 = 2$ мм. Из рисунка 3.15 видно, что с увеличением величины $\tilde{f}_0$ возрастает величина d_{max}/d_{min} .

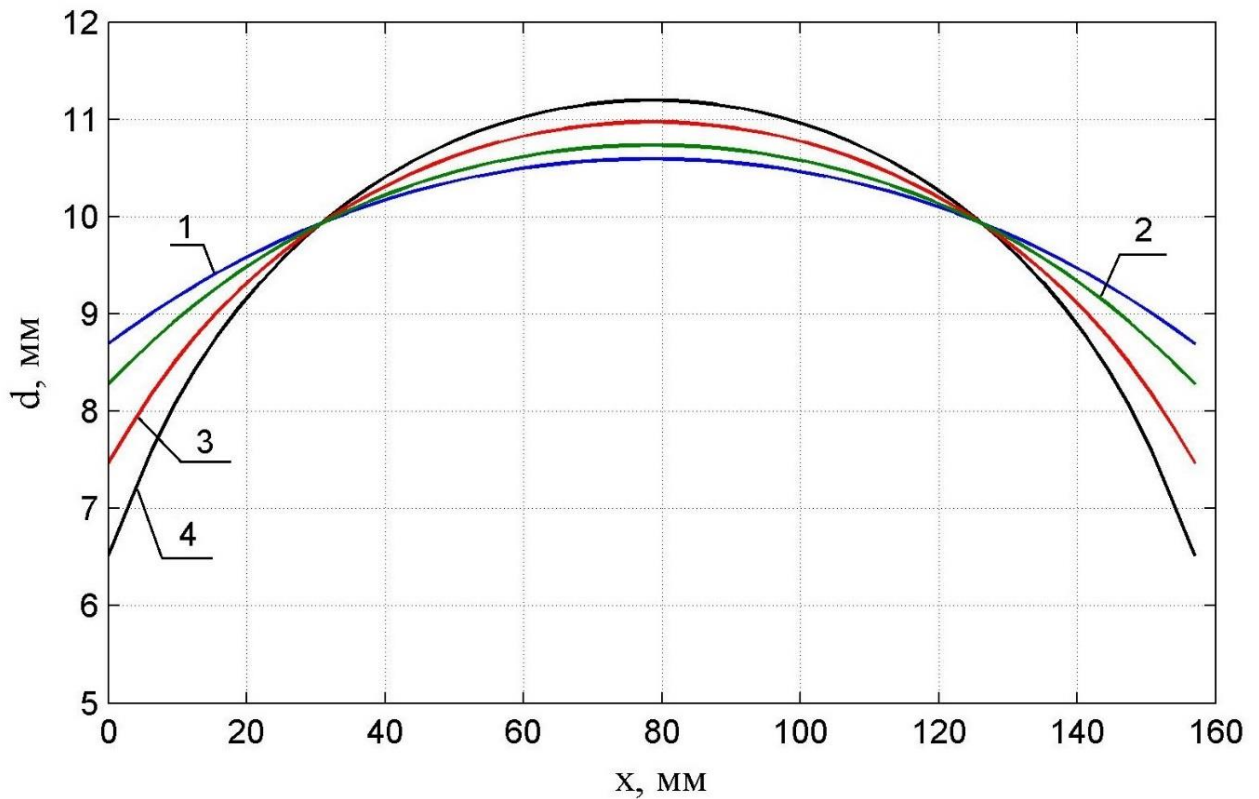


Рисунок 3.15 – Законы изменения диаметра стержня при различных значениях $\tilde{f}_0$:

1 – $\tilde{f}_0 = 0,16$ мм, 2 – $\tilde{f}_0 = 0.25$ мм, 3 – $\tilde{f}_0 = 1$ мм, 4 – $\tilde{f}_0 = 2$ мм

Полученные кривые были аппроксимированы полиномами по методу наименьших квадратов. Аппроксимация кривой 1 имеет вид:

$$d(\xi) = d_0(-0,708\xi^2 + 0,708\xi + 0,824). \quad (3.18)$$

Диаметр эквивалентного по массе стержня постоянного сечения: $d_{\text{экв}} = 0.944 d_0$. Мгновенная критическая сила при $l = 157$ мм и $d_{\text{экв}} = 10$ мм для стержня, у которого диаметр изменяется по закону (3.18), $F_{\text{кр}} = 0.662$ кН. Это на 15,3% выше, чем у стержня постоянной жесткости при той же массе.

При $f_0 = 0.16$ мм и $F = 0.5$ кН стержень, закон изменения диаметра которого имеет вид (3.18) теряет устойчивость через 72 ч 30 мин. График роста стрелы прогиба показан на рисунке 3.16.

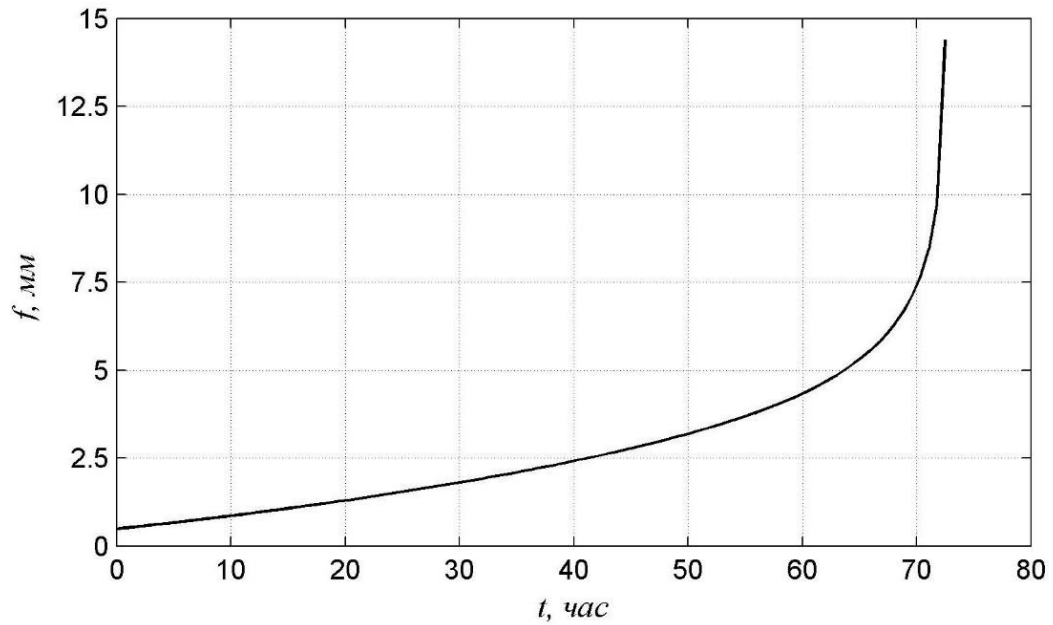


Рисунок 3.16 – График роста стрелы прогиба для стержня, у которого диаметр изменяется по закону (3.18)

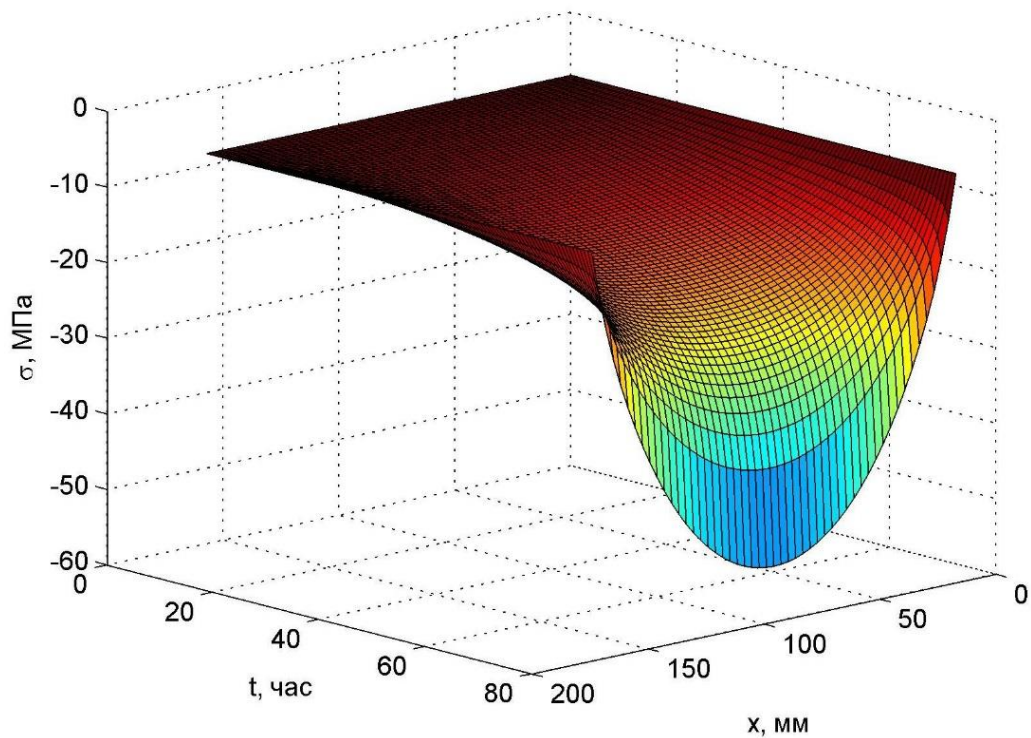


Рисунок 3.17 – Изменение напряжений у более сжатой грани в зависимости от x и t

На рисунке 3.17 показано распределение напряжений у более сжатой грани стержня в зависимости от x и t . Из данного графика видно, что равнопрочное состояние стержня наблюдается только в начале процесса ползучести. Далее напряжения на концах стержня остаются постоянными, а в середине пролета возрастают.

Кривая 2 на рисунке 3.15 аппроксимируется следующим образом:

$$d(\xi) = d_0(-0,896\xi^2 + 0,896\xi + 0,779). \quad (3.19)$$

Диаметр эквивалентного по массе стержня постоянного сечения: $d_{\text{экв}} = 0.932 d_0$. Мгновенная критическая сила для стержня, диаметр которого изменяется по закону (3.19) при $d_{\text{экв}} = 10$ мм, $F_{\text{кр}} = 0.681$ кН. Это на 18,64% выше, чем у стержня постоянной жесткости при той же массе.

Потеря устойчивости при $F = 0.5$ кН для стержня переменного сечения при законе (3.19) происходит через 107 ч 30 мин. График роста стрелы прогиба показан на рисунке 3.18.

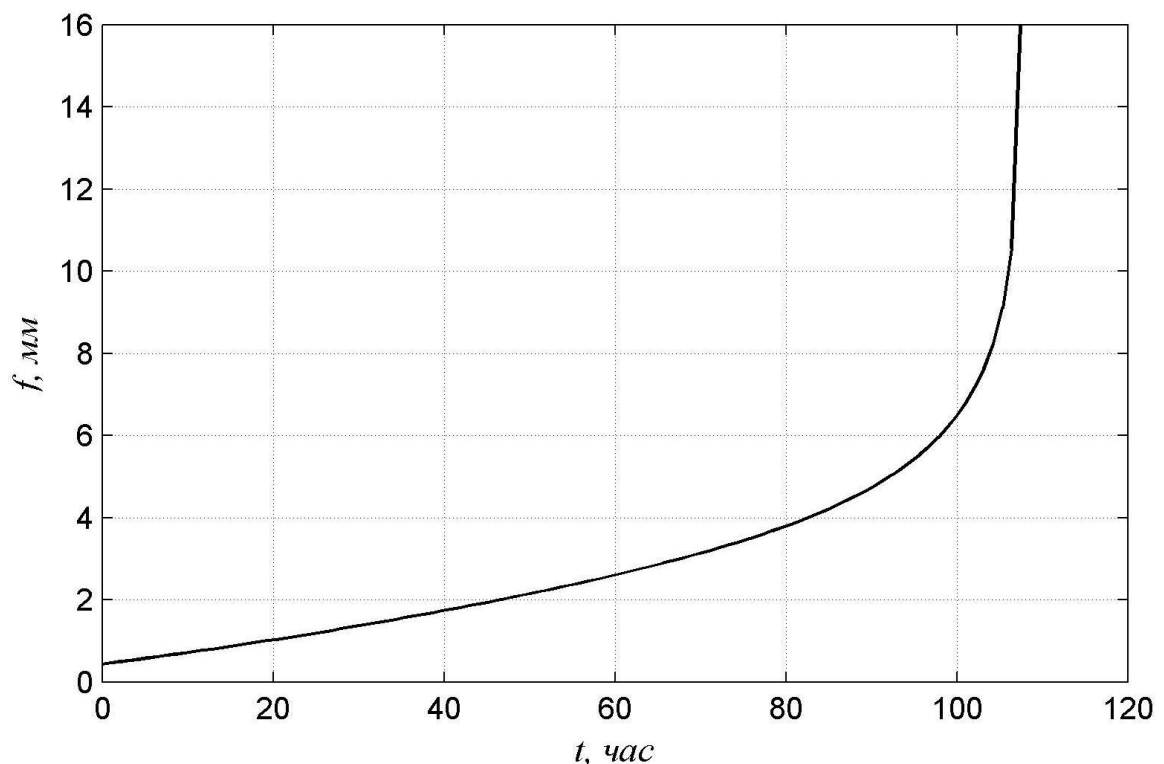


Рисунок 3.18 – Рост стрелы прогиба при диаметре стержня, изменяющемся по формуле (3.19)

На рисунке 3.19 показан график изменения напряжений у более сжатой грани в зависимости от x и t при $0 \leq t \leq 80$ ч. Из данного графика видно, что при $t = 0$ напряжения вблизи опор стержня по абсолютному значению выше, чем в середине пролета. Однако с течением времени напряжения в середине пролета возрастают и оказываются существенно выше, чем на концах стержня.

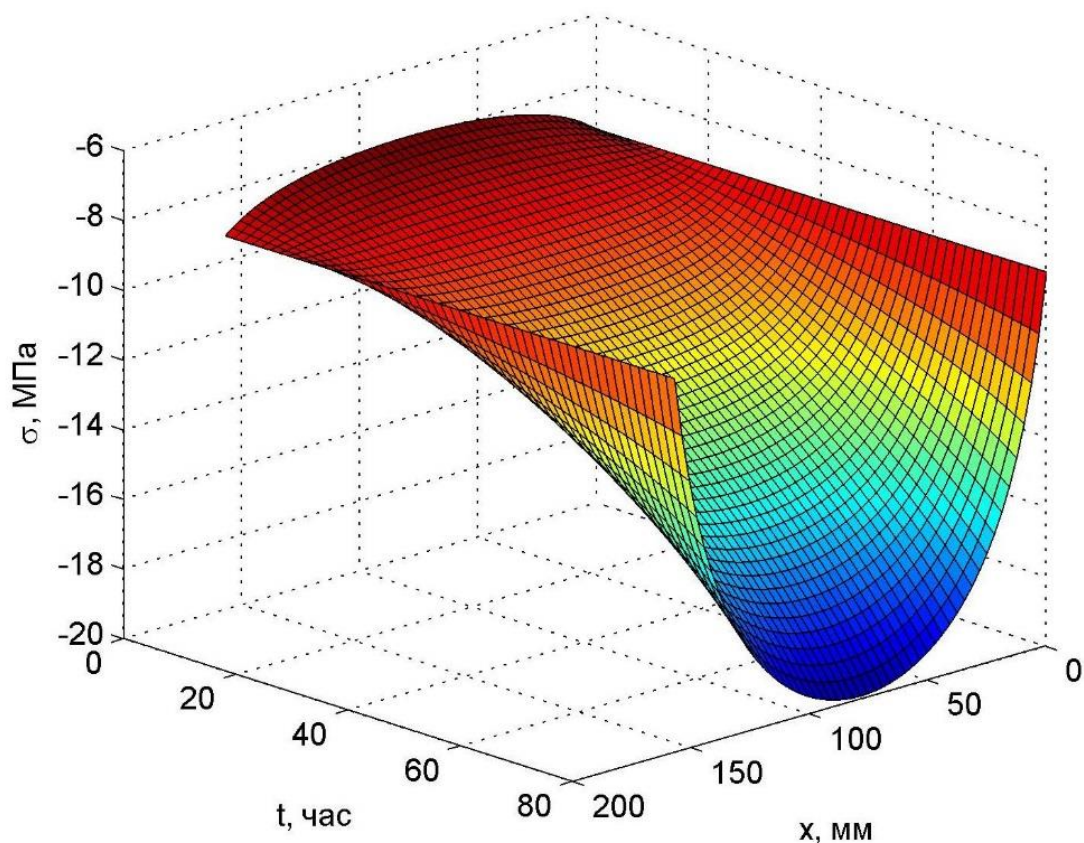


Рисунок 3.19 – Изменение напряжений у более сжатой грани для стержня переменной жесткости в зависимости от x и t .

Кривая 3 на рисунке 3.15 аппроксимируется следующим образом:

$$d(\xi) = d_0(-2,985\xi^4 + 5,97\xi^3 - 5,366\xi^2 + 2,381\xi + 0,588). \quad (3.20)$$

При этом $d_{\text{экв}} = 0,893 d_0$, $F_{\text{кр}} = 0,74$ кН, что на 28,92% выше, чем для стержня постоянной жесткости. Потеря устойчивости при $F = 0,5$ кН происходит через 323 ч. График роста стрелы прогиба показан на рисунке 3.20.

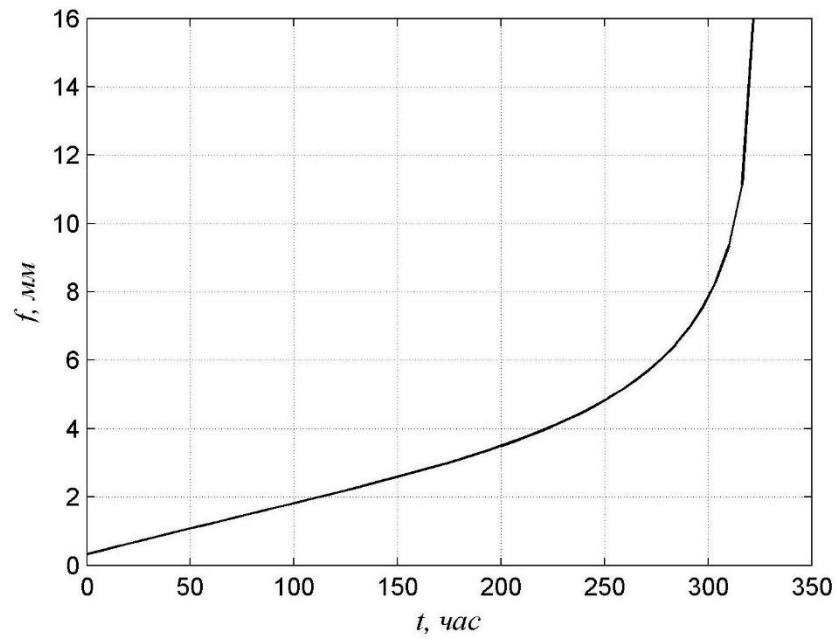


Рисунок 3.20 – Рост стрелы прогиба при диаметре стержня, изменяющемся по закону (3.20)

Распределение напряжений у более сжатой грани в зависимости от x и t представлено на рисунке 3.21.

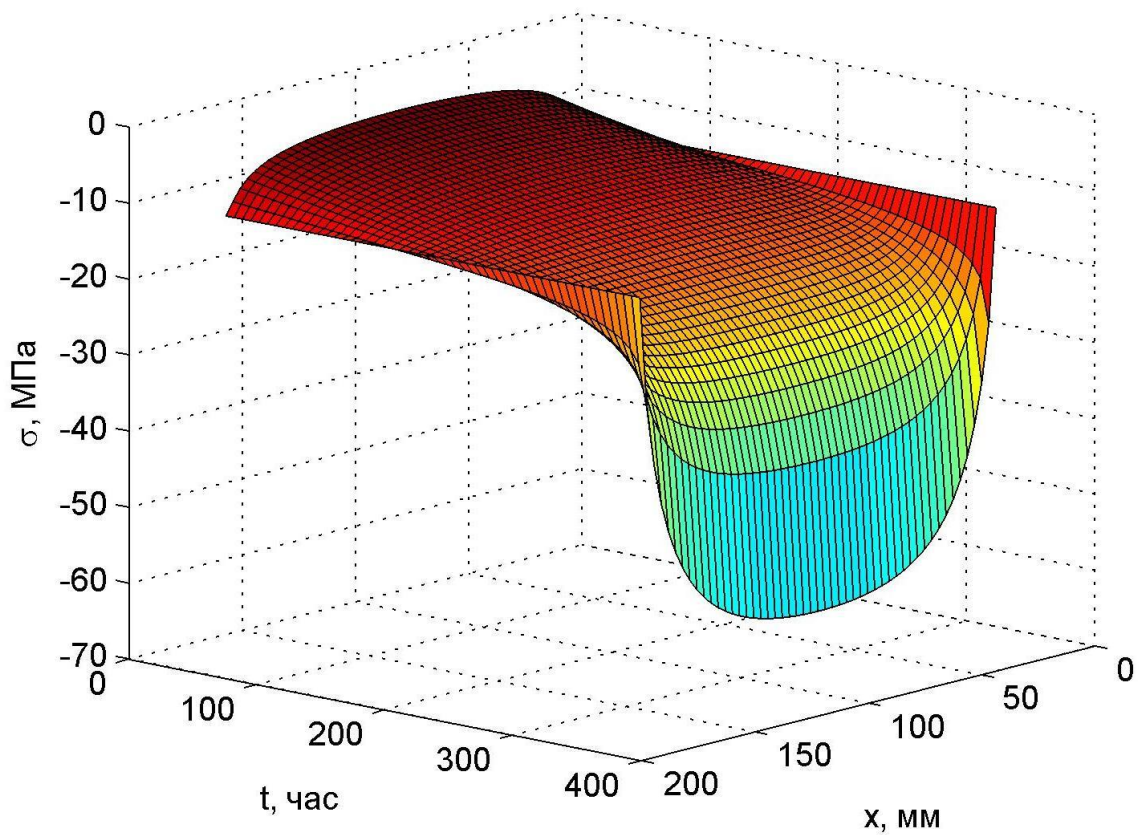


Рисунок 3.21 – Изменение напряжений у более сжатой грани для стержня переменной жесткости при законе изменения диаметра (3.20)

Аппроксимация кривой 4 на рисунке 3.15 имеет вид:

$$d(\xi) = d_0(-4,445\xi^4 + 8,891\xi^3 - 7,52\xi^2 + 3,074\xi + 0,503). \quad (3.21)$$

При этом $d_{\text{экв}} = 0,879 d_0$, $F_{\text{кр}} = 0,758$ кН, $\Delta F = 32,1\%$. Потеря устойчивости при $F = 0.5$ кН и $f_0 = 0.16$ мм происходит через 445 ч. График роста стрелы прогиба показан на рисунке 3.22.

С увеличением отношения $d_{\text{max}}/d_{\text{min}}$ величины $F_{\text{кр}}$ и $t_{\text{кр}}$ возрастают. Из всех рассмотренных вариантов изменения жесткости при шарнирном опирании стержня наибольшие величины критической силы и критического времени наблюдаются при законе изменения диаметра, имеющем вид (3.21). Однако такие значения $F_{\text{кр}}$ и $t_{\text{кр}}$ не являются максимально возможными.

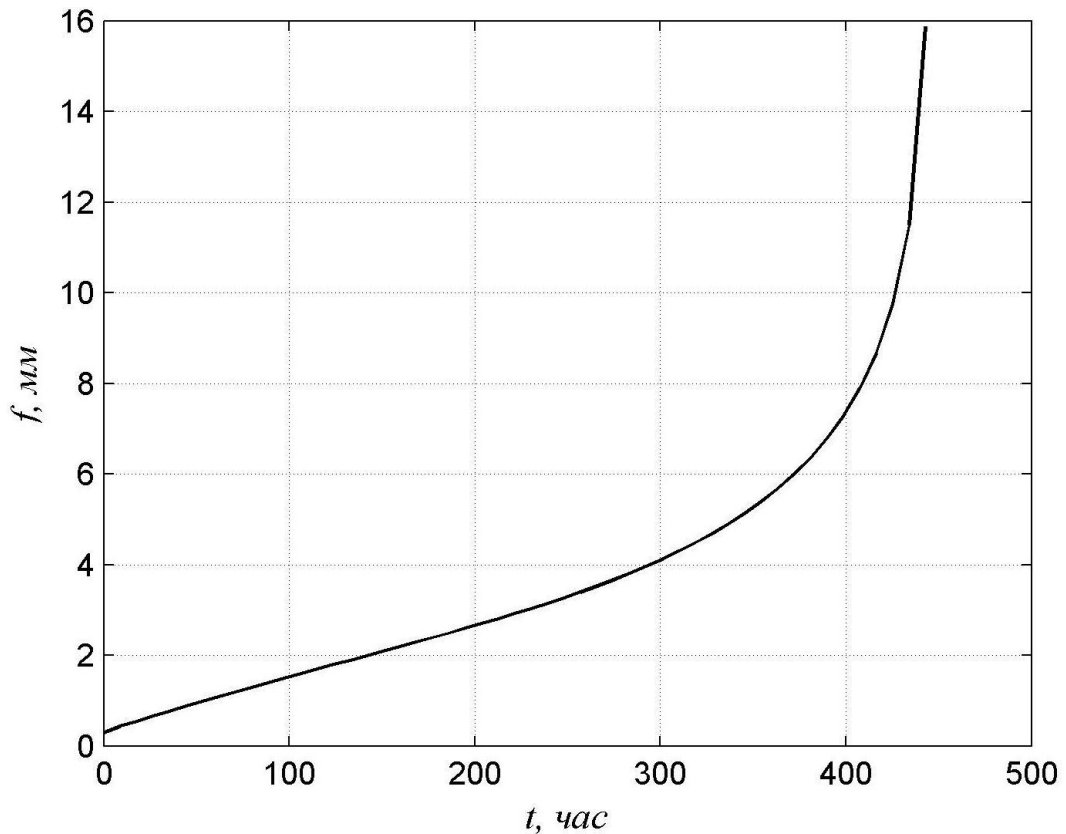


Рисунок 3.22 – Рост стрелы прогиба при диаметре стержня, изменяющемся по закону (3.21)

Аналитическое решение задачи Лагранжа об оптимальной форме сжатой колонны в случае шарнирно опертого стержня имеет вид [2]:

$$a(\xi) = \frac{4}{3} [\sin(\theta(\xi))]^2, \quad \theta - \frac{1}{2} \sin(2\theta) = \pi\xi, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad (3.22)$$

где $a(\xi)$ – безразмерная площадь, равная $a(\xi) = A(\xi)l/V$.

Схематически график $a(\xi)$ показан на рисунке 3.23. При таком законе изменения площади мгновенная критическая сила оказывается в 4/3 раза больше по сравнению со стержнем постоянного сечения той же массы. Однако при этом площадь сечения на опорах равна нулю, что делает такую форму изменения жесткости непригодной для практического применения.

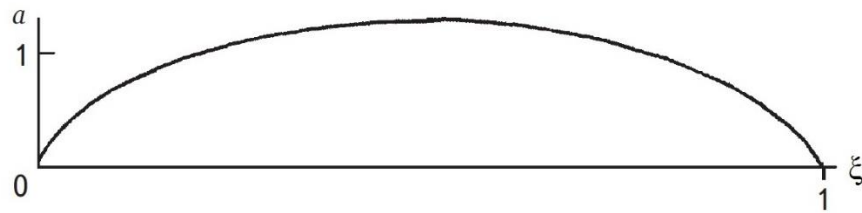


Рисунок 3.23 – Аналитическое решение задачи Лагранжа для шарнирно опертого по концам стержня

Предложенные автором формы изменения жесткости лишены указанного недостатка, и в то же время их эффективность близка к максимально возможной $\Delta F_{max} = 33,3\%$.

3.3 Вариант закрепления «защемление-свободный край»

Для данного варианта закрепления стержня И. И. Кулиничем была предложена следующая форма изменения жесткости:

$$I(x) = I_0 \left[\frac{\left(\frac{l}{2} - x\right)^2}{l^2} + \frac{\left(\frac{l}{2} - x\right)}{l} + 1 \right]^3 = \frac{\pi d_0^4}{64} \left[\frac{\left(\frac{l}{2} - x\right)^2}{l^2} + \frac{\left(\frac{l}{2} - x\right)}{l} + 1 \right]^3. \quad (3.23)$$

В безразмерных координатах формула (3.23) примет вид:

$$I(\xi) = I_0 \left[\left(\frac{1}{2} - \xi\right)^2 + \frac{3}{2} - \xi \right]^3. \quad (3.24)$$

График изменения диаметра, соответствующий формуле (3.24), показан на рисунке 3.24. Объем стержня переменной жесткости при таком законе изменения диаметра запишется в виде:

$$V = 2\sqrt{\pi I_0 l} \int_0^1 \left[\left(\frac{1}{2} - \xi \right)^2 + \frac{3}{2} - \xi \right]^{\frac{3}{2}} d\xi = 1,159 \cdot 2\sqrt{\pi I_0 l}. \quad (3.25)$$

Диаметр стержня постоянного сечения при той же массе:

$$d_{\text{экв}} = 2 \sqrt{\frac{V}{l\pi}} = 2 \sqrt{\frac{1,159 \cdot 2\sqrt{\pi I_0 l}}{\pi l}} = 1,08 d_0. \quad (3.26)$$

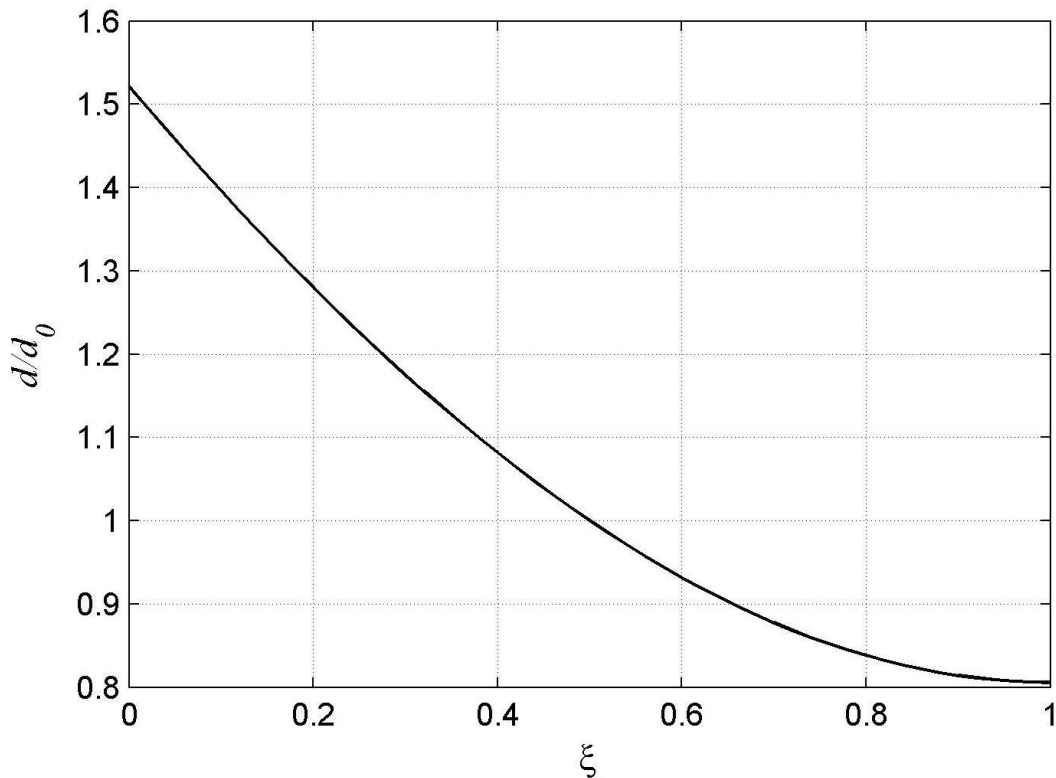


Рисунок 3.24 – График изменения диаметра стержня, соответствующий формуле (3.24)

Диаметру стержня постоянной жесткости $d_{\text{экв}} = 10$ мм соответствует величина $d_0 = 9,29$ мм. Эйлерова сила для стержня из ЭДТ-10 постоянного сечения при $l = 157$ мм: $F_3 = 145$ Н. Для стержня переменного сечения $F_{\text{кр}} = 161$ Н, что на 11% выше.

При $F = 130$ Н и $f_0 = 0.16$ мм потеря устойчивости стержня постоянной жесткости происходит через 72 ч. Для стержня переменной жесткости критическое

время $t_{кр} = 285$ ч. Графики роста стрелы прогиба для стержня постоянной и переменной жесткости показаны на рисунке 3.25.

На рисунке 3.26 представлено распределение напряжений в зависимости от x и y в момент потери устойчивости для стержня переменной жесткости. Из данного графика видно, что наибольшие напряжения при $t = t_{кр}$ возникают не в защемлении.

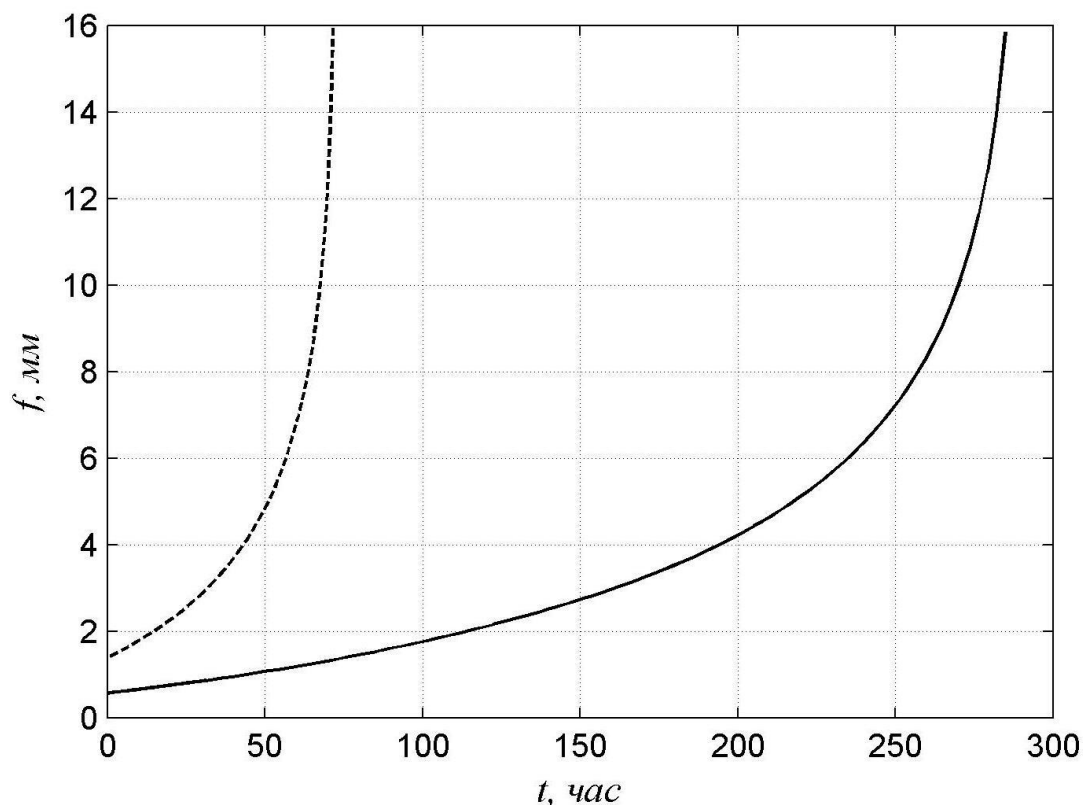


Рисунок 3.25 – Рост стрелы прогиба для стержня постоянного сечения (штриховая линия) и переменного сечения (сплошная линия)

Точное решение задачи Лагранжа для варианта «защемление-свободный конец» имеет вид [2]:

$$a(\xi) = \frac{4}{3} [\sin(\theta(\xi))]^2, \quad \theta - \frac{1}{2} \sin(2\theta) = \frac{\pi(1 + \xi)}{2}, \quad \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi. \quad (3.27)$$

Обозначения такие же, как в формуле (3.22). График изменения безразмерной площади $a(\xi)$ схематически показан на рисунке 3.27. На свободном конце при этом площадь оказывается равной нулю.

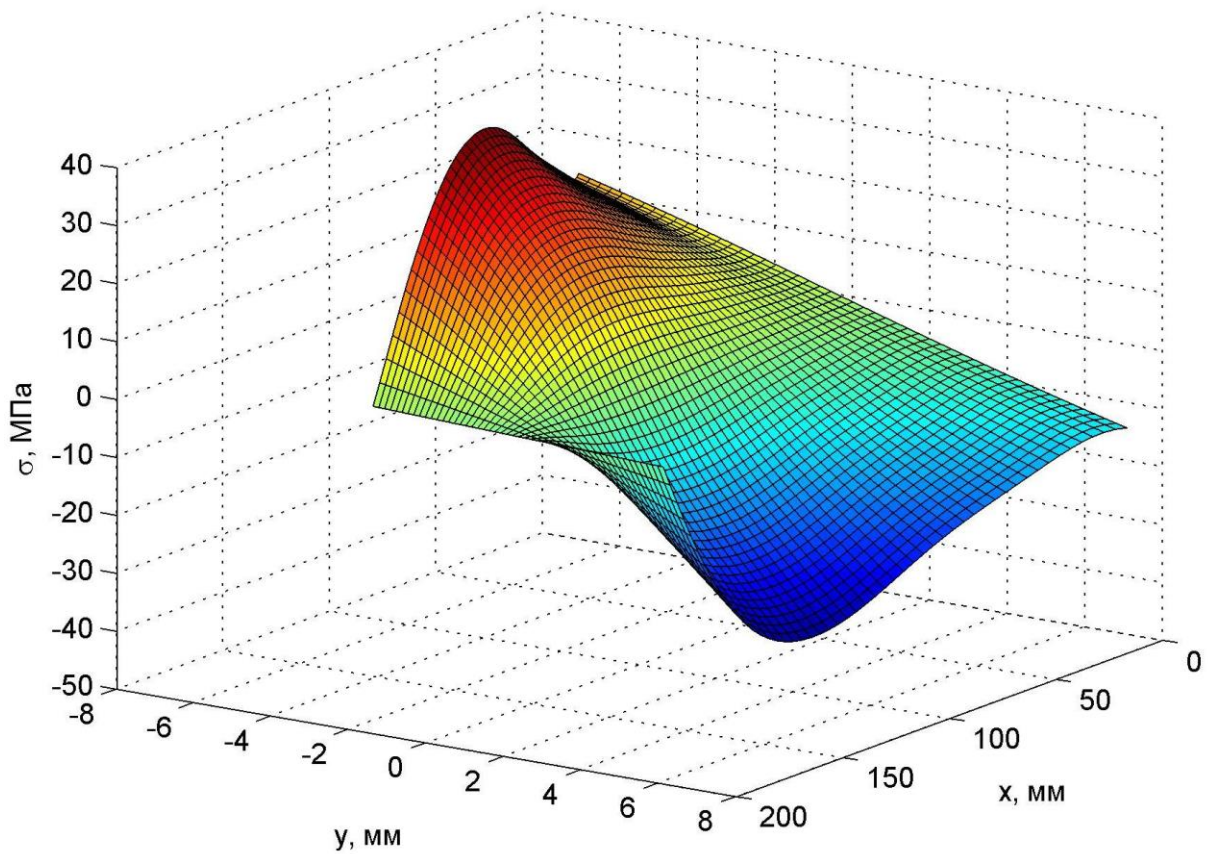


Рисунок 3.26 – Распределение напряжений в момент потери устойчивости в зависимости от x и y для стержня переменной жесткости

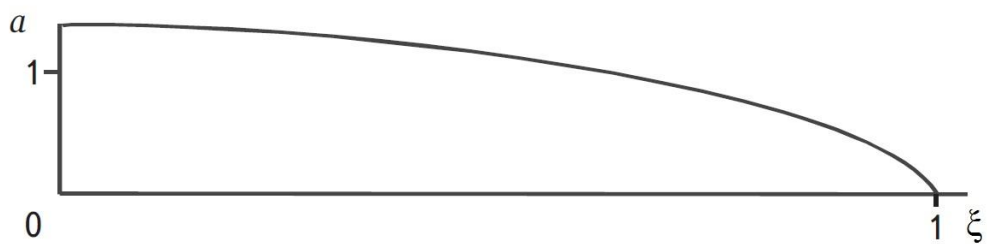


Рисунок 3.27 – Аналитическое решение задачи Лагранжа для варианта закрепления «защемление – свободный конец»

Используя методику оптимизации, изложенную в предыдущем параграфе, и задавая различные значения $\tilde{f}_0$, автор получил кривые изменения диаметра, представленные на рисунке 3.28.

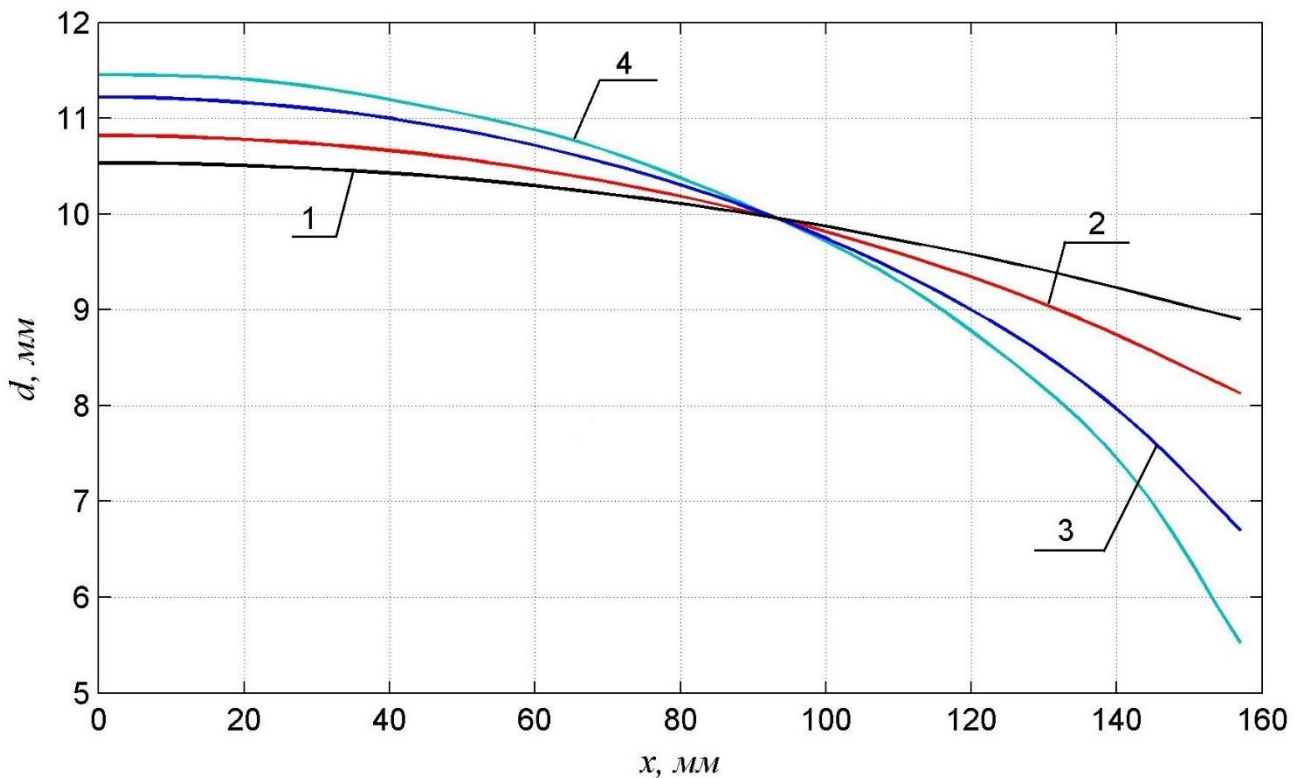


Рисунок 3.28 – Формы изменения диаметра стержня, полученные автором

Аппроксимирующие функции, а также результаты расчета для каждой из полученных автором форм изменения жесткости представлены в таблице 3.1.

Таблица 3.1 – Аппроксимирующие функции и результаты расчета для форм изменения жесткости, представленных на рисунке 3.28

№ фор мы	Аппроксимирующая функция $d(\xi)$	$\frac{d_{\text{ЭКВ}}}{d_0}$	$F_{\text{кр}},$ Н	$\Delta F, \%$	$t_{\text{кр}}$ при $F=130\text{Н},$ час
1	$d_0(-0.156\xi^2 + 1)$	0,949	163	12,4	355
2	$d_0(-0.271\xi^2 + 0.018\xi + 1)$	0,924	173	19,3	610
3	$d_0(-0.327\xi^3 - 0.052\xi^2 - 0.052\xi + 1)$	0,891	184	26,9	1085
4	$d_0(-0.592\xi^3 + 0.106\xi^2 - 0.093\xi + 1)$	0,873	190	31	1385

Эффективность каждой из предложенных форм изменения жесткости стержня выше, чем у формы, описываемой уравнением (3.23). Эффективность четвертой формы в таблице 3.1 ($\Delta F = 31\%$) близка к максимальной теоретически возможной $\Delta F_{\text{max}} = 33,3\%$.

3.4 Жестко зашеченный по концам стержень

Аналитическое решение задачи Лагранжа для жестко зашеченного по концам стержня имеет вид [2]:

$$a(\xi) = \frac{4}{3} [\sin(\theta(\xi))]^2, \quad \theta - \frac{1}{2} \sin(2\theta) = 2\pi\xi - \frac{\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{2}. \quad (3.28)$$

График $a(\xi)$ схематически показан на рисунке 3.29. Для такого решения имеется 2 точки с нулевой площадью.

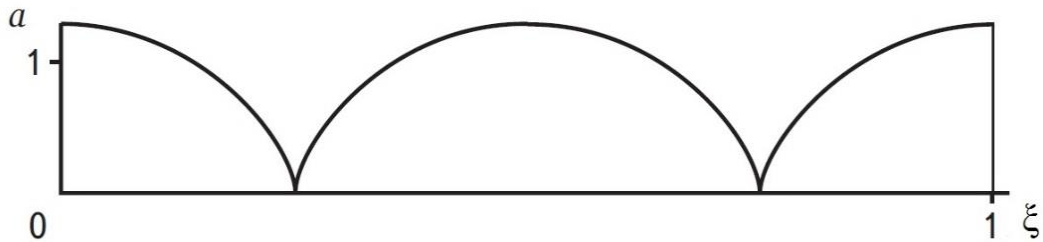


Рисунок 3.29 – Аналитическое решение задачи Лагранжа для стержня, жестко зашеченного по концам

И. И. Кулиничем предложена следующая форма изменения жесткости стержня:

$$I(x) = I_0 \left[0,1 + 0,9 \left(\cos^2 \frac{2\pi x}{l} \right) \right]. \quad (3.29)$$

График изменения диаметра, соответствующий формуле (3.29) показан на рисунке 3.30. Объем стержня переменной жесткости определяется следующим образом:

$$V = 2\sqrt{\pi I_0} l \int_0^1 \sqrt{0,1 + 0,9 (\cos(2\pi\xi))^2} d\xi = 2\sqrt{\pi I_0} l \cdot 0,703. \quad (3.30)$$

Эквивалентный диаметр стержня постоянной жесткости при той же массе $d_{\text{экв}} = 0,838d_0$. Эффективность предложенной И. И. Кулиничем формы изменения жесткости достаточна высока и близка к теоретически максимально возможной: $\Delta F = 28\%$.

Была решена модельная задача для стержня постоянного сечения из ЭДТ-10 при $d = 10$ мм, $l = 157$ мм, $f_0 = 0.16$ мм, а также стержня переменной жесткости при той же массе.

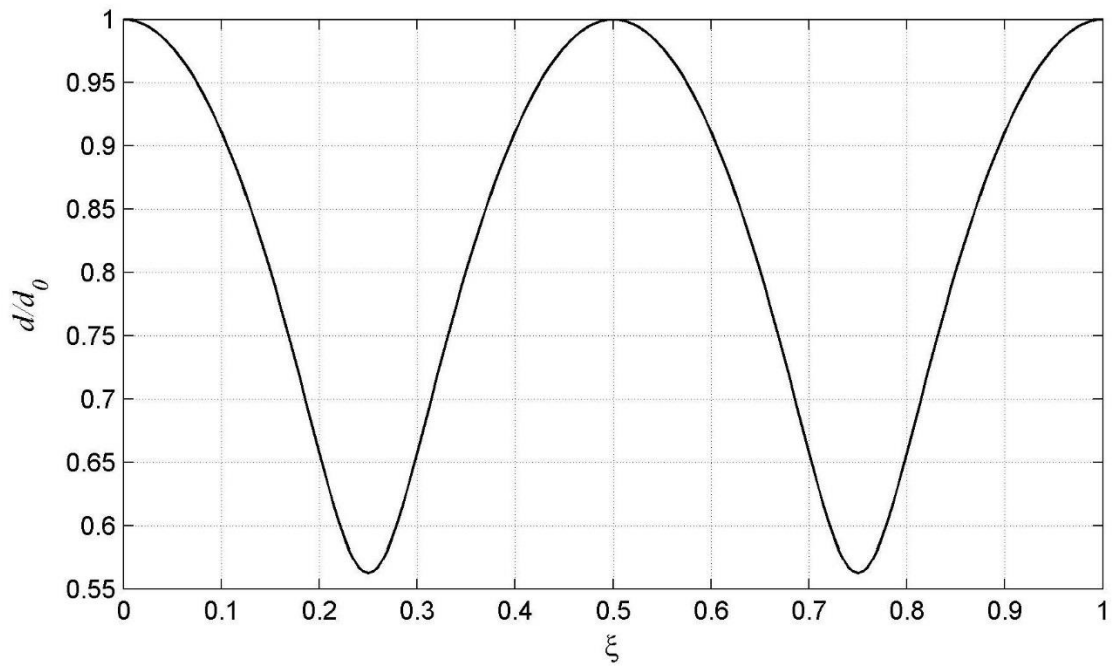


Рисунок 3.30 – Форма изменения жесткости для жестко заземленного по концам стержня

Для стержня постоянного сечения Эйлера сила $F_э = 2.32$ кН. Мгновенная критическая сила для стержня переменной жесткости $F_{мгн} = 2.97$ кН. При $F = 1.5$ кН и $d = 10$ мм = *const* потеря устойчивости происходит через 18 ч 34 мин. Стержень переменной жесткости при той же массе не теряет устойчивость, т.к. для него длительная критическая сила $F_д = \frac{H}{E} F_{мгн} = 1.54$ кН. Графики роста стрелы прогиба показаны на рисунке 3.30.

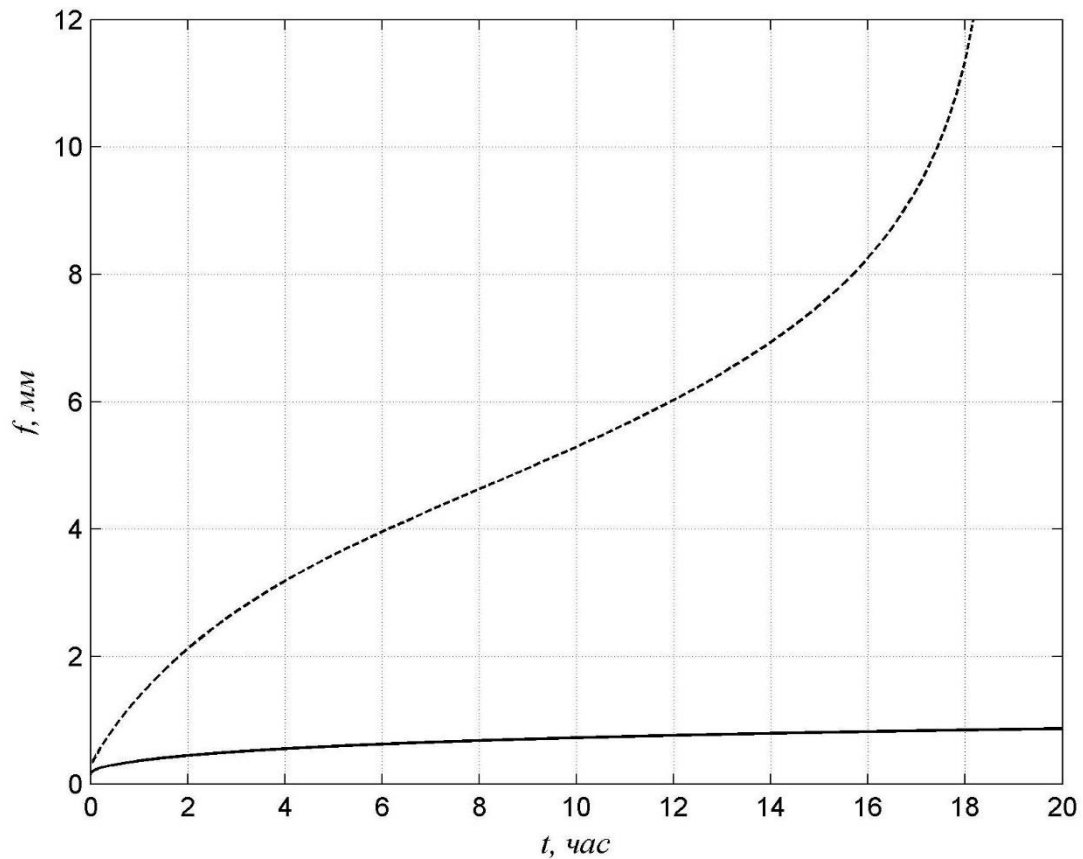


Рисунок 3.31 – Графики роста стрелы прогиба для стержня постоянной жесткости (штриховая линия) и переменной жесткости (сплошная линия) при одинаковой массе

3.5 Выводы по главе

Выполнена оценка типовых форм изменения жесткости, предложенных к.т.н., доц. И.И. Кулиничем, для различных вариантов закрепления стержней при кратковременном и длительном действии нагрузки. Предложены новые более эффективные формы изменения размеров поперечного сечения. Эффективность полученных автором форм близка к теоретически максимально возможной (33,3%).

Помимо увеличения критической силы наблюдается существенное увеличение критического времени, а для жестко защемленного по концам стержня переменной жесткости в рассмотренной задаче потеря устойчивости при той же сжимающей силе не происходит.

ГЛАВА 4. ВЛИЯНИЕ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ НА УСТОЙЧИВОСТЬ СТЕРЖНЕЙ ПРИ ПОЛЗУЧЕСТИ

Известно, что для полимерных материалов все их упругие и реологические параметры очень сильно зависят от температуры. Так, при нагреве образцов из полиметилметакрилата (ПММА) или ЭДТ от 20 до 40 °С значение релаксационной вязкости уменьшается почти в два раза [73]. Исследование влияния температуры на упругие и релаксационные характеристики полимеров было проведено В. Ф. Бабичем и А. Л. Рабиновичем [73, 95].

Зависимости от температуры релаксационных констант для эпоксидной смолы ЭДТ-10 и ПММА для «старшей» составляющей спектра имеют вид:

ЭДТ-10

$$E = -17.5T + 3525 \text{ [МПа];}$$

$$E_{\infty} = -30T + 3150 \text{ [МПа];}$$

$$m^* = -0.011T + 4.75 \text{ [МПа];}$$

$$\eta_0^* = 36000e^{\left(\frac{9500}{T+273.15}-20\right)} \text{ [МПа],}$$

ПММА

$$E = -14T + 3220 \text{ [МПа];}$$

$$E_{\infty} = -30T + 3100 \text{ [МПа];}$$

$$m^* = -0.0135T + 4.8 \text{ [МПа];}$$

$$\eta_0^* = 36000e^{\left(\frac{9500}{T+273.15}-20\right)} \text{ [МПа],}$$

где T – температура в градусах Цельсия.

4.1 Вывод разрешающих уравнений

Как и в главе 2, вывод уравнений произведем на примере шарнирно опертого по концам стержня, сжимаемого силой F (рисунок 2.1). Температура стержня, а также упругие и релаксационные константы материала являются функциями от координаты x и времени t . Для любого сечения стержня справедливы следующие интегральные зависимости:

$$M = F(v + v_0) = \int_A \sigma y dA; \quad (4.1)$$

$$F = - \int_A \sigma dA. \quad (4.2)$$

Полная деформация представляет собой сумму упругой деформации ε^{el} , деформации ползучести ε^* и температурной деформации $\varepsilon_T = \alpha \cdot \Delta T$:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \varepsilon^* + \varepsilon_T. \quad (4.3)$$

А с геометрической стороны, полная деформация сжато-изогнутого стержня представляет сумму осевой деформации ε_0 и изгибной деформации:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 - y \frac{d^2 v}{dx^2}. \quad (4.4)$$

Подставим (4.4) в (4.3) и выразим напряжение через деформации:

$$\sigma = E(\varepsilon_0 - y \frac{d^2 v}{dx^2} - \varepsilon^* - \varepsilon_T) \quad (4.5)$$

Подставив (4.4) в (4.1), получим то же самое уравнение, что было получено в главе 2:

$$EI \frac{d^2 v}{dx^2} + Fv = -Fv_0 - E \int_A \varepsilon^* y dA. \quad (4.6)$$

Модуль упругости в уравнении (4.6) является функцией времени t и координаты x . Сечение стержня может быть и переменным, т.е. $I = f(x)$. Осевая деформация определяется путем подстановки (4.5) в (4.2):

$$\varepsilon_0 = -\frac{F}{EA} + \frac{1}{A} \int_A \varepsilon^* dA + \varepsilon_T. \quad (4.7)$$

Подставим (4.7) в (4.5):

$$\sigma = -\frac{F}{A} + E \left(\frac{1}{A} \int_A \varepsilon^* dA - y \frac{d^2 v}{dx^2} - \varepsilon^* \right). \quad (4.8)$$

В уравнения (4.5) и (4.8) не входят температурные деформации. Таким образом, температура выступает только в роли фактора, оказывающего влияние на физико-механические характеристики материала и вызывающего косвенную неоднородность стержня.

При произвольных вариантах закрепления разрешающее уравнение получается путем двукратного дифференцирования по x уравнения (4.6) и имеет вид (2.33). Методика решения задач изложена в главе 2.

4.2 Решение модельных задач

Были решены модельные задачи для шарнирно опертого по концам стержня из ЭДТ-10 при следующих исходных данных: $l = 157$ мм, $f_0 = 0.16$ мм, сечение круглое, постоянное по длине, диаметром $d = 10$ мм.

Рассматривались следующие варианты изменения температуры по длине стержня:

а) Температура постоянна по длине и равна 20°C . Мгновенная критическая сила для такого варианта составила 624 Н, а длительная – 278 Н. Отношение $\frac{F_{\text{МГН}}}{F_{\text{ДЛ}}} = \frac{E}{H} = 2.25$.

б) Температура меняется по линейному закону от 20°C при $x = 0$ до 40°C при $x = l$. Температурное поле стационарное. При этом $F_{\text{МГН}} = 589$ Н, $F_{\text{ДЛ}} = 252$ Н, $\frac{F_{\text{ДЛ}}}{F_{\text{МГН}}} = 2.34$.

в) Температура стержня по длине постоянная, $T = 40^\circ\text{C}$. $F_{\text{МГН}} = 555$ Н, $F_{\text{ДЛ}} = 226$ Н, $\frac{F_{\text{ДЛ}}}{F_{\text{МГН}}} = 2.46$.

При увеличении температуры от 20 до 40°C длительная критическая сила снизилась всего на 23%. Однако в работах [81, 90] имеются данные, что при таком изменении температуры критическое время может уменьшиться в десятки раз. Это объясняется тем, что рассматриваются величины сжимающей силы в интервале $F_{\text{ДЛ}} < F < F_{\text{МГН}}$, и на процесс потери устойчивости оказывает сильное влияние релаксационная вязкость, которая от температуры зависит экспоненциально.

На рисунке 4.1 приведены графики роста стрелы прогиба для вариантов изменения температуры а, б, в при $F = 400$ Н $> F_{\text{ДЛ}}$. За критерий потери устойчивости принимали величину стрелы прогиба $f_{\text{пред}} = \frac{l}{10}$. Критическое время для вариантов а, б, в составило соответственно 475 ч, 91 ч и 20 ч, т.е. при повышении температуры стержня на 20°C уменьшилось в 24 раза.

Таким образом, нагрузка действующая на стержень, не должна превышать длительную критическую.

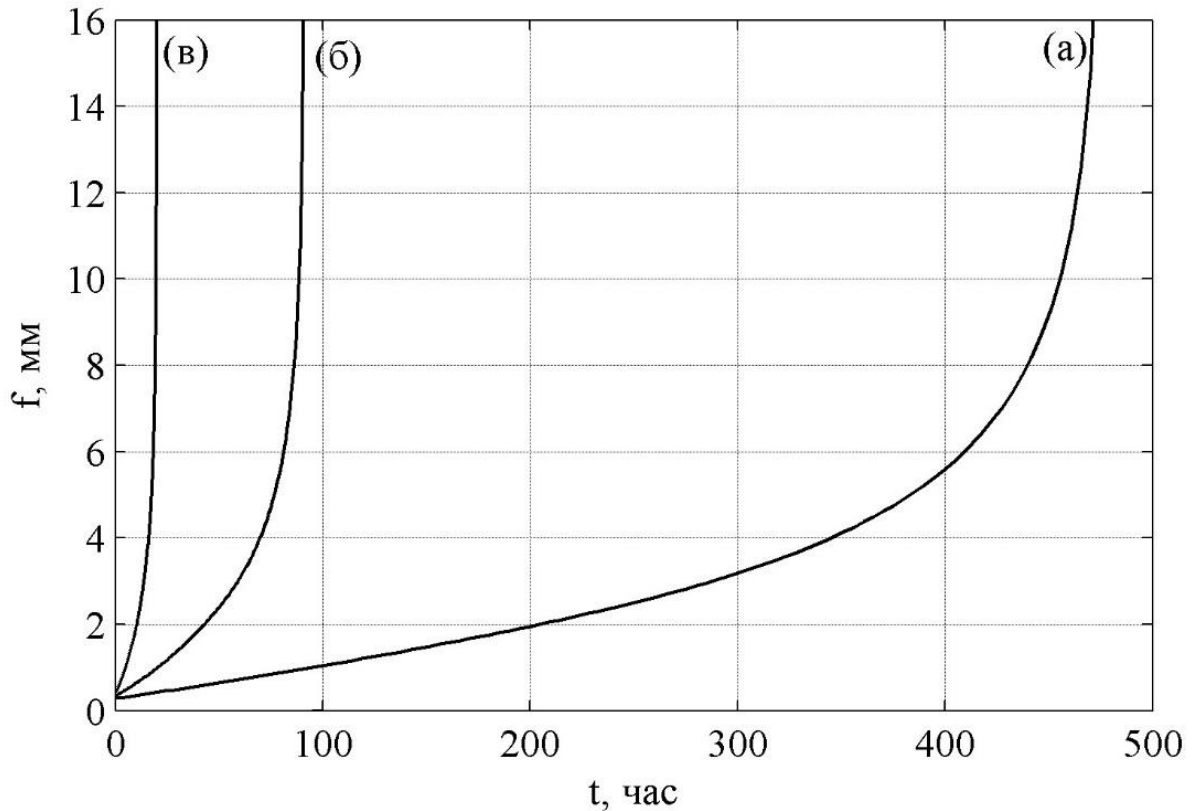


Рисунок 4.1 – Рост стрелы прогиба для вариантов изменения температуры $a, б, в$

4.3 Выпучивание стержня при равномерном нагреве

В предыдущем параграфе рассматривался случай, когда одна из опор стержня шарнирно неподвижная, а другая шарнирно подвижная. То есть при нагреве стержень может свободно увеличиваться в длине, и температурные напряжения в нем не возникают. Потеря устойчивости происходит вследствие действия на стержень активной механической нагрузки.

Рассмотрим теперь случай, когда обе опоры стержня шарнирно неподвижные и происходит равномерный нагрев стержня на величину ΔT . При повышении температуры в стержне возникнут сжимающие напряжения, и он начнет выпучиваться. В упругой постановке данная задача была решена профессором А. С. Вольмиром в работе [41]. Эта задача интересна тем, что потеря устойчивости возможна в отсутствие каких-либо активных нагрузок.

Чтобы решить данную задачу с учетом ползучести, необходимо задать начальные несовершенства. Расчетная схема стержня, имеющего начальную погибь, показана на рисунке 4.2.

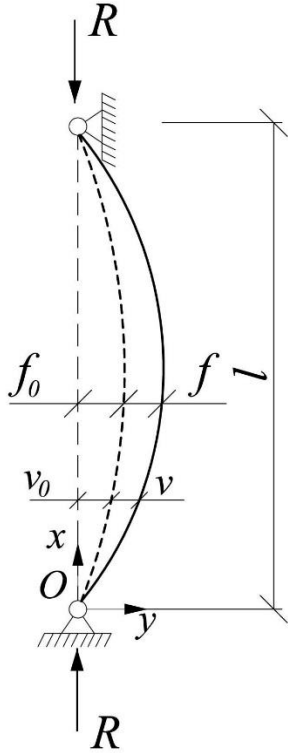


Рисунок 4.2 – К задаче
выпучивания стержня при
равномерном нагреве

Обозначим за $u(x)$ осевое перемещение точек стержня. Тогда осевая деформация ε_0 может быть найдена следующим образом:

$$\varepsilon_0 = \frac{du}{dx}. \quad (4.9)$$

Взаимное перемещение концов стержня должно быть равно нулю, т.е.:

$$\int_0^l \frac{du}{dx} dx = 0. \quad (4.10)$$

Вместо этого условия введем допущение о том, что осевая деформация по всей длине постоянна и равна нулю.

Тогда полная деформация стержня запишется в виде:

$$\varepsilon = -\frac{d^2v}{dx^2} y. \quad (4.11)$$

Реакции R в опорах могут быть найдены следующим образом:

$$R = -\int_A \sigma dA = -E \int_A \left(-y \frac{d^2v}{dx^2} - \varepsilon^* - \varepsilon_T \right) dA = E \left(A\alpha\Delta T - \int_A \varepsilon^* dA \right). \quad (4.12)$$

Из формулы (4.12) видно, что реакции опор являются функциями от времени и с течением времени убывают, так как деформации ползучести возрастают.

Изгибающий момент в стержне определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} M = R(v + v_0) &= \int_A \sigma y dA = E \int_A \left(-y \frac{d^2v}{dx^2} - \varepsilon^* - \varepsilon_T \right) y dA = \\ &= -EI \frac{d^2v}{dx^2} - \int_A \varepsilon^* y dA. \end{aligned} \quad (4.13)$$

В итоге задача сводится к уравнению (4.6). Отличие лишь в том, что постоянная активная сила F заменяется на переменную R , определяемую по формуле (4.12). Методика решения задачи ничем не отличается от той, что была изложена в главе 2.

Были решены модельные задачи для стержня из ЭДТ-10 круглого сечения при $l = 300$ мм, $d = 10$ мм, $f_0 = 0.16$ мм, $\alpha = 10^{-5}$ 1/град. Начальная температура стержня T_0 принималась равной 0°C . На рисунке 4.3 представлены графики роста стрелы прогиба. Кривой 1 соответствует нагрев на $\Delta T = 55^\circ\text{C}$, кривой 2 – на 58°C , кривой 3 – на 60°C . При расчете считали, что нагрев происходит мгновенно и затем температура остается постоянной.

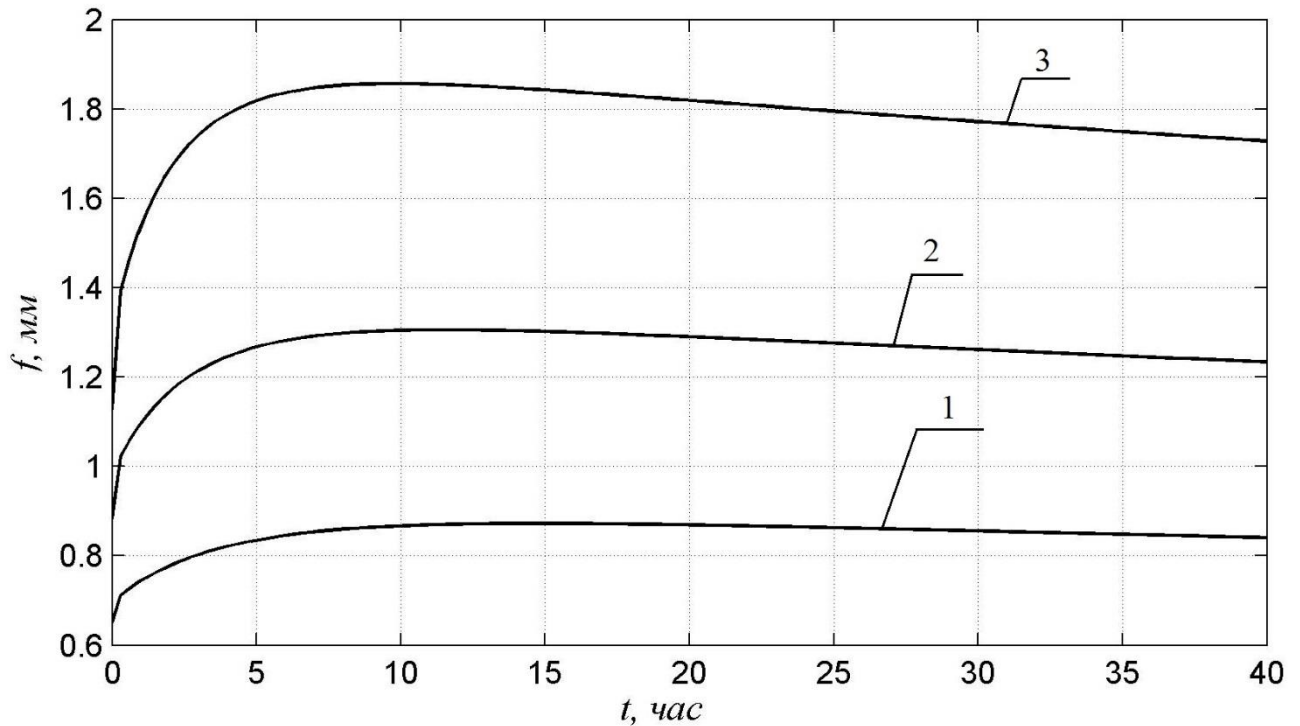


Рисунок 4.3 – Рост стрелы прогиба при нагреве стержня: 1 – $\Delta T = 55^\circ\text{C}$,
2 – $\Delta T = 58^\circ\text{C}$, 3 – $\Delta T = 60^\circ\text{C}$

Из рисунка 4.3 видно, что во всех случаях прогиб сначала возрастает, а затем убывает. Объясняется это тем, что с увеличением прогиба растет изгибающий момент, но затем за счет ползучести уменьшаются опорные реакции R , и изгибающий момент уменьшается. Покажем, что в конце процесса ползучести (при $t \rightarrow \infty$) величина прогиба будет такой же, как и при $t = 0$:

В главе 2 была получена связь между напряжениями и деформациями в конце процесса ползучести: $\sigma = H\varepsilon$. С учетом температурных воздействий эта связь переписывается в виде: $\sigma = H(\varepsilon - \varepsilon_T)$. Подставив выражение для напряжений при $t \rightarrow \infty$ в (4.12) и (4.13), получим:

$$\begin{aligned}
 R &= - \int_A \sigma dA = -H \int_A \left(-y \frac{d^2 v}{dx^2} - \varepsilon_T \right) dA = HA\alpha\Delta T; \\
 M &= R(v + v_0) = \int_A \sigma y dA = H \int_A \left(-y \frac{d^2 v}{dx^2} - \varepsilon_T \right) y dA = -HI \frac{d^2 v}{dx^2}; \\
 HI \frac{d^2 v}{dx^2} + HA\alpha\Delta T(v + v_0) &= 0; \\
 \frac{d^2 v}{dx^2} + \frac{\alpha\Delta T}{i^2}(v + v_0) &= 0,
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

где $i = \sqrt{I/A}$ – радиус инерции сечения.

Окончательное уравнение не содержит длительного модуля H . Такое же уравнение получается и в случае упругой задачи. Поэтому прогибы стержня при $t = 0$ и $t \rightarrow \infty$ совпадают.

Положим теперь, что нагрев происходит не мгновенно, а с постоянной скоростью β (град/ч). На рисунке 4.4 представлены графики роста прогиба при следующих величинах скорости нагрева: 1 – $\beta = 8$ град/ч, 2 – $\beta = 10$ град/ч, 3 – $\beta = 11$ град/ч.

Из рисунка 4.4 видно, что интенсивное выпучивание, как и в упругой задаче, может наблюдаться лишь при продолжающемся возрастании температуры.

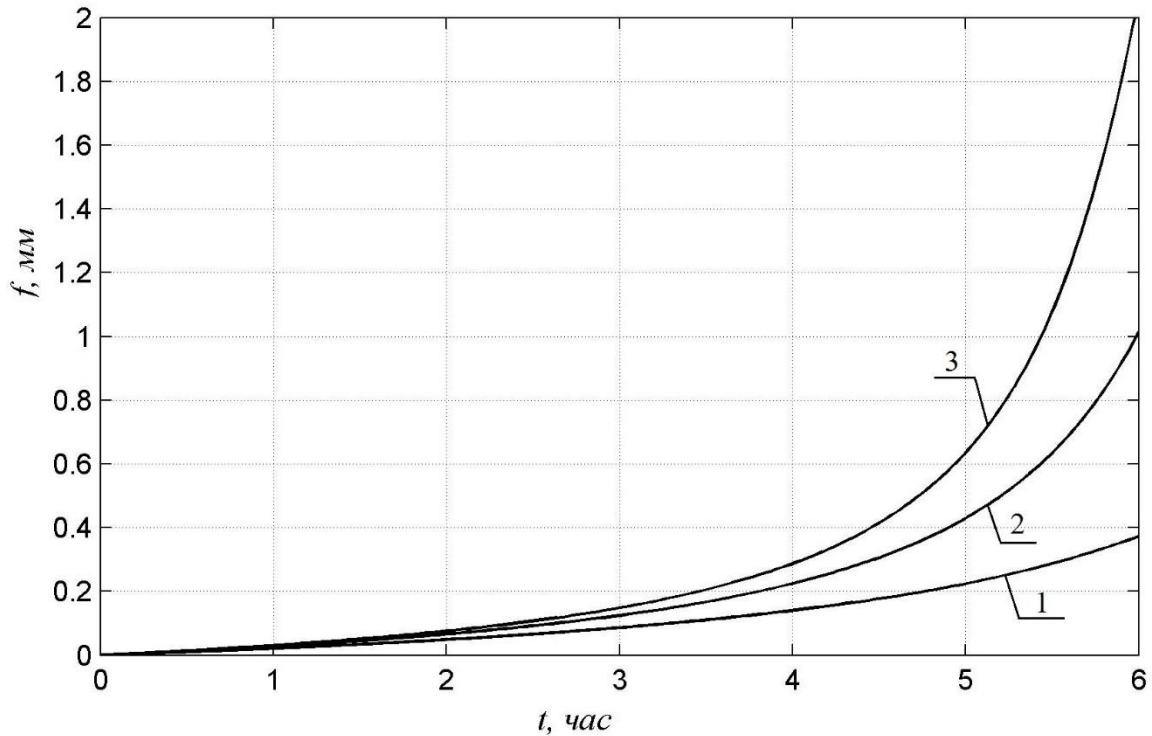


Рисунок 4.4 – Рост стрелы прогиба при равномерном нагреве со скоростью β :

1 – $\beta = 8$ град/ч, 2 – $\beta = 10$ град/ч, 3 – $\beta = 11$ град/ч.

4.4 Выводы по главе

Получены разрешающие уравнения и проведено исследование устойчивости стержней с учетом термовязкоупругости. Исследовано влияние изменения температуры стержня на величину длительной критической силы и критического времени. При нагреве стержня от 20 до 40 °С длительная критическая сила снизилась всего на 23%, однако критическое время уменьшилось в 24 раза. Это объясняется тем, что на время потери устойчивости оказывает сильное влияние релаксационная вязкость, которая от температуры зависит экспоненциально.

Также решена задача выпучивания стержня, обе опоры которого шарнирно неподвижны, при его равномерном нагреве. Данная задача интересна тем, что выпучивание возможно в отсутствие активных нагрузок. Установлено, что интенсивное выпучивание наблюдается только при продолжающемся возрастании температуры. В случае мгновенного нагрева наблюдается сначала рост прогиба, а затем прогиб стержня возвращается к моменту начала процесса ползучести.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Для сжатых полимерных стержней, подчиняющихся нелинейному уравнению Максвелла-Гуревича, разработана методика определения длительных критических нагрузок.

2. Усовершенствована методика определения деформаций ползучести в каждый момент времени на основе метода Рунге-Кутты четвертого порядка, что существенно повысило быстродействие программ расчета на ЭВМ.

3. Исследовано влияние дискретности спектра времен релаксации полимера. Показано существенное различие между кривыми роста прогиба при расчете с учетом одного и двух членов спектра. Также значительно (на 20%) отличается величина длительной критической силы. Расчет полимерных стержней должен вестись с учетом как минимум двух членов спектра времен релаксации полимера.

4. Выполнена оценка типовых форм изменения жесткости, предложенных другими авторами, для различных вариантов закрепления стержней при кратковременном и длительном действии нагрузки. Предложены новые более эффективные формы изменения размеров поперечного сечения. Помимо увеличения критической силы для стержней переменной жесткости наблюдается существенное увеличение критического времени.

5. Получены разрешающие уравнения и проведено исследование устойчивости стержней при ползучести с учетом температурных воздействий. Изучено влияние изменения температуры стержня на величину длительной критической силы и критического времени. При нагреве стержня от 20 до 40 °С в рассмотренной задаче длительная критическая сила снизилась всего на 23%, однако критическое время уменьшилось в 24 раза. На время потери устойчивости оказывает сильное влияние релаксационная вязкость, которая от температуры зависит экспоненциально. Поэтому нагрузки, действующие на стержень не должны превышать длительную критическую.

6. Решена задача выпучивания стержня, обе опоры которого шарнирно неподвижны, при его равномерном нагреве. Установлено, что интенсивное выпучивание наблюдается только при продолжающемся возрастании температуры.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Egorov Y. V. On the Lagrange problem about the strongest colonn // Rapport Interne 02-16. Universite Paul Sabatier, Toulouse. 2002. С. 1-7.
2. Сейранян А. П. Задача Лагранжа о наивыгоднейшем очертании колонны// Успехи механики. 2003. №2. С. 45 – 96.
3. Kanno Y. Necessary and sufficent conditions for global optimality of eigenvalue optimization problems // Structural and Multidisciplinary Optimization. 2001. № 22. С. 248-252.
4. Качанов Л.М. Теория ползучести. М.: Физматлит, 1960. 455 с.
5. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966. 752 с.
6. Ржаницын А.Р. Процессы деформирования конструкций из упруговязких элементов // Докл. АН СССР, 1946. Том 5. Вып.25. С. 25-28.
7. Ржаницын А. Р. Устойчивость сжатых элементов при ползучести // Строительная механика и расчёт сооружений. 1959. №5. С. 16-18.
8. Ржаницын А. Р. Устойчивость систем, обладающих свойствами ползучести // Сб. "Ползучесть и длительная прочность". Новосибирск, 1963. С. 25-28.
9. Ржаницын А. Р. Некоторые вопросы механики систем, деформирующихся во времени. М.: ГИТТЛ, 1949. 248 с.
10. Ржаницын А. Р. Расчет сооружений с учетом пластических свойств материалов. М.: Стройиздат, 1954. 288 с.
11. Ржаницын А. Р. Теория ползучести. М.: Стройиздат, 1968. 419 с.
12. Работнов Ю.Н. Устойчивость стержней и пластинок в условиях ползучести // Прикл. матем. и механика. 1957. XXI. Вып.3. С. 406-412.
13. Шестериков С. А. Динамический критерий устойчивости при ползучести для стержней // Прикладная механика и техническая физика. 1961. №1. С. 68-71.
14. Шестериков С. А. О критерии устойчивости при ползучести // Прикладная математика и механика. 1959. Т. XXIII. Вып. 6. С. 1101-1106.

15. Шестериков С. А. Релаксация и длительная прочность труб при сложном напряжённом состоянии // Научн. пр. ин-т мех. Моск. ун-та. 1973. №23. С. 25-29.
16. Куршин Л. М. К постановке задачи о выпучивании оболочки при ползучести // ДАН СССР. 1965. №1. С.161-163.
17. Куршин Л. М. О постановках задачи устойчивости в условиях ползучести // Проблемы теории пластичности и ползучести. 1979. №18. С. 246-302.
18. Куршин Л. М. Устойчивость при ползучести // Изв. АН СССР. Механика твёрдого тела. 1978. №3. С. 125-160.
19. Куршин Л. М. Устойчивость стержней в условиях ползучести // Прикладная механика и технич. физика. 1961. №6. С. 128-134.
20. Куршин Л. М. Устойчивость цилиндрических оболочек в условиях ползучести при совместном действии осевого сжатия и внутреннего давления // Прикладная механика и теорет. физики. 1974. №5. С. 109-116.
21. Андрейчиков И. П. Об устойчивости вязкоупругих стержней // Механика твёрдого тела. 1974. №2. С. 78-87.
22. Громов В. Г. Динамический критерий устойчивости и закритическое поведение гибких вязкоупругих тел при термосиловом нагружении // Докл. АН СССР. 1975. Т.220. №4. С. 805-808.
23. Громов В. Г. Устойчивость и закритический режим сжатого вязкоупругого стержня // Прикладная механика. 1971. Т.7. Вып.12. С.87-96.
24. Линник А.С. Особенности построения решений в напряжениях и перемещениях при исследовании устойчивости стержней в условиях ограниченной ползучести // Изв. вузов. Строительство и архитектура. 1979. №2. С. 35-38.
25. Лиув. Критерий выпучивания стержня из линейно-вязкоупругого материала // Мир, Ракетная техника и космонавтика. 1964. №11. С. 255-256.
26. Потапов В. Д. Об устойчивости стержней при ползучести // АН Латв. ССР. Механика композитных материалов. 1982. №5. С. 554-557.
27. Потапов В. Д. Стохастические задачи устойчивости элементов конструкций, деформирующихся во времени: дис. д-ра техн. наук. М., 1974. 384 с.

28. Потапов В. Д. Численные методы расчёта стержневых систем, деформирующихся во времени: дис. канд. техн. наук. М., 1967. 167 с.
29. Прокопович И. Е. Влияние ползучести на устойчивость тонкостенных стержней // Строительство и архитектура. 1969. №12. С. 33-38.
30. Прокопович И. Е. О влиянии ползучести на устойчивость сжатых стержней // Строительная механика и расчёт сооружений. 1967. №1. С. 5-9.
31. Хофф Н. Д. Продольный изгиб и устойчивость // Сб. переводов "Механика". 1955. №3.
32. Хофф Н. Д. Выпучивание при высокой температуре // Сб. переводов "Механика". 1958. №6.
33. Хофф Н. Д. Продольный изгиб при ползучести // Механика. Сб. переводов. 1956. №5.
34. Хофф Н. И. Обзор теорий выпучивания при ползучести // Механика. Сб. переводов. 1960. №1. С. 63-69.
35. Hoff N. I. Creep buckling of plates and shells // Theor. and Appl. Mech, Berlin. 1973. С. 124-140.
36. Claudon I. L. Determination et maximisation de la charge critique d'une colonne de Hauger en presence d'amortissement // Z. angew. Math. and Phys, 1978. №2. С. 226-236.
37. Маут Р. Х. Неустойчивость вязкоупругой консоли, нагруженной следящей силой // Прикладная механика. 1971. №4. С. 329-331.
38. Morgan M. R. Influence of a viscoelastic foundation on the stability of Beck's columuan exact analysis // Sound and Vibr. 1983. №1. С. 85-101.
39. Popper G. Y. The Beck stability // problem for viscoelastic bars. 1976. №3-4. С. 137-147.
40. Тетерс Г. А. Длительная устойчивость цилиндрических оболочек из полиэтилена // Механика полимеров. 1966. №4. С. 58-62.
41. Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1975. 984 с.
42. Вёбек Д. Выпучивание при ползучести. М.: Оборонгиз, 1961. 442 с.

43. Болотин В. В. Анализ технологических напряжений в намоточных изделиях из композитов на протяжении всего процесса изготовления // Механика композит. материалов. 1980. №3. С. 500-508.
44. Болотин В. В. О понятиях устойчивости в строительной механике. М. 1965, 120 с.
45. Шенли Ф. Р. Анализ веса и прочности самолётных конструкций. М.: Оборонгиз, 1957. 245 с.
46. Carlson R. L. Time-Dependent Modules Applied to Column Creep Buckling // Y. of Appl. Mech, 1956. 23 с.
47. Finnie I. Creep of Engineering materials // Mc. Graw Hill Book Company, 1959. 212 p.
48. Ванько И. О. О критерии выпучивания в условиях ползучести // ПМТФ. 1965. №1. С.15-19.
49. Джерард Д. Классические стержни и ползучесть // Сб. переводов "Механика". 1963. №1.
50. Кузнецов А. П. Устойчивость сжатых стержней из дюралюмина в условиях ползучести // ПМТФ. 1982. №6. С. 19-23.
51. Freudental A. M. The Inelastic Behavior of Engineering Materials and Structures. New York, 1950. 232 С.
52. Проценко А. М. Устойчивость сжато-изогнутых стержней при линейной ползучести // Строительная механика и расчёт сооружений. 1965. №5. С.53-57.
53. Розенблюм В. И. Устойчивость сжатого стержня в состоянии ползучести // Инж. сб. т. 1954. №3. С. 95-99.
54. Desayi P. An approximate Solution of Creep Buckling of Two Hinged Long Columns Subject to Distributed Axial Load // Journ. of Aeron. Soc. of India, 1965. №3.
55. Bleich H. H. Nonlinear creep deformations of columns of rectangular cross section // Journal of Applied Mechfnics. Dec, 1959.
56. Поспелов И. И. Устойчивость сжато-изогнутых стержней при линейной ползучести // Строительная механика и расчёт сооружений. 1965. №5. С.45-50.

57. Zyczkowski M. Geometrically Non-Linear Creep Buckling of Bars // *Archiwum mechaniki stosawancy*. 1960. №3. С.58-63.
58. Глушков Г. С. К вопросам продольного изгиба стержней, находящихся в условиях ползучести // *Расчёты на прочность*. 1963. №9. С. 15-20.
59. Distefano I. Creep Buckling of Slender Columns // *I. of the Struct. Div*, 1965. part 1, 91. №3. С.113-117.
60. Благоннадёжин В. Л. О поведении неоднородных сжатых стержней при ползучести // *Изв. высш. уч. зав. Машиностроение*. 1964. №8. С. 153-157.
61. Zyczkowski M. Linear Creep Buckling of Multiply-Composite Bars // *Bulletin De L'acade'mie Polonaise des Sciences, Se'rie des Sciences techniques*. 1962. №1. С. 10-13.
62. Матченко Н. М. Устойчивость цилиндрических оболочек при ползучести // *ПМТФ*. 1966. №4. С. 33-40.
63. Кузнецов Ю. П. Экспериментальное исследование устойчивости оболочек в условиях ползучести // *ПМТФ*. 1965. №4. С. 18-24.
64. Samuelson A. An experimental investigation of Creep Buckling of circular cylindrical shells subject to axial compression // *Medd. Tlygtechn. Forsoksanst*. 1964. №98. С. 45-49.
65. Торшенов Н. Г. О выпучивании внецентренного нагруженного стержня при ползучести // *ПМТФ*. 1966. №4. С. 69-73.
66. Алфрей Т. Механические свойства высокополимеров. М.: ИЛ, 1952. 354 с.
67. Белоус П.А. Устойчивость полимерного стержня при ползучести с учетом начальной кривизны // *Труды Одесского политехнического института*. 2001. №2. С.43-46.
68. Гуревич Г.И. Деформируемость сред и распространение сейсмических волн. М.: Наука, 1974. 482 с.
69. Гуревич Г.И. О зависимости между напряжениями и перемещениями при больших деформациях в случае одномерной задачи // *Тр. ИФЗ АН СССР*. 1975. №2.

70. Гуревич Г.И. Об обобщении уравнения Максвелла на случай 3 измерений с учётом малых деформаций упругого поледствия // Труды ИФЗ АН СССР. 1959. №2 (169).
71. Рабинович А. Л. Введение в механику армированных полимеров. М.: Наука, 1970. 283 с.
72. Рабинович А. Л. Некоторые основные вопросы механики армированных пластиков: дис. д-ра техн. наук. М., 1966, 368 с.
73. Бабич В.Ф. Исследование влияния температуры на механические характеристики полимеров: дис. канд. техн. наук. М. 1966, 152 с.
74. Бернадский А. Д. К методике стандартных испытаний на растяжение образцов полимерных материалов малых размеров // ВМСЮ. 1965. №6. С. 15 – 25.
75. Попов А.И., Паша М.А., Наумов А.А. Исследование начальных напряжений в стеклопластике поляризационно-оптическим методом // Труды МИСИ им. В. В. Куйбышева. 1970. №84-86. С. 319–327.
76. Тростянская Е. Б. и др. Изменение структуры и свойств отвержденных смол под влиянием наполнителя // Механика полимеров. 1972. №1. С. 26-30.
77. Vladimir I. Andreev, Batyr M. Yazyev, Chepurnenko Anton S. On the Bending of a Thin Plate at Nonlinear Creep//Advanced Materials Research Vol. 900 (2014) pp 707-710. Trans Tech Publications, Switzerland.
78. Андреев В.И. Устойчивость полимерных стержней при ползучести: дис. канд. техн. наук. М., 1967. 137 с.
79. Клименко Е. С. Устойчивость сжатых неоднородных стержней с учетом физической нелинейности материала: дис. канд. техн. наук. Ростов-на-Дону, 2011. 112 с.
80. Литвинов С.В., Клименко Е.С., Кулинич И.И. и др. Расчет на устойчивость стержней из ЭДТ–10 при различных вариантах закрепления // Инженерный Вестник Дона: электронный журнал. №2. 2011. URL: <http://www.ivdon.ru/magazine/latest/n2y2011/415>.

81. Клименко Е.С., Аминева Е.Х., Литвинов С.В., Языев С.Б., Кулинич И.И. Устойчивость сжатых неоднородных стержней с учетом физической нелинейности материала: монография. Ростов н/Д: Рост. гос. строит. ун-т, 2012. 77 с.

82. Козельская М.Ю., Чепурненко А.С., Литвинов С.В. Расчёт на устойчивость сжатых полимерных стержней с учётом температурных воздействий и высокоэластических деформаций // Научно-технический вестник поволжья. 2013. №4. С.190-195.

83. Козельская М. Ю., Чепурненко А. С., Языев С. Б. Расчет на устойчивость сжатых полимерных стержней с учетом физической нелинейности методом конечных элементов //Науковедение: электронный журнал. 2013. №3. URL: <http://naukovedenie.ru/PDF/62trgsu313.pdf>.

84. Андреев В. И., Языев Б. М., Чепурненко А. С. Осесимметричный изгиб круглой гибкой пластинки при ползучести // Вестник МГСУ. 2014. № 5. С. 16—24.

85. Vladimir I. Andreev, Anton S. Chepurnenko, Batyr M. Yazyev. Energy Method in the Calculation Stability of Compressed Polymer Rods Considering Creep//Advanced Materials Research Vols. 1004-1005 (2014) pp 257-260. Trans Tech Publications, Switzerland.

86. Козельская М. Ю., Чепурненко А. С., Литвинов С. В. Применение метода Галёркина при расчете на устойчивость сжатых стержней с учетом ползучести // Инженерный вестник Дона. 2013. №2. URL: <http://ivdon.ru/magazine/archive/n2y2013/1714>.

87. Чепурненко А. С., Андреев В. И., Языев Б. М. Энергетический метод при расчете на устойчивость сжатых стержней с учетом ползучести//Вестник МГСУ. №1 2013. С.101-108.

88. Языев Б.М., Чепурненко А.С., Литвинов С.В., Языев С.Б. Расчёт трёхслойной пластинки методом конечных элементов с учётом ползучести среднего слоя // Вестник Дагестанского государственного технического университета. 2014. №33. С. 47–55.

89. Кулинич И.И., Клименко Е.С., Языев С.Б., Литвинов С.В. Продольный изгиб полимерного стержня с учетом начальных несовершенств // «Строительство-

2011»): материалы Международной научно-практической конференции. Ростов-н/Д: РГСУ, 2011. С. 159–161.

90. Кулинич И.И. Устойчивость продольно-сжатых стержней переменной жесткости при ползучести: дис. канд. техн. наук. Ростов-на-Дону, 2012. 161 с.

91. Козельская М.Ю. Продольный изгиб стержней из сетчатых и линейных полимеров при нелинейной ползучести: дис. канд. техн. наук. Ростов-на-Дону, 2013. 131 с.

92. Гольдман А. Я. Прочность конструкционных пластмасс. Л.: Машиностроение. Ленингр. отделение, 1979. 320 с.

93. Кулинич И. И., Литвинов В. В., Блягоз А. М. Выпучивание стеклопластиковых стержней переменной жесткости// Новые технологии. 2012. № 4. С. 75-81.

94. Муханов В.В., Языев Б.М., Муханов А.В., Чепурненко А.С., Языев С.Б. Оптимизация строительных конструкций на основе численного и аналитического решения задач механики неоднородных тел – Ростов-на-Дону: Рост. Гос. Строит. Ун-т, 2014. – 83 с.

95. Бабич В. Ф., Рабинович А. Л. Влияние температуры на механические характеристики некоторых эпоксидных связующих// Физико-химия и механика ориентированных стеклопластиков. 1967. С. 150-153.

96. Савинов О. Н. Устойчивость стержней при ползучести с позиций А. М. Ляпунова // Некоторые вопросы прочности строит. конструкций. Сб. трудов МИСИ им. В. В. Куйбышева. 1978. №156. С. 178-186.

Приложение 1. Внедрение результатов диссертационной работы



МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования

«РОСТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Социалистическая ул., д. 162, г. Ростов-на-Дону, 344022
тел/факс (863)201-91-01 E-mail: rgsu@rgsu.ru
http://www.rgsu.ru

ОКПО 02069119
ОГРН 1026103175559
ИНН/КПП 6163020389/616301001

09.03.2016 № 8/442
на № _____ от _____

В диссертационный совет
Д 212.052.03 при ФГБОУ ВО
«Дагестанский государственный
технический университет»

АКТ ВНЕДРЕНИЯ результатов диссертационной работы на соискание ученой степени кандидата технических наук Никора Надежды Игоревны

Место внедрения	г. Ростов-на-Дону, ФГБОУ ВПО «Ростовский государственный строительный университет»
Предмет внедрения	Результаты исследований в области теории ползучести, методика оптимизации и расчета с учетом ползучести сжатых полимерных стержней переменной жесткости, пакет прикладных программ для расчета в среде Matlab.
Результат внедрения	Разработанные автором методики и программное обеспечение внедрены в учебный процесс в Ростовском государственном строительном университете при подготовке научно- педагогических кадров в аспирантуре по направлению подготовки 08.06.01 «Техника и технологии строительства», что отражено в программе дисциплины «Основы теории упругости, пластичности и ползучести».

И.о. Проректора по ООД



А. В. Шилов



Строительный отдел ГК АКСстрой, ИП Акопян В.Ф.
 346720, Ростовская область, г. Аксай, ул. Донская 25;
 тел.: 8-863-5057422, e-mail: vovaakop@mail.ru.
 моб. тел.: 8-908-506-97-99
 ИНН 610203911058 ОГРН 314618116900069

Утверждаю
 Индивидуальный
 предприниматель
 В.Ф. Акопян

23 марта 2016 г.

результатов диссертационной работы на соискание ученой степени кандидата технических наук Н.И. Никоры «Продольный изгиб стержней переменной жесткости с учетом деформаций ползучести и температурных воздействий».

**Место
внедрения**

Ростовская обл., г. Аксай

**Предмет
внедрения**

Пакет прикладных программ для расчета полимерных стержней на устойчивость с учетом ползучести.

**Результаты
внедрения**

Результаты диссертационной работы Н.И. Никора, подтвержденные на численных моделях, позволяют оценить геометрические размеры поперечных сечений цилиндрических стволов винтовых свай АКСИС из полимербетонных композитов.

Представитель заказчика
 Индивидуальный
 предприниматель
 В.Ф. Акопян



Исполнитель: аспирант кафедры
 «Сопротивление материалов»
 РГСУ
 Никора Н.И.

Приложение 2. Программы расчета на ЭВМ в пакете Matlab

```

%Стержень из ЭДТ-10, выпучивание при равномерном нагреве
clc;
clear all;
l=300;%длина стержня, мм
d=10;%диаметр стержня, мм
v=11;%скорость нагрева, град/час
nx=50;%количество интервалов по x
dx=l/nx;%шаг по x
t1=0;%начальный момент времени
t2=3600*6;%конечный момент времени
nt=200;%количество шагов по времени
dt=(t2-t1)/nt;%шаг по времени
V=zeros(nt+1,nx+1);%значения прогибов V(t,x)
time=zeros(nt+1,nx+1);%матрица для графиков
f0=0.16;%начальная погибь, мм
ny=50;%количество интервалов по y
dy=d/ny;%шаг по y
ez=zeros(nt+1,nx+1,ny+1);%значения деформации ползучести
sigma=zeros(nt+1,nx+1,ny+1);%значения напряжений
T0=0;
A=pi*d^2/4;
I=pi*d^4/64;
for i=1:nt+1
    t=(i-1)*dt;
    T=T0+v*t/3600;
    dT=T-T0;
    E=-1.75*T+352.5;%модуль упругости, кг/мм2
    Eb=-3*T+315;%Модуль высокоэластичности
    mz=-0.0011*T+0.475;%модуль скорости
    n0=3600*exp(9500/(T+273.15)-20);%начальная релаксационная вязкость
    alpha=10^(-5);
    %Вычисляем продольную силу
    j=nx/2+1;
    N=E*A*alpha*dT;
    for k=2:ny
        y=-d/2+(k-1)*dy;
        N=N-2*E*ez(i,j,k)*(d^2/4-y^2)^0.5*dy;
    end
    matr=zeros(nx+1,nx+1);%матрица коэф-тов
    %формирование матрицы коэф-тов:
    matr(1,1)=1;
    matr(nx+1,nx+1)=1;
    for j=2:nx
        matr(j,j)=-2/dx^2*E*I+N;
        matr(j,j+1)=1/dx^2*E*I;
        matr(j,j-1)=1/dx^2*E*I;
    end
    svob=zeros(1,nx+1);
    svob(1)=0;
    svob(nx+1)=0;
    for j=2:nx
        x=(j-1)*dx;
        svob(j)=-N*f0*sin(pi*x/l);
        for k=2:ny
            y=-d/2+(k-1)*dy;
            svob(j)=svob(j)+2*E*ez(i,j,k)*y*(d^2/4-y^2)^0.5*dy;
        end
    end
    X=matr\svob';

```

```

for j=1:nx+1
    V(i,j)=X(j);
end
%Вторая производная прогиба
V_=fD2DET5(X,dx);
%Вычисляем напряжения
for j=1:nx+1
    for k=1:ny+1
        y=-d/2+(k-1)*dy;
        sigma(i,j,k)=E*(alpha*dT+y*V_(j)-ez(i,j,k));
        fz=sigma(i,j,k)-Eb*ez(i,j,k);
        ez_=fz/n0*exp(abs(fz/mz));
        ez(i+1,j,k)=ez(i,j,k)+ez_*dt;
    end
    time(i,j)=t;
    XX(i,j)=(j-1)*dx;
end
time2(i)=t;
Vmax(i)=max(abs(X));
end
%figure;
plot(time2/3600, Vmax,'k');
hold on

```