

Документ подписан простой электронной подписью
Информация о владельце:
ФИО: Баламуззев Назим Дюдинович
Должность: Ректор
Дата подписания: 11.09.2025 13:36:02
Уникальный программный ключ:
5cf0d6f89e80f49a334f6a4ba58e91f3326b9926

**МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**ФГБОУ ВО «ДАГЕСТАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

***К ВЫПОЛНЕНИЮ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ ПО
ДИСЦИПЛИНЕ «ДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ»***

Для бакалавров направления
010302 - Прикладная математика и информатика

Махачкала 2021

ББК 32.97
УДК 681.3

Методические указания к выполнению практических занятий по дисциплине «Динамические модели». Для студентов факультета КТВТиЭ направления подготовки бакалавров 010302- Прикладная математика и информатика.- Махачкала: ДГТУ, 2021.- 24 с.

Методические указания предназначены для бакалавров направления 010302 - Прикладная математика и информатика

В методическом указании приводятся начальные сведения о динамических моделях, исследование их с помощью построения фазового пространства, качественная и количественная характеристика устойчивости динамических моделей.

Составитель: доц. каф. ПМиИ ДГТУ Пиняскин В.В.

Рецензенты:

к.т.н., доцент каф. ПМиИ ДГТУ Канаев М.М.

Заместитель генерального директора по информационным технологиям
ООО «Дагестан-Парус» к.ф.-м.н Карапац А.Н.

Печатается по решению Ученого совета Дагестанского государственного технического университета от «___» _____. 2021г.

Содержание

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №1. Динамическая система, описываемая конечной системой обыкновенных дифференциальных уравнений	4
ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 2. Изучение аттрактора.	8
ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 3. Анализ устойчивости состояний равновесия динамических систем.	13
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	19
ПРИЛОЖЕНИЕ	20

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ №1. Динамическая система, описываемая конечной системой обыкновенных дифференциальных уравнений

Цель лабораторной работы - построение временных зависимостей и фазовых проекций для заданной динамической системы и значений параметров.

Задачи лабораторной работы :

- Выбор параметров для алгоритма интегрирования с постоянным шагом.
- Использование программы `origin` для вывода графической информации.
- Оценка необходимой точности при использовании программ интегрирования с переменным шагом.
- Использование функций для нахождения решения в заданный момент времени, для получения таблицы решений с заданным шагом по времени.

Порядок выполнения лабораторной работы

- 1) Ознакомление с численными методами получения решений динамической системы.
- 2) Ознакомление со способом записи правых частей и параметров динамической системы.
- 3) Составление программы на C++ для получения и визуализации решений.
- 4) Отчет преподавателю по теоретическому материалу и получение варианта задания на выполнение практической части (см. табл.1).
- 5) Модификация программы в соответствии с заданием на практическую часть. Изучение особенностей указанной в задании динамической системы и диапазона изменения переменных и параметров.
- 6) Получение графиков изменения переменных во времени, а также фазовых проекций для динамической системы со значениями параметров, указанными в заданиях. Интегрировать встроенной функцией пакета `origin`.

7) То же, с помощью самостоятельно написанного фрагмента программы, реализующей метод Эйлера. Сопоставление результатов с полученными ранее при выполнении пункта 6 для различных значений шага интегрирования.

8) Оформление отчета.

Методы интегрирования дифференциальных уравнений динамических систем

Вычисление траекторий представляет собой наиболее важную задачу при моделировании динамических систем с непрерывным временем. Цель алгоритма интегрирования заключается в аппроксимации поведения системы с непрерывным временем

Поскольку вычислительные процессы в компьютере дискретны во времени, алгоритм интегрирования моделирует систему с непрерывным временем системой с дискретным временем. Фактическая система, полученная при таком моделировании, не является дифференциальным уравнением. Часто это сложная система с дискретным временем. Алгоритмы интегрирования отличаются тем, что отображают одно и то же дифференциальное уравнение в различные системы с дискретным временем.

Рассмотрим несколько стандартных алгоритмов. Предлагаемые алгоритмы аппроксимируют решение системы с непрерывным временем

$$\dot{x} = f(x, t), x(t_0) = x_0, \quad \text{решение : } \phi_t(x_0, t_0)$$

последовательностью точек $x_0, x_1, \dots$ в соответствующие моменты времени $t_0, t_1, \dots$. Значения точек должны удовлетворять приближенному равенству

$$x_k \approx \psi_t(x_0, t_0)$$

Если специально не оговорено иное, то предполагается, что моменты времени выбираются через равные интервалы с величиной шага $h > 0$, то есть

$$t_{k+1} = t_0 + kh, \quad k = 0, 1, \dots$$

Процессы в хаотических моделях имеют вид не регулярных колебаний в которой происходит изменения частоты, амплитуды и фазы колебаний.

Примером модели динамического хаоса может служить модель странного аттрактора Лоренца (см. приложение №1), результаты моделирования которой приведены на рис.1.

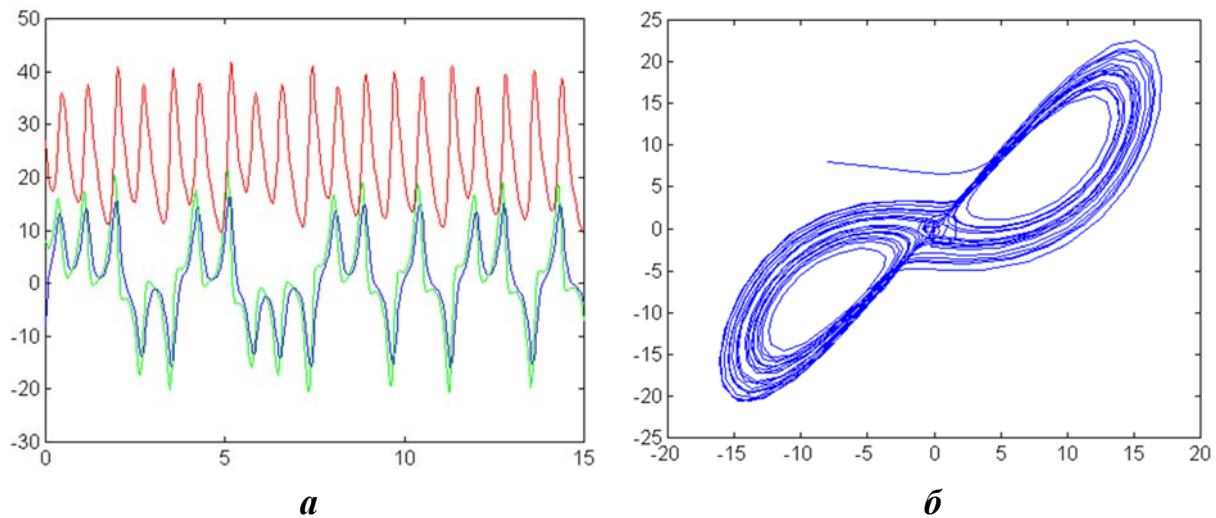


Рис. 1. Результаты моделирования модели странного аттрактора Лоренца: *а* – вид процессов, *б* – фазовый портрет

Содержание и оформление отчета по лабораторной работе

Отчет представляется в виде документа и должен содержать:

- 1) Заголовок, с указанием названия лабораторной работы, Ф.И.О. выполнявших ее студентов, номер учебной группы, номер задания.
- 2) Сведения (уравнения и комментарий) о модельной системе, смысл параметров, диапазон их изменения.
- 3) Характеристики (временные реализации, фазовые проекции) решений динамической системы для значений параметров, определенных заданием. Комментарии относительно характера наблюдаемых решений, их стационарности, зависимости от начальных условий. Общее заключение о количестве и типе аттракторов либо особых точек/траекторий в исследованной области.
- 4) Результаты исследования влияния параметров интегрирования на вид временных реализаций и фазовых портретов.
- 5) Фрагменты программ и графики временных реализаций и фазовых портретов, полученные с использованием встроенных функций интегрирования библиотеки.
- 6) Краткое резюме - заключение по пунктам 1-5.

Таблица1. Список вариантов заданий

№ варианта	Динамическая система *	Обл.параметров
---------------	------------------------	----------------

1	генератор с инерционной нелинейностью	$g=0.2, m=1.0-1.5$
2	система Ресслера	альфа=0.2, $\mu=2.6-4.3$
3	модель Морриса-Лекара	эпсилон=0.02, $I=0.2550-0.8350$
4	модель Hindmarsh-Rose	$a=1, b=3, c=1, d=5, s=4, I=2.7$ альфа=1.40-1.50
5	генератор с инерционной нелинейностью	$g=0.3, m=1.00-1.10$
6	модель Fitz Hugh-Nagumo	эпсилон=0.07, $a=0.8-1.1$
7	осциллятор Дуффинга	$k=0.1$, альфа=1.0, бэта=1.0, $\omega=1.627, A=5.200-5.600$
8	осциллятор Дуффинга	$k=0.2$, бэта=1.0, $A=1$, $\omega=1$, альфа=2.9-3.3
9	система Лоренца	$b=2.666, R=28$, сигма=5.00-6.00

*см. приложение 1

Контрольные вопросы

1. Дайте определение фазового пространства, и поясните на примере выполненных расчетов
2. Чему соответствует точка в фазовом пространстве?
3. Является ли поведения сложных систем в фазовом пространстве частным случаем поведения конкретных систем, или они дают общее представление о возможном характере поведения реальных систем?
4. Что означает движение точки по траектории в фазовом пространстве?
5. Что означают аттракторы разных типов: притягивающая точка, предельный цикл, странный аттрактор.
6. Чем отличается странный аттрактор от других типов? Почему, не смотря на непредсказуемость состояния системы в этом случае, этот тип ее поведения назван аттрактором?

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 2. Изучение аттрактора.

Цель лабораторной работы - ознакомление с методом исследования динамических систем путем построения сечений Пуанкаре. Применение соответствующих функций библиотеки. Исследование эволюции сечений Пуанкаре при вариации параметров для трехмерных динамических систем.

Порядок выполнения лабораторной работы

- 1) Ознакомление с теоретическим материалом
- 2) Модификация программы attract.c для построения сечений Пуанкаре
- 3) Построение набора сечений Пуанкаре для заданного диапазона вариации параметров модельной системы
- 4) Экспериментальная оценка влияния параметра точности вычисления координат точки в сечении Пуанкаре на время вычислений
- 5) Оформление отчета.

Визуальный анализ хаотической динамики в фазовом пространстве размерности $N > 3$ является не очень наглядным, так как наблюдается проекция на плоскость сложного движения изображающей точки, и в этом случае может быть проблематичным исследование геометрических особенностей предельного множества. Существует более удобный метод анализа сложной геометрии колебательных режимов введение секущей Пуанкаре. Данный прием удобен, в частности, тем, что позволяет понизить на 1 размерность фазового пространства, и для 3-х мерных ДС перейти к анализу динамики на плоскости. При необходимости, специальный снос введения секущей дает возможность устранять периодическую составляющую колебательного процесса, что бывает полезно при анализе режимов динамики неавтономных систем.

Под *секущей Пуанкаре* понимается плоскость (или поверхность) в фазовом пространстве, выбранная таким образом, чтобы все траектории,

принадлежащие аттрактору, пересекали ее трансверсально (под ненулевым углом).

Выберем в качестве примера математическую модель генератора Ван дер Поля с внешним периодическим воздействием

$$\frac{d^2x}{dt^2} - \varepsilon(1 - x^2)\frac{dx}{dt} + \omega_0^2x = A \sin \omega t, \quad (1)$$

которая путём замены переменной $dx/dt = y$ преобразуется в систему 2-х ОДУ первого порядка

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y, \\ \frac{dy}{dt} &= \varepsilon(1 - x^2)y - \omega_0^2x + A \sin \omega t \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь параметр ω_0 определяет собственную частоту автоколебаний в системе, параметр нелинейности ε управляет интенсивностью диссипации подкачки энергии, параметры A и ω задают амплитуду и частоту внешнего воздействия. Такую n -мерную неавтономную систему можно представить в виде $(n + 1)$ -мерной автономной системы в "цилиндрическом" пространстве состояний. Для модели (2) такое преобразование записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y, \\ \frac{dy}{dt} &= \varepsilon(1 - x^2)y - \omega_0^2x + A \sin z, \\ \frac{dz}{dt} &= \omega. \end{aligned} \quad (3)$$

Решение данной системы уравнений соответствует движению изображающей точки в 3-х мерном фазовом пространстве по "цилиндру", ось которого ассоциируется с переменной z . неограниченно возрастающей с увеличением времени рис. 1. В качестве секущей в этом случае выбирают плоскость

постоянной фазы внешнего воздействия $z \bmod 2\pi = \text{const}$, что соответствует выбору точек фазовой траектории ровно через период T внешней силы. По такому принципу работает стробоскоп, поэтому рассмотренная процедура построения сечения называется методом *стробоскопического сечения*. На рис. 2 проиллюстрирован пример стробоскопического сечения для квазипериодического режима динамики модели (1).

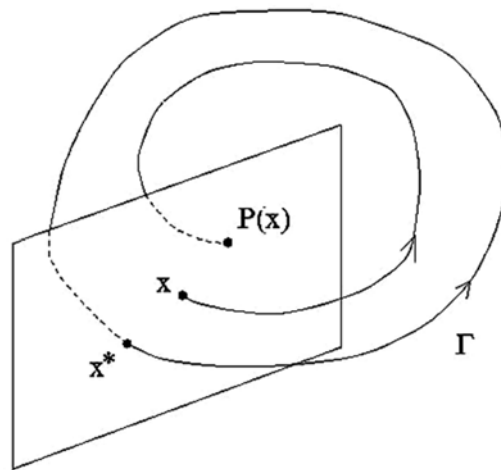


Рис.1 Отображение Пуанкаре для автономной системы 3-го порядка.

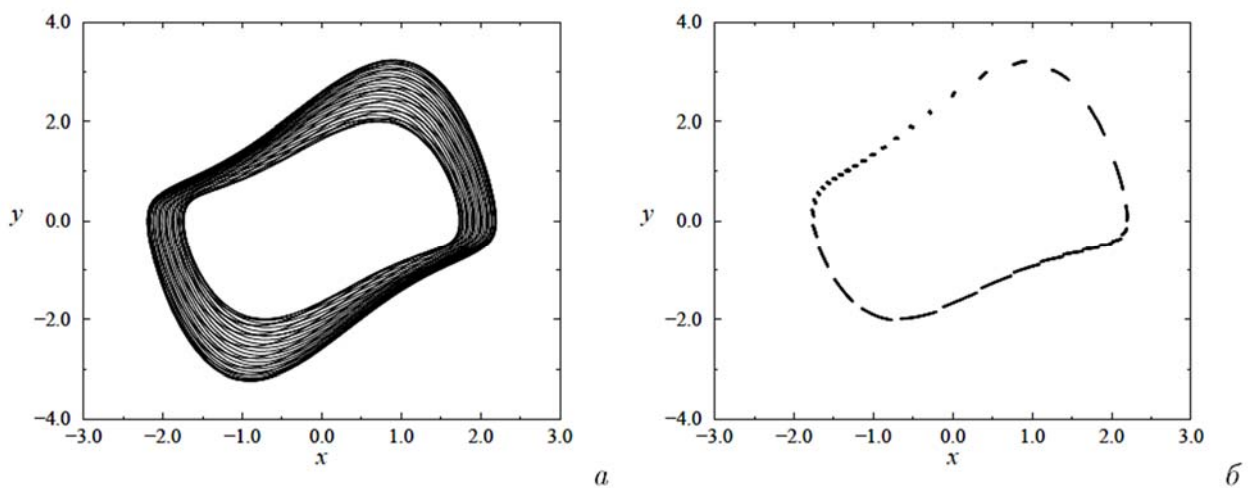


Рис. 2. Проекция фазового портрета квазипериодических колебаний модели (1) и соответствующее ему стробоскопическое сечение.

Содержание и оформление отчета по лабораторной работе

Отчет должен содержать:

- 1) Заголовок, с указанием названия лабораторной работы, Ф.И.О. выполнявших ее студентов, номер учебной группы, номер задания.
- 2) Сведения (уравнения и комментариев) о модельной системе, смысл параметров, диапазон их изменения.
- 3) Набор построенных сечений Пуанкаре динамической системы для интервала значений параметров, определенного заданием. Комментарии относительно характера эволюции вида сечения.
- 4) Результаты исследования влияния параметра точности построения сечения на требуемое время вычислений.

Таблица 1. Список вариантов заданий

N вар.	Динамическая система *	Область параметров
1	генератор с инерционной нелинейностью	$g=0.2, m=1.0-1.5$
2	система Ресспера	$\alpha=0.2, \mu=2.6-5.0$
3	модель Hindmarsh-Rose - 3	$a=1, b=3, e=1, f=5, r=0.003, s=4, I=2.9, \alpha=-1.3 - -2.0$
4	генератор с инерционной нелинейностью	$g=0.1, m=1.50-2.36$
5	модель Hindmarsh-Rose -3	$a=1, b=3, c=1, d=0.5, r=0.003-0.1, s=4, I=2.9, \alpha=-1.6$
6	цепь Chua	$a=-0.713, b=10.95, c=0.6, d=0.2, \alpha=2.3-2.7, \beta=3.0$

*- см приложение №1

Контрольные вопросы

1. Что такое аттрактор, странный аттрактор?
2. Поясните, что означают аттракторы разных типов: притягивающая точка, предельный цикл, странный аттрактор.
3. Можно ли утверждать, что, воздействуя на реальную систему, модель поведения которой в фазовом пространстве имеет аттракторы типа притягивающая точка и предельный цикл, после воздействия мы вернемся к исходному ее состоянию?
4. В чем состоят преимущества метода, сечения Пуанкаре по сравнению с визуальным анализом фазового портрета?
5. Что такое "цилиндрическое" пространство состояний и стробоскопическое сечение?
6. Как выглядит стробоскопическое сечение двумерного тора?
7. Каким образом по виду сечения Пуанкаре фиксируются бифуркации удвоения периода?
8. В чем состоит фрактальность структуры хаотического аттрактора? Назовите методы уточнения координат точек сечения Пуанкаре?
9. С развитием вычислительной техники создавалось впечатление, что, создав суперкомпьютер, можно точно промоделировать поведение любой системы. Зная, что данные, закладываемые в модель реальных процессов, никогда не бывают абсолютно точными, объясните, почему это принципиально невозможно в случае странного аттрактора.

ПРАКТИЧЕСКОЕ ЗАНЯТИЕ № 3. Анализ устойчивости состояний равновесия динамических систем.

Цель лабораторной работы – научиться проводить анализ устойчивости динамических систем.

Порядок выполнения лабораторной работы

- 1) Ознакомление с теоретическим материалом
- 2) Модификация программы attract.c для построения фазовых диаграмм
- 3) Построение набора фазовых диаграмм для заданного диапазона вариации параметров модельной системы
- 4) Экспериментальная оценка влияния параметра точности вычисления координат точки в сечении Пуанкаре на время вычислений
- 5) Оформление отчета.

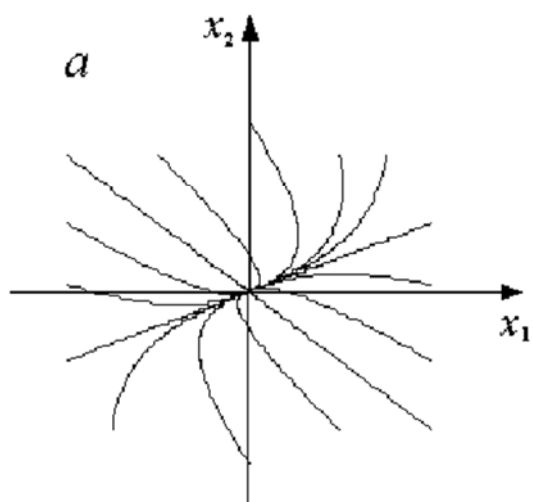
Рассмотрим двумерную ($n = 2$) линейную систему

$$\dot{x} = Ax, \quad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Пусть λ_1, λ_2 – собственные числа, а h_1, h_2 – линейно независимые собственные векторы матрицы A . По этим данным общее решение системы записывается аналитически

$$x = c_1 e^{\lambda_1 t} h_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} h_2.$$

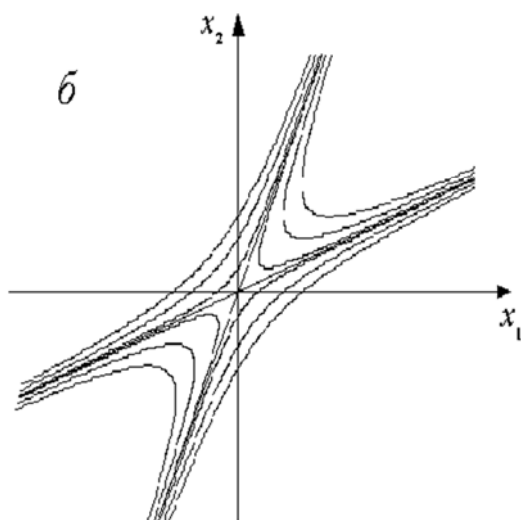
а) λ_1, λ_2 – вещественные одного знака. Фазовый портрет – у з е л



Седло

б) λ_1, λ_2 – вещественные разных знаков.

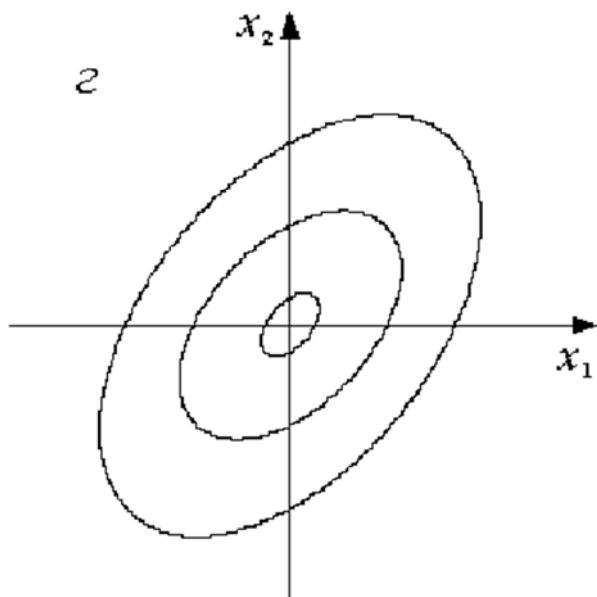
Фазовый портрет – с е д л о



Центр

г) $\lambda_{1,2} = \pm i\beta$ – чисто мнимые.

Фазовый портрет – ц е н т р



Устойчивость точки покоя

При $Re\lambda_{1,2} < 0$ движение вдоль фазовых траекторий идет в направлении точки покоя $\bar{x} = 0$ и $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$. Точка покоя $\bar{x} = 0$ – асимптотически устойчива. Тогда говорят, что узел (фокус) является устойчивым.

При $Re\lambda_{1,2} > 0$ движение вдоль фазовых траекторий идет по направлению от точки покоя в бесконечность. Точка покоя $\bar{x} = 0$ неустойчива. В этом случае говорят, что узел (фокус) является неустойчивым.

Пример. Исследовать первым методом Ляпунова устойчивость всех равновесий системы

$$\frac{dx}{dt} = 25 - x^2 - y^2; \quad \frac{dy}{dt} = -5xy; \quad (1)$$

Для нахождения равновесий решим конечную систему вида

$$25 - x^2 - y^2 = 0; \quad -5xy = 0;$$

Имеем четыре равновесия:

$$(x=0; y=5), \quad (x=0; y=-5), \quad (x=5; y=0), \quad (x=-5; y=0)$$

Исследуем на устойчивость первое равновесие - $(x=0; y=5)$. Для этого перейдем в (1) к возмущениям

$$u=x; \quad v=5+y$$

Уравнение возмущений примет вид

$$\frac{du}{dt} = -u^2 - v^2 + 10v; \quad \frac{dv}{dt} = -5u(v-5) \quad (2)$$

Линеаризуем уравнение возмущений (2), получим

$$\frac{du}{dt} = 10v; \quad \frac{dv}{dt} = 25u$$

Для нахождения собственных чисел линеаризованной системы λ_i решим уравнение

$$|A - \lambda_i E| = 0 \quad (3)$$

где A - матрица линеаризованного уравнения возмущений, E - единичная матрица. Уравнение (3) примет вид

$$\begin{vmatrix} -\lambda_i & 10 \\ 25 & -\lambda_i \end{vmatrix} = 0$$

Отсюда,

$$\lambda_1 = \sqrt{250}; \quad \lambda_2 = -\sqrt{250};$$

Следовательно, равновесие $(x=0; y=5)$ - неустойчиво.

Исследуем на устойчивость второе равновесие - $(x=0; y=-5)$. Для этого перейдем в (1) к возмущениям

$$u=x; \quad v=-5+y$$

Уравнение возмущений примет вид

$$\frac{du}{dt} = -u^2 - v^2 - 10v; \quad \frac{dv}{dt} = -5u(v+5)$$

Линеаризуя уравнение возмущений, получим

$$\frac{d u}{d t} = -10 v; \quad \frac{d v}{d t} = -25 u$$

Характеристическое уравнение примет вид

$$\begin{vmatrix} -\lambda_i & -10 \\ -25 & -\lambda_i \end{vmatrix} = 0$$

Отсюда, как и в предыдущем случае получим, что

$$\lambda_1 = \sqrt{250}; \quad \lambda_2 = -\sqrt{250};$$

Следовательно, равновесие ($x=0$; $y=-5$) - неустойчиво.

Для третьего равновесия ($x=5$; $y=0$), переходя к возмущениям

$$u=5+x; \quad v=y$$

получим систему

$$\frac{d u}{d t} = -u^2 - v^2 + 10 u; \quad \frac{d v}{d t} = -5 v(u - 5)$$

Линеаризуя, имеем

$$\frac{d u}{d t} = 10 u; \quad \frac{d v}{d t} = 25 v$$

Характеристическое уравнение примет вид

$$\begin{vmatrix} 10 - \lambda_i & 0 \\ 0 & 25 - \lambda_i \end{vmatrix} = 0$$

то есть

$$\lambda_1 = 10; \quad \lambda_2 = 25;$$

Равновесие ($x=5$; $y=0$) - неустойчиво.

В случае ($x=-5$; $y=0$), переходя к возмущениям

$$u=-5+x; \quad v=y$$

получим систему

$$\frac{d u}{d t} = -u^2 - v^2 - 10 u; \quad \frac{d v}{d t} = -5 v(u + 5)$$

Линеаризуем

$$\frac{d u}{d t} = -10 u; \quad \frac{d v}{d t} = -25 v$$

Характеристическое уравнение примет вид

$$\begin{vmatrix} -10 - \lambda_i & 0 \\ 0 & -25 - \lambda_i \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda_1 = -10; \lambda_2 = -25;$$

Равновесие ($x=-5; y=0$) – асимптотически устойчиво по Ляпунову.

Отметим, что в этом примере первый метод Ляпунова позволил полностью решить задачу об устойчивости или неустойчивости по Ляпунову равновесий системы дифференциальных уравнений. В общем случае, это не всегда так. В критическом случае ответ на вопрос об устойчивости дает второй метод Ляпунова.

Исследовать на устойчивость первым методом Ляпунова все равновесия систем

Таблица 1. Список вариантов заданий

1) $\frac{dx}{dt} = 25 + x^2 - 4y^2; \frac{dy}{dt} = 5xy;$	9) $\frac{dx}{dt} = 50 + 5x^2 - 6y^2; \frac{dy}{dt} = 3x - 2y;$
2) $\frac{dx}{dt} = x^2 - y^2; \frac{dy}{dt} = 5xy - 3;$	10) $\frac{dx}{dt} = -x^2 + y^2; \frac{dy}{dt} = 10 - xy;$
3) $\frac{dy}{dt} = 1 - x^2 - y^2; \frac{dx}{dt} = xy;$	11) $\frac{dy}{dt} = 3 + x^2 + y^2; \frac{dx}{dt} = xy - 2;$
4) $\frac{dx}{dt} = 5 + x^2 - y^2; \frac{dy}{dt} = x - 2y;$	12) $\frac{dx}{dt} = 4 + 5x^2 + 4y^2; \frac{dy}{dt} = 6xy - x;$
5) $\frac{dx}{dt} = 77 - x^2 + 4y^2; \frac{dy}{dt} = xy;$	13) $\frac{dy}{dt} = 10 - 2x^2 - 3y^2; \frac{dx}{dt} = -xy - y;$
6) $\frac{dy}{dt} = 3 - x^2 - y^2; \frac{dx}{dt} = xy - 2;$	14) $\frac{dx}{dt} = 5x^2 + 6y^2; \frac{dy}{dt} = 3xy - 2y;$
7) $\frac{dx}{dt} = 4 + 5x^2 - y^2; \frac{dy}{dt} = xy - 1;$	15) $\frac{dx}{dt} = 8 - x^2 + 2y^2; \frac{dy}{dt} = 10x - xy;$
8) $\frac{dy}{dt} = 1 - 4x^2 - 3y^2; \frac{dx}{dt} = -11xy;$	16) $\frac{dy}{dt} = 3 - 4x^2 - 2y^2; \frac{dx}{dt} = 5xy - 2y;$

Контрольные вопросы

1. Дать определение устойчивости точки покоя.
2. Классификация точек покоя: узел, седло, фокус, центр.
3. Дать определение асимптотической устойчивости точки покоя.
4. Дать определение экспоненциальной устойчивости точки покоя.
5. Критерий устойчивости точки покоя.
6. Критерий асимптотической устойчивости точки покоя.
7. Дать определение устойчивости цикла.
8. Дать определение асимптотической устойчивости цикла.
9. Дать определение экспоненциальной устойчивости цикла.
10. Критерий устойчивости цикла.
11. Критерий асимптотической устойчивости точки цикла.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Неймарк Ю.И. Динамические системы и управляемые процессы. М.: Либроком, 2014. 332С.
2. Филиппов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М., 2002.
3. Пантелеев А.В., Якимова А.С., Босов А.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения в примерах и задачах. М.: Высш. шк., 2001

ПРИЛОЖЕНИЕ

Список динамических систем с комментариями

1. Генератор ван дер Поля (VDP)

Эта система второго порядка по праву считается классической моделью теории колебаний. Как правило, именно на ее примере обсуждается проблема возбуждения незатухающих колебаний и стабилизации их амплитуды. Параметр "омега" определяет частоту автоколебаний в системе, параметр нелинейности "эпсилон" управляет интенсивностью диссипации/подкачки энергии.

$$\ddot{x} - \varepsilon(1 - x^2)\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

2. Осциллятор Дуффинга (OSD)

Эта математическая модель описывает пассивный нелинейный контур, находящийся под воздействием внешней вынуждающей силы (периодическое воздействие). Здесь k - параметр, отвечающий за диссипацию в контуре ($k=0.1 \dots 0.2$), "альфа" и "бета" позволяют задавать нелинейную характеристику. В правой части - внешняя вынуждающая сила с амплитудой A и частотой "омега".

$$\ddot{x} + k\dot{x} - \alpha x(\beta - x^2) = A \cos(\omega t)$$

типичные значения параметров:

$$\alpha = 1/2, \beta = 1 \text{ либо } \alpha = 1, \beta = 0$$

3. Генератор с инерционной нелинейностью (GIN)

Подобный тип автоколебательной системы известен с 50-х годов (работы К.Ф. Теодорчика). В соответствии с названием, амплитуда колебаний такого генератора регулируется не характеристикой усилительного каскада, а специальной цепью обратной связи (ОС). $f(x)$ - нелинейная передаточная функция однополупериодного квадратичного детектора, m - нормированный параметр петлевого усиления, g - нормированный параметр инерционности (отношение частоты среза в петле цепи ОС к собственной частоте колебаний генератора).

$$\dot{x} = x(m - z) + y$$

$$\dot{y} = -x$$

$$\dot{z} = g(f(x) - z)$$

$$f(x) = x(x + |x|)/2$$

типичные значения параметров:

$$g = 0.2 \dots 0.3, m = 0.0 \dots 2.0$$

4. Система Чуа (CHUA)

Этот пример несложной радиотехнической системы с весьма разнообразной динамикой был разработан Т. Matsumoto, L. Chua и др. в 1984г. Эта система была исследована и использована в качестве модели в множестве работ различных авторов. Здесь "альфа", "бэта", а, b, c, d - управляющие параметры системы. Из них четыре последних задают нелинейную характеристику.

$$\dot{x} = \alpha(y - x - f(x))$$

$$\dot{y} = x - y + z$$

$$\dot{z} = -\beta y$$

$$f(x) = cx + 0.5(b - c)(|x + d| - |x - d|) + 0.5(a - b)(|x + 1| - |x - 1|)$$

типичный набор параметров ($\alpha, \beta, a, b, c, d$):

$$11.0, 14.0, -0.713, -0.455, 4.6, 7.2$$

5. Система Ресслера (ROSS)

Эта трехмерная система была предложена на основе динамики химических реакций. При вариации управляющих параметров "альфа" и "мю", она демонстрирует каскад бифуркаций удвоения периода и рождение хаотического аттрактора.

$$\dot{x} = -(y + z)$$

$$\dot{y} = x + \alpha y$$

$$\dot{z} = \alpha + z(x - \mu)$$

типичные значения параметров:

$$\alpha = 0.2, \mu = 2.6 \dots 6.0.$$

6. Система Лоренца (LOR)

Знаменитая система уравнений, полученная американским метеорологом Лоренцем при упрощении уравнений Зальцмана для тепловой конвекции в жидкости, ныне стала классическим примером динамической системы с хаотическим аттрактором.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= rx - y - xz \\ \dot{z} &= -bz + xy\end{aligned}$$

типичные значения параметров:

$$\sigma = 10, b = 8/3, r = 28.0$$

7. Модель Морриса-Лекара (ML)

Модель Морриса-Лекара (Morris-Lecar) является упрощенной моделью нейрона Ходжкина-Хаксли (Hodgkin-Huxley). Она описывает такие свойства живого нейрона как генерация, так называемых, спайков (последовательность импульсов) и режим невосприимчивости к внешнему воздействию. v - трансмембранный потенциал нейрона, w - описывает активность калийного тока, I - внешний стимулирующий ток, "эпсилон" - временной параметр.

$$\begin{aligned}\dot{v} &= I_{ion}(v, w) + I \\ \dot{w} &= \varepsilon \frac{w_{\infty}(v) - w}{\tau_{\infty}(v)} \\ I_{ion} &= \bar{g}_{Ca} m_{\infty}(v) + \bar{g}_K w (v_K - v) + g_L (v_L - v) \\ m_{\infty}(v) &= 0.5 \{1 + \tanh[(v + 0.01)/0.15]\} \\ w_{\infty}(v) &= 0.5 [1 + \tanh(v/0.3)] \\ \tau_{\infty}(v) &= 1 / \cosh(v/0.6)\end{aligned}$$

типичные значения параметров:

$$\begin{aligned}I &= 0.23, \bar{g}_{Ca} = 1.1, \bar{g}_K = 2.0, g_L = 0.5, \\ v_{Ca} &= 1.0, v_K = -0.7, v_L = -0.5, \\ \varepsilon &= 0.02\end{aligned}$$

8. Система Фиц Хью - Нагумо (FHN)

Система Фиц Хью - Нагумо (Fitz Hugh - Nagumo) является простой, но представительной моделью класса, так называемых, возбудимых систем. Она моделирует живой нейрон как возбудимую систему, генерирующую импульс как ответ на внешнее воздействие.

$$\begin{aligned}\varepsilon \dot{x} &= x - \frac{x^3}{3} - y \\ \dot{y} &= x + a\end{aligned}$$

типичные значения параметров:

$$\varepsilon = 0.01, a = 1.2$$

9. Система Хиндмарш-Розе (3-мерная) (HR3)

Система Хиндмарш-Розе (Hindmarsh-Rose) является феноменологической моделью динамики мембранного потенциала нейрона. Она является, по сути, законом Кирхгофа, записанным для потенциала клеточной мембраны как для суммы ионных токов текущих через нее. x - описывает мембранный потенциал нейрона, y и z - определяют динамику ионных токов, I - внешний ток, a, b, c, d, r, s , "альфа" - параметры.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y - ax^3 + bx^2 - z + I \\ \dot{y} &= c - dx^2 - y \\ \dot{z} &= r(s(x - \alpha) - z)\end{aligned}$$

типичные значения параметров:

$$\begin{aligned}a &= 1.0, b = 3.0, I = 2.7, c = 1.0, d = 5.0, \\ r &= 0.003, s = 4.0, \alpha = -1.6\end{aligned}$$

10. Система Хиндмарш-Розе (2-мерная) (HR2)

Двумерная система Хиндмарш-Розе получается из 3-мерной при $r=0$. Соответственно, координата z , теперь выступающая в роли параметра, произвольна.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y - ax^3 + bx^2 + I \\ \dot{y} &= c - dx^2 - y\end{aligned}$$

типичные значения параметров:

$$a = 1.0, b = 3.0, I = 2.7, c = 1.0, d = 5.0$$