Министерство науки и высшего образования РФ

ФГБОУ ВО «ДАГЕСТАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра радиотехники, телекоммуникаций и микроэлектроники

Х.М. Гаджиев Т.Д. Нежведилов

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ РАДИОТЕХНИКИ

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

для бакалавров направления подготовки 11.03.01 «Радиотехника», профиль "Радиотехнические средства передачи, приема и обработки сигналов"

Махачкала 2023

УДК 621.385.6

Х.М. Гаджиев, Т.Д. Нежведилов

Математический аппарат радиотехники: Учебное пособие для бакалавров направления подготовки 11.03.01 «Радиотехника», профиль «Радиотехнические средства передачи, приема и обработки сигналов» / - Махачкала: ДГТУ, - 41 с.

В учебном пособии представлены сведения о математических методах, которые являются основами научных расчетов и исследований и используются для построения радиотехнических систем.

Пособие предназначено для бакалавров направления подготовки 11.03.01 «Радиотехника», профиль "Радиотехнические средства передачи, приема и обработки сигналов".

Рецензенты: д.т.н., профессор кафедры БиМАС ФГБОУ ВО «ДГТУ» Магомедов Д.А.

д.т.н., зав. лабораторией ИТвЭ ФГБУН «ИПГ» ДНЦ РАН Кобзаренко Д.Н.

Печатается согласно постановлению Ученого совета Дагестанского государственного технического университета от «___» __________ 2023 г.

Содержание с.

Введение

Целями освоения дисциплины «Математический аппарат теории сигналов и систем " являются:

1. Подготовка в области знания основных средств расчета современных радиотехнических систем и создания радиоэлектронной аппаратуры.
2. Формирование практических навыков работы с научными методами расчета и проектирования.
3. Подготовка в области радиотехники для разных сфер профессиональной деятельности специалиста.
   - проектно-конструкторской;
   - производственно-технологической;
   - научно-исследовательской;
   - сервисно-эксплуатационной.

Дисциплина " Математический аппарат теории сигналов и систем " относится к общенаучному циклу дисциплин

Взаимосвязь с другими дисциплинами:

Курс "Математический аппарат теории сигналов и систем " основывается на знании предметов бакалаврского образования, таких, как «История радиотехники», «Математика», «Физика», «Прикладная математика в радиоэлектронике» и магистерского образования, такого, как «История и методология науки и техники (применительно к радиотехнике)», и др., логически и содержательно-методически связан с ними.

Полученные знания могут быть использованы при изучении таких предметов, как «Статистическая теория связи», «Современные радиоэлектронные системы», подготовке магистерской диссертации, а также в процессе разработки и проектирования радиоаппаратуры.

Конспект лекций призван облегчить студентам изучение теоретического материала дисциплины.

Интегральное уравнение - уравнение, где неизвестная функция входит под знак интеграла.

1. Линейные интегральные уравнения

Условимся, что
$f(t)$ - известная функция.
$\varphi(t)$ - неизвестная искомая функция.

Интегральное уравнение называется линейным, если неизвестная функция, входящая в него, линейна.

Классическая запись линейного интегрального уравнения:

$$\varphi(t) = \lambda \int_a^b k(t,S)\varphi(S)dS + f(t),$$

где λ - параметр, задающий семейство решений интегральных уравнений;
$k(t,S)$ - ядро интегрального уравнения.

Функция $f(t)$ существует в пределах $a \le t \le b$.

Функция $k(t,S)$ существует в пределах

$$\begin{cases} a \le t \le b \\ a \le S \le b \end{cases}.$$

2. Общий вид интегрального уравнения Фредгольма 1-го рода

$\int_a^b k(t,S)\varphi(S)dS = f(t)$ - интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода.

$\varphi(t) = \lambda \int_a^b k(t,S)\varphi(S)dS + f(t)$ - интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода.

a и b могут быть конечными или бесконечными.

Условия существования решений уравнений:

$f(t)$ - непрерывна на интервале a, b.

$$\int_a^b |f(t)|^2 dt < +\infty.$$

$k(t,S)$ - непрерывна в интервалах

$$\begin{cases} a \le t \le b \\ a \le S \le b \end{cases};$$

Если ядра удовлетворяют вышеприведенным условиям, то ядра называются фредгольмовыми. Если $f(t) \equiv 0$, то такое интегральное уравнение называется однородным:

$$0 = \varphi(t) + \lambda \int_a^b k(t,S)\varphi(S)dS .$$

3. Интегральные уравнения Вольтерра

1. 1-го рода

$$\int_a^t k(t,S)\varphi(S)dS = f(t).$$

2. 2-го рода

$$\varphi(t) + \lambda \int_a^t k(t,S)\varphi(S)dS = f(t).$$

Если $f(t) \equiv 0$, то уравнение называется однородным. При определенных ограничениях, уравнения Вольтерра упрощенно рассматривают уравнениями Фредгольма. Если модифицировать ядра следующим образом

$$H(t,S) = \begin{Bmatrix} k(t,S), & S \le t \\ 0 \quad , & S > t \end{Bmatrix},$$

то мы придем к записи интегрального уравнения

$$\varphi(t) = \lambda \int_a^b H(t,S)\varphi(S)dS + f(t).$$

4. Виды нелинейных интегральных уравнений

1. Интегральное уравнение Урысона

$$\varphi(t) = \int_a^b k[t, S, \varphi(S)]dS .$$

Если неизвестная функция входит внутрь ядра, то такие уравнения называются уравнениями Урысона.

2. Уравнение Гаммерштейна

$$\varphi(t)=\int_a^b k(t,S)F\left[S,\varphi(S)\right]dS,$$

где $k(t,S)$ - обычное фредгольмовое ядро.

3. Уравнения Ляпунова - Лихтенштейна.

Они включают в себя существенно нелинейные функции.

$$\varphi(t)= f(t)+\lambda\int_a^b k_1(t,S)\varphi(S)dS+\mu\int_a^b\int_a^b k_2(t,S,z)\varphi(S)\varphi(z)dSdz.$$

4. Нелинейные интегральные уравнения Вольтерра.

$$\varphi(t)=\int_a^t k\left[t,S,\varphi(S)\right]dS.$$

Примеры.

1. $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{jxy} f(y)dy.$

Это интегральное уравнение Фредгольма 1-го рода.

$$k(x,y)=\frac{e^{ixy}}{\sqrt{2\pi}}.$$

Решение его имеет вид:

$$\varphi(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixy} g(x)dx.$$

2. $\dfrac{dx(t)}{dt}=F[t,x(t)].$

ч

Проинтегрируем обе части этого выражения по t:

$$x(t)=x_0+\int_a^t F[t,x(t)]dt;$$

$$x(a)=x_0.$$

3. Общая задача решения линейного дифференциального уравнения n-го порядка.

$$\frac{d^n x}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+...+a_n(t)x(t)=F(t);$$

$$x(a)=c_0;$$

$$x^{'}(a)=c_1;$$

$$\cdots$$

$$x^{(n-1)}(a)=c_{n-1}.$$

Рассмотрим n=2:

$$\frac{d^2 x}{dt^2}+a_1(t)\frac{dx}{dt}+a_2(t)x(t)=F(t);$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2}=\varphi(t);$$

$$\frac{dx}{dt}=\int_0^t \varphi(S)dS+C_1;$$

$$\int_0^t dt\int_0^t dt\ldots\int_0^t f(t)dt=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^t (t-S)^{n-1}f(S)dS;$$

$$x(t)=\int_0^t (t-S)\varphi(S)dS+C_1 t+C_0.$$

Подставим в исходное дифференциальное уравнение:

$$\varphi(t)+\int_0^t [a_1(t)+a_2(t)(t-S)]\varphi(S)dS=F(t)-C_1a_1(t)-C_1ta_2(t)-C_0a_2(t).$$

Обозначим

$$k(t,S)=-[a_1(t)+a_2(t)(t-S)];$$

$$f(t)=F(t)-C_1a_1(t)-C_1ta_2(t)-C_0a_2(t);$$

Интегральное уравнение Вольтера 2-го рода

$$\varphi(t) = \int\limits_0^t k(t,S)\varphi(S) + f(t).$$

Во многих случаях ядро $k(t,S)=k(t\text{-}S)$ (пропорционально разности аргументов), тогда уравнение Вольтера называется интегральным уравнением типа свертки. Интегральное уравнение Абеля:

$$f(x) = \int\limits_0^x \frac{\varphi(S)}{\sqrt{x-S}}\,dS.$$

Если неизвестная функция входит и под знак производной и под знак интеграла, то такое уравнение называется интегро-дифференциальное (ИДУ).

5. Методы Фредгольма

В начале века Фредгольм наиболее полно исследовал интегро-дифференциальные уравнения.

$$\varphi(t) = \lambda\int\limits_a^b k(t,S)\varphi(S) + f(t).$$

Решение этого уравнения рассматривается как аналог решения системы n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными. В результате решение получается приблизительным, зависящим от n. Чем больше n, тем больше приближение.

Решение состоит из нескольких этапов:

1. Интеграл заменяется конечной суммой.
2. Весь отрезок $[a,b]$ разбивается на n равных частей $\delta = \dfrac{b-a}{n}$.
3. Внутри каждого интервала j выбирается некоторая точка S_j. Получаем набор функций $\varphi(S_j)=\varphi_j$. Ищем не непрерывную функцию, а набор дискретов S_j.

$$\varphi(t) \cong \lambda\sum_{j=1}^{n} k(t,S_j)\varphi_j\delta + f(t);$$

$$\varphi(S_j) = \lambda\sum_{j=1}^{n} k(S_i,S_j)\varphi_j\delta + f(S_j).$$

Обозначим

$$f(S_i) = f_i \ , \ k(S_i, S_j) = k_{ij} \ ;$$

$$\left.\begin{matrix} \varphi_i \cong \lambda\delta\sum_{j=1}^{n} k_{ij}\varphi_j + f_i \\ \vdots \end{matrix}\right\} \quad i = 1 \div n,$$

где n – число линейных алгебраических уравнений.

$$\varphi_i - \lambda\delta\sum_{j=1}^{n} k_{ij}\varphi_j = f_i \ ;$$

$$D_n(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda\delta k_{11} & -\lambda\delta k_{12} & \cdots & -\lambda\delta k_{1n} \\ -k_{21} & 1-\lambda\delta k_{22} & \cdots & -\lambda\delta k_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\lambda\delta k_{n1} & -\lambda\delta k_{n2} & \cdots & 1-\lambda\delta k_{nn} \end{vmatrix}.$$

$D(\lambda) \neq 0$: система имеет решение при любых f_i и имеется решение интегрального уравнения при любых $f(t)$.

6. Резольвента Фредгольма

Пусть мы получили $\varphi(S_j)$. Подставляем в исходное уравнение:

$$\varphi(t) \cong \lambda\sum_{j=1}^{n} k(t, S_j)\varphi(S_j)\delta + f(t).$$

Или иначе можно считать, что мы получили решение уравнения в следующем обобщенном виде:

$$\varphi(t) \cong f(t) + \lambda \frac{Q(t, S_1, S_2 \ldots S_n, \lambda)}{D_n(\lambda)},$$

где Q - результат вычисления решения одним из методов.

При $n \to \infty$: $Q(t, S_1 \ldots S_n, \lambda) \to \int_a^b D(t, S, \lambda) f(S) dS$.

При непрерывном ядре $k(t,S)$ и свободном члене $f(t)$:

$$D_n(\lambda) \to D(\lambda).$$

Резольвента

$$R(t, S, \lambda) = \frac{D(t, S, \lambda)}{D(\lambda)}.$$

Конечное решение интегрального уравнения записывается в очень компактной форме:

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda \int_a^b R(t, S, \lambda) f(S) dS.$$

Резольвента не зависит от свободного члена, а определяется только ядром. Резольвента используется в ситуациях, когда исследуется отклик одного и того же объекта на много различных воздействий ($f(S)$).

$$R = \frac{D(t, s, \lambda)}{D(\lambda)};$$

$$D_n(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda \delta K_{11} & \ldots & -\lambda \delta K_{1n} \\ -\lambda \delta K_{21} & \ldots & -\lambda \delta K_{2n} \\ - - - & - - - & - - - \\ -\lambda \delta K_{n1} & \ldots & 1 - \lambda \delta K_{nn} \end{vmatrix} = (-\lambda \delta)^n \begin{vmatrix} K_{11} + \varepsilon & K_{12} & \ldots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} + \varepsilon & \ldots & K_{2n} \\ - - - & - - - & - - - & - - - \\ K_{n1} & K_{n2} & \ldots & K_{nn} + \varepsilon \end{vmatrix} =$$

$$= (-\lambda \delta)^n F(\varepsilon),$$

где $F(\varepsilon)$- определитель матрицы - степенная функция с максимально возможной степенью n. Следовательно ее можно разложить в ряд Тейлора:

$$F(\varepsilon) = F(0) + \frac{F'(0)}{1!}\varepsilon + \frac{F''(0)}{2!}\varepsilon^2 + ... + \frac{F^{(n)}(0)}{n!}\varepsilon^n;$$

$$F^{(\ell)}(0) = \frac{dF^{(\ell)}(\varepsilon)}{d\varepsilon^\ell}, \text{ при } \varepsilon = 0.$$

При дифференцировании определителя он превращается в сумму определителей, но порядок его уменьшается на единицу.

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon} = \begin{vmatrix} K_{11}+\varepsilon & K_{12} & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22}+\varepsilon & K_{2n} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33}+\varepsilon \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & K_{12} & K_{13} \\ 0 & K_{22}+\varepsilon & K_{23} \\ 0 & K_{32} & K_{33}+\varepsilon \end{vmatrix} +$$

$$+\begin{vmatrix} K_{11}+\varepsilon & 0 & K_{1n} \\ K_{21} & 1 & K_{2n} \\ K_{31} & 0 & K_{33}+\varepsilon \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} K_{11}+\varepsilon & K_{12} & 0 \\ K_{21} & K_{22}+\varepsilon & 0 \\ K_{31} & K_{32} & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} K_{11}+\varepsilon & K_{23} \\ K_{32} & K_{33}+\varepsilon \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} K_{11}+\varepsilon & K_{13} \\ K_{31} & K_{33}+\varepsilon \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} K_{11}+\varepsilon & K_{12} \\ K_{21} & K_{22}+\varepsilon \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{\alpha 1=1}^{3}\sum_{\alpha 2=1}^{3} \begin{vmatrix} K_{\alpha 1\alpha 2}+\varepsilon & K_{\alpha 1\alpha 2} \\ K_{\alpha 1\alpha 2} & K_{\alpha 1\alpha 2} \end{vmatrix}.$$

$$D_n(\lambda) = 1 + \sum_{m=1}^{n}\frac{(-\lambda\delta)^m}{m!}[\sum_{\alpha 1}^{n}...\sum_{\alpha m=1}^{n} \begin{vmatrix} K_{\alpha 1\alpha 1}+\varepsilon & K_{\alpha 1\alpha 2} & .... & K_{\alpha 2\alpha m} \\ K_{\alpha 2\alpha 1} & K_{\alpha 2}K_{\alpha 2}+\varepsilon & .... & K_{\alpha 2\alpha m} \\ ----- & ----- & ----- & ----- \\ K_{\alpha m\alpha 1} & K_{\alpha 1\alpha 2} & .... & K_{\alpha m\alpha m}+\varepsilon \end{vmatrix};$$

$$\sum_{\alpha 1=1}^{n} K_{\alpha 1\alpha 2}\delta = \sum_{j=1}^{n} K(S_j S_j)\delta \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^b K(S,S)dS,$$

где $K(t,S)$- след ядра.

Фредгольм показал, что при $n \to \infty$

$$\sum_{\alpha 1=1}^{n}\ldots\sum_{\alpha m=1}^{n} \begin{vmatrix} K_{\alpha 1\alpha 1} & K_{\alpha 1\alpha 2} & \ldots & K_{\alpha 2\alpha m} \\ K_{\alpha 2\alpha 1} & K_{\alpha 2}K_{\alpha 2} & \ldots & K_{\alpha 2\alpha m} \\ ----- & ----- & ----- & ----- \\ K_{\alpha m\alpha 1} & K_{\alpha 1\alpha 2} & \ldots & K_{\alpha m\alpha m} \end{vmatrix} \delta^m \to C_m =$$

$$= \int_a^b\int_a^b \begin{vmatrix} K_{\alpha 1\alpha 1} & K_{\alpha 1\alpha 2} & \ldots & K_{\alpha 2\alpha m} \\ K_{\alpha 2\alpha 1} & K_{\alpha 2}K_{\alpha 2} & \ldots & K_{\alpha 2\alpha m} \\ ----- & ----- & ----- & ----- \\ K_{\alpha m\alpha 1} & K_{\alpha 1\alpha 2} & \ldots & K_{\alpha m\alpha m} \end{vmatrix} d\alpha_1 \ldots d\alpha_m,$$

где $D(\lambda) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} C_m \lambda^m$- определитель Фредгольма.

Повторяя аналогичные рассуждения мы получим выражения

$$D(t,S,\lambda) = \sum (-1)^m \frac{\lambda^m}{m!} B_m(t,S);$$

$$B_m(t,S) = \int_a^b \ldots \int_a^b \begin{vmatrix} K(t,S) & K(t,\alpha_2) & \ldots & K(t,\alpha_m) \\ K(\alpha_1,S) & K(\alpha_1,\alpha_1) & \ldots & K(\alpha_1,\alpha_m) \\ ----- & ----- & ----- & ----- \\ K(\alpha_m,S) & K(\alpha_m,\alpha_1 & \ldots & K(\alpha_m\alpha_m) \end{vmatrix} d\alpha_1 \ldots d\alpha_m;$$

$$C_n = \int_a^b B_{n-1}(t,t)dt;$$

$$B_0 = K(t,S),$$

где $D(t,S,\lambda)$ - минор определителя Фредгольма.

$R(t,S,\lambda) = \dfrac{D(t,S,\lambda)}{D(\lambda)}$ - резольвента не зависит от свободного члена, а определяется ядром уравнения.

Все рассматривалось для тех случаев, когда $D(\lambda) \neq 0$. Те значения λ для которых $D(\lambda) \neq 0$ называются регулярными. Те значения λ для которых $D(\lambda) = 0$ называются характеристическими.

$$\varphi(t) = \lambda \int_a^b K(t,S)\varphi(S)dS + f(t).$$

Предположим, что $f(t) \equiv 0$.

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda \int_a^b R(t,S,\lambda) f(S)dS.$$

Рассмотрим два случая:
1. λ-регулярное $\rightarrow D(\lambda) \neq 0 \rightarrow \varphi(t) \equiv 0$.
2. λ- характеристическое$\rightarrow D(\lambda) = 0 \rightarrow \varphi(t) \neq 0$.

Пример.
Имеется ядро интегрального уравнения

$$K(t,S) = e^{t-s}.$$

Построить его резольвенту.

$$0 \le t \le 1,\ 0 \le S \le 1,\ a = 0,\ b = 1.$$
$$C_i = ?,\quad B_i = ?$$

$$C_0 = 1,\quad B_0(t,S) = e^{t-S};$$
$$C_1 = \int_0^1 B_0(\alpha_1,\alpha_1)d\alpha_1 = 1;$$

$$B_1(t,S)=\int_0^1\begin{vmatrix} e^t e^S & e^t e^{-\alpha 1} \\ e^{\alpha 1}e^{-S} & e^{\alpha 1}e^{-\alpha 1}\end{vmatrix}d\alpha_1 = e^t\int_0^1 e^{\alpha 1}\begin{vmatrix} e^{-S} & e^{-\alpha 1} \\ e^{-S} & e^{-\alpha 1}\end{vmatrix}d\alpha = 0;$$

$$C_2=\int_0^1 B_1(\alpha_1,\alpha_1)d\alpha_1 = 0;$$

$$B_k, C_k = 0;$$

$$K>1;$$

Остальные $B_k, C_k = 0$.

$$D(\lambda)=1-\lambda;$$

$$D(t,S,\lambda)=e^{t-S};$$

$$R(t,S,\lambda)=\frac{e^{t-S}}{1-\lambda};$$

$$\varphi(t)=f(t)+\frac{\lambda}{1-\lambda}\int_0^1 e^{t-S}f(S)dS,$$

где $\lambda_c = 1$ - единственное собственное число.

$$\varphi(t)=\int_0^1 e^{t-S}\varphi(S)dS,$$

где $K_c(t,S)=e^{t-S}$ - единственная собственная функция.

7. Интегральные уравнения с вырожденным ядром

Если ядро интегрального уравнения вырождено, то решение его гораздо проще.

$$k(t,S)=\sum_{j=1}^{n}a_j(t)b_j(S).$$

Если ядро такого вида, то оно вырождено.

Предполагается, что функции линейно независимы между собой. В этом случае интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода можно выразить следующим образом:

$$\varphi(t)=\lambda\int_a^b\sum_{j=1}^n a_j(t)b_j(S)\varphi(S)dS+f(t)=\lambda\sum_{j=1}^n a_j(t)\int_a^b b_j(S)\varphi(S)+f(t)=$$
$$=\lambda\sum_{j=1}^n C_j a_j(t)+f(t),$$

где $C_j=\int_a^b b_j(S)\varphi(S)dS$.

Эта запись говорит о том, что решение интегрального уравнения сводится к определению константы C_j.

Умножим на b_j и проинтегрируем по t:

$$\underbrace{\int_a^b\varphi(t)b_i(t)dt}_{C_i}=\underbrace{\int_a^b f(t)b_i(t)dt}_{f_i}+\lambda\sum_{j=1}^n C_j\underbrace{\int_a^b a_j(t)b_i(t)dt}_{k_{ij}};$$

$$C_i=f_i+\lambda\sum_{j=1}^n C_j k_{ij}\ ;\Rightarrow\begin{cases}C_1=f_1+\lambda\sum_{j=1}^n C_j k_{j1}\\ C_2=f_2+\lambda\sum_{j=1}^n C_j k_{j2}\\ \vdots\\ \mathrm{C_n}=f_n+\lambda\sum_{j=1}^n C_j k_{jn}\end{cases}.$$

Эта запись справедлива для всех индексов.

$$C_i-\lambda\sum_{j=1}^n C_j k_{ij}=f_i\ ;\ i=1\div n;$$

$$D(\lambda)=\begin{vmatrix}1-\lambda k_{11} & -\lambda k_{12} & \cdots & -\lambda k_{1n}\\ -k_{21} & 1-\lambda k_{22} & \cdots & -\lambda k_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ -\lambda k_{n1} & -\lambda k_{n2} & \cdots & 1-\lambda k_{nn}\end{vmatrix}.$$

Если $D \neq 0$, то находим решение обычными способами.
Вычислив коэффициенты, подставляем в уравнение.

Пример.

$$\varphi(t) = 1 + \lambda \int_0^1 (t - S)\varphi(S)dS\,;$$

$$k(t,S) = t - S;\; a_1(t) = t;\; a_2(t) = 1;\; b_1(S) = 1;\; b_2(S) = -S;$$

$$\varphi(t) = 1 + \lambda t \int_0^1 \varphi(S)dS + \lambda \int_0^1 (-S)\varphi(S)dS\,;$$

$$C_1 = \int_0^1 \varphi(S)dS; \quad C_2 = \int_0^1 (-S)\varphi(S)dS;$$

$$\varphi(t) = 1 + \lambda C_1 t + \lambda C_2.$$

Умножим обе части первого уравнения на b_1 и проинтегрируем по t:

$$\begin{cases} \int_0^1 \varphi(t)dt = \int_0^1 dt + \lambda C_1 \int_0^1 tdt + \lambda \int_0^1 dt \\ \int_0^1 (-1)\varphi(t)dt = \int_0^1 (-t)dt + \lambda C_1 \int_0^1 (-t^2)dt + \lambda C_2 \int_0^1 (-t)dt \end{cases};$$

$$\begin{cases} C_1\left(1 - \dfrac{\lambda}{2}\right) - \lambda C_2 = 1 \\ C_1 \dfrac{\lambda}{3} + \left(1 + \dfrac{\lambda}{2}\right)C_2 = -\dfrac{1}{2} \end{cases};$$

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \dfrac{\lambda}{2}; & -\lambda \\ \dfrac{\lambda}{3}; & 1 + \dfrac{\lambda}{2} \end{vmatrix} = 1 + \frac{\lambda^2}{12}.$$

Это интегральное уравнение всегда имеет решение, так как $D \neq 0$ всегда при действительных λ.

$$C_1 = \frac{12}{12 + \lambda^2}; \quad C_2 = -\frac{6 + \lambda}{12 + \lambda^2};$$

$$\varphi(t) = \frac{6(2 - 2\lambda t - \lambda)}{12 + \lambda^2}.$$

Резольвента таких уравнений всегда дробно-рациональная функция.

8. Использование вырожденных ядер для приблизительного решения интегральных уравнений

Пусть имеем некоторое интегральное уравнение, у которого ядро $k(t,S)$ - вырожденное.

$$\varphi(t) = \lambda \int_a^b k(t,S)\varphi(S)dS + f(t).$$

На интервале интегрирования не вырожденное ядро заменяют вырожденным приблизительным. При этом решение получается достаточно близким к истинному решению. Чем ближе приближение, тем точнее решение. Используются различные апроксимации. Проще всего заменять суммой или тригонометрическими функциями.

Пример.

$$\varphi(t) = \int_0^1 t\left(1 - e^{tS}\right)\varphi(S)dS + e^t - t.$$

Точное решение $\varphi(t) \equiv 1$.

$$k_b(t,S) = -t^2 S - \frac{t^3 S^2}{2} - \frac{t^4 S^3}{6};$$

$$\varphi(t) = e^t - t - 0{,}5t^2 - 0{,}17t^3 - 0{,}04t^4.$$

На интервале [0;1] отклонение от точного решения составляет всего 0,8%.

9. Принцип последовательных приближений («сжатых отображений»)

Строится последовательность функций. Первая функция – произвольная. А потом из нее строится следующая функция, и т.д.

Необходимо выполнение следующих условий:

1) Чтобы в квадрате $a \le t,S \le b$ ядро $k(t,S)$ было непрерывно и ограничено.

2) $\left|k(t,S)\right|$ всегда не бесконечно;

$$M_0 = \max_{t,S\in a\div b}\left|k(t,S)\right|;$$

$$\lambda < \frac{1}{M_0(b-a)}.$$

Если все эти условия выполнены, то ряд последовательных приближений строится по следующему правилу:

$$\varphi_{n+1}(t) = \lambda\int_a^b k(t,S)\varphi_n(S)dS + f(t).$$

Пример.

С помощью рассмотренного метода решить интегральное уравнение

$$\varphi(t) = \frac{5}{6}t + \frac{1}{2}\int_0^1 tS\varphi(S)dS\,.$$

Ядро $K(t,S) = tS$ - функция непрерывная.

$$\max_{t,S\in 0,1}\left|K(t,S)\right| = 1 = M_0\,.$$

Проверяем применимость метода

$$\frac{1}{M_0(b-a)} - 1 > \frac{L}{2} = \lambda\,.$$

Первую функцию возьмем $\varphi_0(t) = 0$.

$$\varphi_1(t) = \frac{5}{6}t + \frac{t}{2}\int_0^1 S\varphi_0(S)dS = \frac{5}{6}t\,;$$

$$\varphi_2(t) = \frac{5}{6}t + \frac{t}{2}\int_0^1 S\,\frac{5}{6}SdS = \frac{5}{6}t(1+\frac{1}{6});$$

$$\varphi_n(t) = \frac{5}{6}t(1 + \frac{1}{6} + \frac{1}{6^2} + ... + \frac{1}{6^{n-1}}) = t(1 - \frac{1}{6^n});$$

$$\varphi(t) = \lim_{n\to\infty}\varphi_n = t.$$

Удачный выбор приближения может сократить время приближения.

10. Применение метода приближенных решений для решения интегральных уравнений Вольтерра 2-го рода

$\varphi(t) = \lambda\int_a^t K(t,S)\varphi(S)dS + f(t)$ - интегральное уравнение Вольтерра.

Эти уравнения можно рассматривать как частный случай уравнений Фредгольма, если $K(t,S) = 0$ при $S > t$. Отличие состоит в том, что сравнение с λ не нужно (λ - любое)

Пример.

Найти неизвестную функцию φ:

$$\varphi(t) = t - \int_a^t (t-S)\varphi(S)dS$$

Решение.

Положим $\varphi_0 = 0$. Тогда $\varphi_1(t) = t$.

$$\varphi_2(t) = t - \int_a^t (t-S)SdS = t - \frac{t^3}{3!}$$

.

$$\varphi_n(t) = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + ... + (-1)^{n-1}\frac{t^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

$$\varphi(t) = \lim_{n\to\infty}\varphi_n = \sin t.$$

11. Применение метода приближенных решений для решения некоторых видов нелинейных интегральных уравнений

$$\varphi(t) = \lambda\int_a^b K\left[t, S, \varphi(S)\right]dS + f(t).$$

Условия применимости метода:

1. $f(t)$ должна быть непрерывной функцией, $K(t, S, \varphi(S))$ должна быть непрерывной функцией по всем трем аргументам.
2. Ядро должно удовлетворять условиям Липшица:

$$\left|K(t, S, Z_2) - K(t, S, Z_1)\right| \le L\left|Z_2 - Z_1\right|,$$

где L - постоянная Липшица.

$$|\lambda| < \frac{1}{L(b-a)}.$$

L обычно берут минимально возможной.

$$L_{\min} = \min\frac{\left|K(t, S, Z_2 - K(t, S, Z_1)\right|}{\left|Z_2 - Z_1\right|}.$$

Пример.

Решить интегральное уравнение вида

$$\varphi(t) = \frac{1}{3}\int_{-1}^{1}\frac{tS}{1+\varphi^2(S)} + 1.$$

Условие выполняется:

$$|\lambda| < \frac{1}{L(b-a)};$$

$$\varphi_0(t) = 1;\ \varphi_1(t) = \frac{1}{3}\int_{-1}^{1}\frac{tS}{1+1}dS + 1 = 1;\ \varphi_2(t) = 1;\ \ \varphi_3(\mathrm{t}) = 1.$$

Если ядро $k(t,S,z)$ имеет ограниченную производную по z, то L можно выбрать из условия:

$$\left.\frac{dk}{dz}\right|_{a\le t,S\le b} \le L.$$

12. Решение системы интегральных уравнений

Ввести можно по аналогии с алгебраическими уравнениями.

$$\begin{cases} xy + tg\,\dfrac{x}{y} = 1 \\ \ln(x+y) = 3 \end{cases}$$

Бывают случаи, когда требуется найти несколько неизвестных функций, которые:

1) Определяются интегральными соотношениями.
2) Еще и определенным образом связаны между собой.

Запись, описывающая их, называется системой интегральных уравнений:

$$\begin{cases} \varphi_1(t) = \lambda\sum\limits_{j=1}^{n} k_{1j}(t,S)\varphi_j(S)dS + f_1(t) \\ \varphi_2(t) = \lambda\sum k_{2j}(t,S)\varphi_j(S)dS + f_2(t) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varphi_N(t) = \lambda\sum k_{Nj}(t,S)\varphi_j(S)dS + f_N(t) \end{cases}.$$

Обычно рассматривается $m=N$. В этом случае эффективен следующий метод:
От набора $f_1(t)\dots f_N(t),\ a\le t\le b$, переходят к $F(t),\ a\le t\le a+N(b-a)$.
От набора $\varphi_1\dots\varphi_N$ переходят к Φ.

$$k_C(t,S) = k_{ij}\left[t-(i-1)(b-a), S-(j-1)(b-a)\right],$$

при

$$\begin{cases} a+(i-1)(b-a)\le t < a+i(b-a) \\ a+(j-1)(b-a)\le t < a+j(b-a) \end{cases}.$$

$$\Phi(t) = \varphi_i\left[t - (i-1)(b-a)\right],$$

на интервале

$$a + (i-1)(b-a) \le t < a + i(b-a).$$

Можно записать одним уравнением всю систему:

$$\Phi(t) = \lambda \int_a^{a+N(b-a)} k_C(t,S)\Phi(S)dS + F(t).$$

13. Использование линейных операторов

Оператор – это любое действие, преобразующее элементы одного множества в элементы другого множества $E_0 \to E_1$.

Оператор называется линейным, если выполняются 2 условия:

1) $A(x+y) = A(x) + A(y).$
2) $A(\alpha x) = \alpha A(x);\ \alpha - const.$

$y(t) = \int_a^b k(t,S)x(S)dS$ - интегральный оператор Фредгольма над x.

Совокупность линейных операторов образует линейное пространство операторов. Оператор, переводящий элементы множества в самого себя ($E \to E$) называется единичным оператором и обозначается I. $Ix \to x$. Если обратный оператор существует, то применение его к исходному оператору должно давать единичный оператор: $A^{-1}A=I$. $I+A$ – всегда имеет обратный оператор.

$$S = (I+A)^{-1};$$

$$S(I+A) = I;$$

$$S = (I+A)^{-1} = I - A + A^2 - A^3 + A^4 - A^5 + \ldots.$$

Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода:

$$\varphi(t) = \lambda \int_a^b k(t,S)\varphi(S)dS + f(t);$$

$A\varphi = \int_a^b k(t,S)\varphi(S)dS$ - обозначение операции.

В операторной форме исходное интегральное уравнение:

$$U = \lambda A\varphi + f.$$

Переноса $A\varphi$ влево и выноса φ за скобки:

$$(I - \lambda A)\varphi = f.$$

При определенных условиях решение интегрального уравнения имеет вид:

$$\varphi = (I - \lambda A)^{-1} f.$$

Используя свойство:

$$\varphi = f + \lambda Af + \lambda^2 A^2 f + \ldots + \lambda^n A^n f$$ - ряд Неймана.

1) ряд должен быть сходящимся.
2) необходимо выполнение неравенства.

$$\lambda < \frac{1}{\left[\max\limits_{t,S\in a\div b} k(t,S)\right](b-a)};$$

$$A^2 f = A(Af) = \int_a^b k(t,S)\left[\int_a^b k(S,\tau) f(\tau)d\tau\right]dS = \int_a^b\int_a^b k(t,S)k(S,\tau)f(\tau)dSd\tau =$$

$$= \int_a^b\left[\int_a^b k(t,S)k(S,\tau)dS\right]f(\tau)d\tau = \int_a^b k_2(t,S)f(S)dS,$$

где $k_2(t,\tau) = \int_a^b k(t,S)k(S,\tau)dS$ - повторное ядро (итерированное ядро).

$$A^3 f = \int_a^b\left[\int_a^b K(t,S)K_2(S,\tau)dS\right]f(\tau)d\tau = \int_a^b K_3,(t,S)f(S)dS;$$

$$K_3(t,S) = \int_a^b K(t,S)K_2(S,\tau)d\tau;$$

$$K_n(t,S) = \int_a^b K(t,S)K_{n-1}(S,\tau)d\tau;$$

$$A^n f = \int_a^b K_n(t,S)f(S)dS;$$

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda\int_a^b K_1(t,S)f(S)dS + \lambda^2\int_a^b K_2(t,S)f(S)dS +$$

$$+\lambda^3\int_a^b K_3(t,S)\,f(S)dS+...=f(t)+\lambda\int_a^b\left[K_1(t,S)+\lambda K_2(t,S)+\lambda^2K_3(t,S)+...\right]\times$$
$$\times f(s)dS;$$

$\varphi(t)=f(t)+\lambda\int_a^b R(t,S,\lambda)\,f(S)dS$ - нахождение $\varphi(t)$ через резольвенту.

Резольвента определяется следующим образом:

$$R(t,S,\lambda)=K_1(t,S)+\lambda K_2(t,S)+\lambda^2K_3(t,S)+...$$
$$R(t,S,\lambda)=K(t,S)+\lambda\int_a^b K(t,\tau)R(\tau,S,\lambda)d\tau;$$
$$R(t,S,\lambda)=K(t,S)+\lambda\int_a^b K(\tau,S)R(t,\tau,\lambda)d\tau.$$

Для резольвенты справедливо следующее выражение:

$$R(t,S,\lambda_1)-R(t,S,\lambda_2)=(\lambda_1-\lambda_2)\int_a^b R(t,\tau,\lambda_2)R(\tau,S,\lambda_1)d\tau;$$
$$R(t,S,0)=K(t,S);$$
$$\frac{\partial R(t,S,\lambda)}{d\lambda}=\int_a^b R(t,\tau,\lambda)R(\tau,S,\lambda)d\tau;$$

Все полученные результаты в этом методе применимы для уравнений Вольтерра.

Примеры.

1. Решить интегральное уравнение
2.

$$\varphi(t)=\lambda\int_0^1 tS\varphi(S)dS+f(t);$$
$$K(t,S)=tS\ ,\ a=0,\quad b=1;$$
$$\max\left|K(t,S)\right|=1\quad\text{при}\quad 0\le t,S\le 1.$$

Найдем последовательность интегрированных ядер

$$K_1(t,S)=tS;$$
$$K_2(t,S)=\int_0^1 K(t,\tau)K(\tau,S)d\tau=\int_0^1 t\tau\tau d\tau=\frac{ts}{3};$$

$$K_3(t,S)=\frac{tS}{3^2};$$

$$K_n(t,S)=\frac{tS}{3^{n-1}};$$

$$R(t,S,\lambda)=ts+\frac{\lambda}{3}tS+\frac{\lambda^2}{3^2}+...+\frac{\lambda^n}{3^n}tS+...+=\frac{3tS}{3-\lambda};$$

Это справедливо при $|\lambda|<3$.

Таким образом, общее решение исходного уравнения имеет вид:

$$\varphi(t)= f(t)+\int_0^1\frac{3tS}{3-\lambda}f(S)dS;$$

2. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(t)=e^t+\int_0^t e^{t-S}\varphi(S)dS;$$

$$\lambda=1;$$

$$K_1(t,S)=e^{t-S};$$

$$K_2(t,S)=\int_S^t e^{t-\tau}e^{\tau-S}d\tau=e^{t-S}(t-S);$$

$$K_3(t,S)=e^{t-S}\frac{(t-S)^2}{2!};$$

$$K_n(t,S)=e^{t-S}\frac{(t-S)^{n-1}}{(n-1)!};$$

$$R(t,S,1)=e^{t-S}+...+e^{t-S}\frac{(t-S)^{n-1}}{n!}+...+=e^{2(t-S)};$$

$\varphi(t)=e^t+\int_0^t e^{2(t-S)}e^S dS=e^{2t}$ - решение интегрального уравнения.

14. Интегральные уравнения с ядром, имеющим слабую особенность

$$K(t,S)=\frac{H(t,S)}{(t-S)^{\alpha}};$$
$$0<\alpha<1;$$
$$\int_0^t \frac{\varphi(S)}{\sqrt{t-S}}\,dS=f(t).$$

Общий вид уравнения:

$$\varphi(t)=f(t)+\int_a^t \frac{H(t,S)}{(t-S)^{\alpha}}\varphi(S)dS;$$
$$a\le t\le b,\ S<t,\ \alpha\ge\frac{1}{2}.$$

Для решения используют следующие процедуры:

1. Вычисляют интегрированные ядра

$$K_2(t,S);\quad K_3(t,S);$$
$$K_2(t,S)=\int_S^t \frac{H(t,\tau)H(\tau,S)}{(t-\tau)^{\alpha}(t-S)^{\alpha}}=(t-S)^{1-2\alpha}F_2(t,S);$$
$$K_3(t,S)=(t-S)^{2-3\alpha}F_3(t,S);$$
$$K_4(t,S)=(t-S)^{3-4\alpha}F_4(t,S).$$

Рано или поздно мы дойдем до такой итерации (n), где неинтегрируемый компонент станет интегрируемым

2. Исходное уравнение приводим к интегральному уравнению с интегрированными ядрами, путем свертывания обеих частей с функцией $\lambda K(t,S)$.

К обеим частям уравнения применяем интегральный оператор вида

$$\lambda\int_a^t K(t,S)(\cdot)dS;$$
$$\lambda\int_a^t K(t,S)\varphi(S)dS=\lambda\int_a^t K(t,S)f(S)dS+\lambda^2\int_a^t K(t,S)[\int_a^S K(S,\tau)\varphi(\tau)d\tau]\times$$
$$\times dS=\lambda\int_a^t K(t,S)f(S)dS+\lambda^2\int_a^t K_2(t,S)\varphi(S)dS.$$
$$\lambda\int_a^t K(t,S)\varphi(S)dS=\varphi(t)-f(t);$$

$$\varphi(t) = \lambda^2 \int_a^t K_2(t,S)\varphi(S)dS + f_2(t);$$

$$f_2(t) = f(t) + \lambda \int_a^t K(t,S) f(S)dS;$$

$$\varphi(t) = \lambda^3 \int_a^t K_3(t,S)\varphi(S)dS + f_3(t);$$

$$f_3(t) = f_2(t) + \lambda \int_a^t K(t,S) f_2(S)dS$$

Будем продолжать до тех пор, пока не дойдем до того n, которое нашли на 1-м этапе.

$$\varphi(t) = \lambda^n \int_a^t K_n(t,S)\varphi(S)dS + f_n(t).$$

15. Уравнение типа свертки

Это такие интегральные уравнения, ядро которых зависит от разности аргументов. Они имеют следующий вид:

$$\varphi(t) = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} k(t-S)\varphi(S)dS + f(t).$$

Для решения уравнений типа свертки используется преобразование Фурье в следующей форме:

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt;$$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega.$$

Введем понятие свертка функций. Она представляет из себя следующее:

$$\Psi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2(\tau - t)dt = f_1 * f_2.$$

*- обозначение свертки;

Интегральный оператор Фурье будем обозначать $F(*)$.

$$F(\omega) = F[f(t)] = Ff.$$

Преобразование Фурье от свертки функций равно произведению отдельных преобразований Фурье от каждой функции:

$$F\left[f_1 * f_2\right] = \sqrt{2\pi} F\left[f_1\right] \cdot F\left[f_2\right].$$

Пример.

$$\varphi(t) = \lambda \int k(t-S) \varphi(S) dS + f(t).$$

Обозначим

$$F[\varphi] = \Phi; \; F[f] = F; \;\; F[k] = K.$$

Тогда после преобразования Фурье:

$$\Phi(\omega) = \lambda \sqrt{2\pi} K(\omega) \Phi(\omega) + F(\omega).$$

Отсюда можно найти $\Phi(\omega)$:

$$\Phi(\omega) = \frac{F(\omega)}{1 - \lambda \sqrt{2\pi} K(\omega)}.$$

Взяв обратное преобразование Фурье, мы получаем нашу функцию:

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(\omega) e^{j\omega t}}{1 - \lambda \sqrt{2\pi} K(\omega)} d\omega.$$

Пусть $R(t, \lambda)$ - это обратное преобразование Фурье от следующей функции:

$$\frac{K(\omega)}{1 - \lambda \sqrt{2\pi} K(\omega)};$$

$$R(t, \lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{K(\omega)}{1 - \lambda \sqrt{2\pi} K(\omega)} e^{j\omega t} d\omega.$$

Тогда решение можно найти по формуле:

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda \int_{-\infty}^{\infty} k(t - S, \lambda) f(S) dS.$$

16. Применение метода свертки для решения интегральных уравнений 1-го рода

Бывают уравнения типа свертки и 1-го рода, то есть неизвестная функция есть только под знаком интеграла. Здесь также применим этот метод:

$$\int_{-\infty}^{\infty} k(t-S)\varphi(S)dS = f(t).$$

Преобразовав, получим:

$$\sqrt{2\pi}K(\omega)\Phi(\omega) = F(\omega).$$

Откуда

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F(\omega)}{K(\omega)}e^{j\omega t}d\omega.$$

Преобразование Лапласа можно также применять как и Фурье, но нужно всегда при решении проверять область определения.

Пример.

$$\varphi(t) = t + \int_{0}^{t}\sin(t-S)\varphi(S)dS.$$

L{}* - так будем обозначать преобразование Лапласа.

Известно:

$$L\{t\} = \frac{1}{p^2}; \quad L\{\sin t\} = \frac{1}{p^2+1}; \quad L\{\varphi\} = \Phi(p).$$

Взяв преобразование Лапласа от $\varphi(t)$, получим:

$$\Phi(p) = \frac{1}{p^2} + \frac{\Phi(p)}{p^2+1}; \;\Rightarrow\; \Phi(p) = \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^4}.$$

Решение:

$$\varphi(t) = t + \frac{t^3}{3!}.$$

Решение системы интегральных уравнений

Пусть имеем систему N интегральных уравнений следующего вида:

$$\varphi(t)= f_i(t)+\lambda\sum_{j=1}^{n}\int_0^t k_{ij}(t-S)\varphi_j(S)dS;\quad i=1\div n.$$

Применим ко всем уравнениям этой системы преобразование Лапласа:

$$\Phi_i(p)=F_i(p)+\lambda\sum_{j=1}^{n}k_{ij}(p)\Phi_j(p).$$

Решив эту систему алгебраических уравнений в виде набора изображений и найдя от них оригиналы, мы найдем решение:

$$\Phi_i(p)\Rightarrow\varphi_i(t).$$

Пример.

$$\varphi(t)=\lambda\int_0^t\varphi(S)\varphi(t-S)dS+f(t).$$

Это нелинейное уравнение типа свертки. Применим преобразование Лапласа к обеим частям этого уравнения:

$$\Phi(p)=\lambda\Phi^2(p)+F(p).$$

Это квадратное уравнение, его решение:

$$\Phi(p)=\frac{-1\pm\sqrt{1-4\lambda F(p)}}{2\lambda}\ \Rightarrow\ \varphi(t).$$

17. Решение интегро-дифференциальных уравнений типа свертки

Пусть дано следующее интегро-дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^n\varphi(t)}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1}\varphi(t)}{dt^{n-1}}+\cdots+a_n\varphi(t)+\sum_{m=0}^{l}\int_0^t k_m(t-S)\left[\frac{d^m\varphi(S)}{dS^m}\right]dS=f(t).$$

Набор начальных условий:

$$\varphi(0)=\varphi_0;\quad \varphi'(0)=\varphi_0';\quad \ldots\quad \varphi^{(n-1)}(0)=\varphi_0^{(n-1)}.$$

Используется следующее свойство преобразования Лапласа:

$$\frac{d^k\varphi}{dt^k}\Rightarrow p^k\Phi(p)-p^{k-1}\varphi_0-p^{k-2}\varphi_0'-p^{k-3}\varphi_0''-\ldots-\varphi_0^{(k-1)}.$$

Применим это к нашему уравнению:

$$\int_0^t k_m(t-S)\varphi^m(S)dS\Rightarrow k_m(p)\left[p^m\Phi(p)-p^{m-1}\varphi_0-\ldots-\varphi_0^{(m-1)}\right].$$

Теперь общее уравнение превращается в следующий вид:

$$\Phi(p)\cdot\left[p^n+a_1p^{n-1}+\ldots+a_n+\sum_{m=0}^{l}k_m(p)p^m\right]=F(p).$$

Отсюда изображение искомой функции:

$$\Phi(p)=\frac{F(p)}{p^n+a_1p^{n-1}+\ldots+a_n+\sum_{m=0}^{l}k_m(p)p^m}.$$

Преобразование Меллина

Пусть есть некая функция $f(t)$ и для нее справедливо следующее:

$$\int_0^{\infty}|f(t)|t^{\sigma-1}dt<+\infty.$$

Для такой функции есть преобразование Меллина:

$$\left.\begin{aligned}F(S)&=\int_0^{\infty}f(t)t^{S-1}dt\\ f(t)&=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}F(S)t^{-S}dS\end{aligned}\right.,\quad t>0.$$

Преобразование Меллина устанавливает однозначную взаимосвязь между 2-мя функциями. Интеграл берется на комплексной плоскости вверх и вниз.

Пример.

Гамма-функция. С помощью преобразования Меллина гамма-функция вводится следующим образом:

$$\Gamma(S)=\int_0^{+\infty}e^{-t}t^{S-1}dt;$$

$$e^{-t}=\frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty}\Gamma(S)t^{-S}dS;\ \mathrm{c}>0.$$

Преобразование Меллина во многом похоже на преобразование Лапласа:

$$\begin{array}{l} \Phi(p) \xrightarrow{\text{Преобразование Лапласа}} \varphi(t) \\ \Downarrow \; p = S \qquad\qquad\qquad\qquad . \\ \Phi(p) \xleftarrow{\text{Преобразование Меллина}} f(t) \end{array}$$

Есть следующая взаимосвязь:

$$\varphi(t) = f\left(e^{-t}\right).$$

18. Применение преобразования Меллина для решения интегральных уравнений

$$M\left\{\int_0^{\infty} f(t)\varphi\left(\frac{x}{t}\right)\frac{dt}{t}\right\} = F(S)\Phi(S);$$

$$F(S) = M\{f(t)\};$$

$$\Phi = M\{\varphi(t)\}.$$

Это свойство используется для решения интегрального уравнения вида:

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^{\infty} K\left(\frac{x}{t}\right)\varphi(t)\frac{dt}{t}. \qquad (*)$$

Преобразование Меллина используется для решения уравнений типа (*). Условие применимости этих функций состоит в том, чтобы они допускали от себя преобразование Меллина. Обозначим преобразование Меллина от $f(x)$ через $M\{f(x)\} = F(S)$, а преобразование Меллина от $K(z)$ - $M\{K(z)\} = K(S)$. Функции $F(S)$ и $K(S)$ должны иметь общую область аналитичности. Применим преобразование Меллина к обеим частям уравнения (*).

$$\Phi(S) = F(S) + K(S)\Phi(S);$$

$$\Phi(S) = \frac{F(S)}{1 - K(S)} \to \Phi(t).$$

Пример.

Пусть имеем интегральное уравнение вида:

$$\varphi(x) = e^{-\alpha x} + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x}{t}}\varphi(t)\frac{dt}{t}, \quad \alpha > 0;$$

$$M\left\{e^{-\alpha x}\right\}=\int_0^{+\infty}e^{-\alpha x}x^{S-1}dx=\alpha^{-S}\int_0^{+\infty}e^{-z}z^{S-1}dz=\frac{\Gamma(S)}{\alpha^S}=F(S)\quad,\quad(S>0);$$

$$z=\alpha x;$$

$$M\left\{\frac{1}{2}e^{-x}\right\}=\frac{1}{2}\Gamma(S)=K(S)\quad,\quad S>0;$$

$$\Phi(S)=\frac{\Gamma(S)}{\alpha^S}+\frac{1}{2}\Gamma(S)\Phi(S);$$

$$\Phi(S)=\frac{\Gamma(S)}{\alpha^S\left[1-\frac{1}{2}\Gamma(S)\right]}\overset{M}{\leftrightarrow}\varphi(t).$$

19. Симметричные интегральные уравнения

Симметричными называются интегральные уравнения вида:

$$K(t,S)=K(S,t);$$
$$K(t,S)=t^2S^2.$$

Если ядро комплексно - значное, то

$$K(t,S)=K^*(S,t);$$

$$\varphi(t)=\lambda\int_a^b K(t,S)\varphi(S)+f(t);$$

$A\varphi=\int_a^b K(t,S)\varphi(S)$ - линейный оператор под функцией φ.

Если бы $f(t)\equiv 0$, то соответствующее интегральное уравнение стало бы однородным. При этом можно записать следующее: $\varphi=\lambda A\varphi$. Выяснили, что такое однородное уравнение имеет ограниченное число решений. Эти решения представляют собой набор некоторых функций $\{\varphi_c\}$. Они называются собственными функциями. Они однозначно соответствуют собственным числам.

Если мы рассматриваем симметричные ядра, то справедливы следующие свойства:

1. Любое ядро имеет хотя бы одно ненулевое собственное число. Причем все собственные числа действительны.
2. У каждого собственного числа может быть по несколько собственных функций.

3. Собственные функции из различных наборов всегда ортогональны между собой. Хотя внутри набора, они необязательно ортогональны.

В каждом наборе количество функций можно оценить из следующего неравенства:

$$n_{ф} \leq \lambda^2 \int_a^b \int_a^b \left| K(t,S) \right|^2 dtdS$$

На первом этапе находятся собственные числа и собственные функции уравнения $\varphi = \lambda A \varphi$.

На втором этапе добиваются, чтобы и внутри наборов функции между собой тоже стали ортогональными.

Функции $A(t), B(t)$ называются ортогональными, если

$$\int_a^b A(t)B(t)dt = 0 .$$

Функции подвергают процедуре ортогонализации. Процедура состоит в несколько этапов.

1. Выбираем первую функцию, равную $\psi_1 = \varphi_{i1}(t)$. На основании ее формируем следующую

$$\omega_1(t) = \frac{\psi_1(t)}{\sqrt{\int_a^b \psi_1^2(t)dt}} .$$

2. $\psi_2 = \varphi_{i2}(t) - \omega_1(t) \int_a^b \omega_1(t) \varphi_{i2}(t)dt;$

$$\omega_2(t) = \frac{\psi_2(t)}{\sqrt{\int_a^b \psi_2^2(t)dt}} .$$

Получаем вторую функцию из нового набора.

3. $\psi_3 = \varphi_{i3}(t) - \omega_1(t) \int_a^b \omega_i(t) \varphi_{i3}(t)dt - \omega_2 \int_a^b \omega_2 \varphi_{i3} dt;$

$$\omega_3(t)=\frac{\psi_3(t)}{\sqrt{\int_a^b \psi_3^2(t)dt}}\rightarrow\omega_3(t);$$

$$\psi_k=\varphi_{ik}(t)-\omega_1(t)\int_a^b\omega_i(t)\varphi_{ik}(t)dt-\omega_2\int_a^b\omega_2\varphi_{ik}dt-\omega_{k-1}\int_a^b\omega_{k-1}\varphi_{ik-1}dt;$$

$$\omega_k(t)=\frac{\psi_k(t)}{\sqrt{\int_a^b \psi_k^2(t)dt}}\rightarrow\omega_3(t),$$

и т.д. пока не дойдем до последней функции из этого набора.

$\int_a^b\omega_i\omega_j dt=0$ - условие ортогональности.

$\int_a^b\omega_i^2 dt=1$ - условие ортонормированности.

Для удобства сделаем следующие замены:

Для $\lambda\neq 0$**:**

Поделим все на λ, обозначим $\mu=1/\lambda$.

Вводим

$$g(t)=-1/\lambda\, f(t).$$

Наше интегральное уравнение перепишется в следующем виде:

$$\int_a^b k(t,S)\varphi(S)dS-\mu\varphi(t)=g(t).$$

Или в операторной форме:

$$A\varphi-\mu\varphi=g.$$

Наше исходное уравнение привели к стандартной форме записи для операторного линейного уравнения. Имеется возможность применить все выводы теории линейных операторов.

Можно считать, что спектр оператора состоит из $\mu_1,\mu_2,...\mu_3$. Возможны две ситуации:

Ситуация №1: Наши конкретные $\lambda\neq\lambda_1,\lambda_2,...$ не равны ни одному из собственных чисел, то есть $\mu\neq\mu_1,\mu_2...\mu_m$. Теория линейных операторов сразу дает решение интегрального уравнения в виде следующей формулы:

$$\varphi(t)=\frac{1}{\mu}\sum_j\frac{\mu_j g_j}{\mu_j-\mu}\varphi_{jc}(t)-\frac{1}{\mu}g(t),$$

где $g_i=\int_a^b g(t)\varphi_i(t)dt;$

$\varphi_{jc}(t)$- собственная функция ядра К.

Ситуация №2: λ совпадает с одной из собственных чисел $\mu=\mu_k$. Подразумевается, что свободный член не является одной из собственных функций ядра, потому что в противном случае его можно было бы включить в ядро и уравнение стало бы однородным.

Если у собственного числа одна собственная функция, то решение дается следующим уравнением:

$$\varphi(t)=\frac{1}{\mu}\sum_{j\neq k}\frac{\mu_j g_j}{\mu_j-\mu}\varphi_{jc}(t)-\frac{1}{\mu}g(t)+C\varphi_{ck}(t).$$

То есть формула несколько модифицировалась. Здесь не присутствует та собственная функция, которая соответствует нашему собственному числу. С-произвольная константа, которую нужно определять из других условий.

Когда у собственного числа несколько собственных функций, то в этом случае:

1) нужно проделать процедуру ортоганализации ($\varphi_i\to\omega_i$).

2) формула будет следующая:

$$\varphi(t)=\frac{1}{\mu}\sum_{j\neq k}\frac{\mu_j g_j}{\mu_j-\mu}\varphi_{jc}(t)-\frac{1}{\mu}g(t)+C_1\omega_1(t)+C_2\omega_2(t)+\ldots+C_m\omega_m(t),$$

где $\omega_1\div\omega_u$ соответствуют λ_k, то есть их появляется несколько и каждый с определенной константой.

Подставив обозначения из прежнего уравнения для решения уравнения с симметричными ядрами имеем:

$$\underline{\lambda\neq\lambda_k:}$$

$$\varphi(t)=\lambda\sum_j\frac{f_j}{\lambda_j-\lambda}\varphi_{jc}(t)-f(t);$$

$$f_j = \int_a^b f(t)\varphi_j(t)dt;$$

$$\underline{\lambda = \lambda_k:}$$

$$\varphi(t) = \lambda \sum_{j \neq k} \frac{f_j}{\lambda_j - \lambda} \varphi_{jc}(t) - f(t) + C_1\omega_1(t) + C_2\omega_2(t) + \ldots + C_m\omega_m(t).$$

<u>Физический смысл.</u> Собственные числа - это аналог резонансных частот системы, а аналог λ - текучая частота. Амплитуда результирующего колебания описывается второй формулой.

20. Интегральные уравнения, приводящиеся к симметричным

Некоторые интегральные уравнения можно привести к симметричным и далее воспользоваться полученными результатами.

$$\varphi(t) = \lambda \int_a^b k(t,S)p(S)\varphi(S)dS + f(t),$$

где k - ядро действительное симметричное.

Предполагается, что на $[a,b]$ - $p(S) > 0$. Тогда умножим обе части на $\sqrt{p(t)}$ и введем следующее обозначение:

$$\Psi(t) = \lambda \int_a^b L(t,S)\Psi(S)dS + \sqrt{p(t)}f(t).$$

Это стандартная запись интегрального уравнения с симметричным ядром, находится $\Psi(t)$, а потом $\varphi(t)$.

$\int_a^t K(t,S)\varphi(S)dS = f(t)$ - уравнение Вольтерра.

Дополнительное условие:

Для того чтобы решение получилось непрерывным, необходимо чтобы $f(a) = 0$. Для решения такого уравнения продифференцируем обе части уравнения по t.

$$K(t,t)\varphi(t) + \int_a^t \frac{\partial}{\partial t}[K(t,S)]\varphi(S)dS = \frac{\partial}{\partial t} f(t).$$

Предполагаем, что $K(t,t) \neq 0$.

Обозначим $\dfrac{\partial}{\partial t}K(t,S)=K_t^{'}(t,S)$ и $\dfrac{\partial}{\partial t}f(t)=f_t^{'}(t)$.

$$\varphi(t)+\int_a^t \frac{K^{'}(t,S)}{K(t,t)}\varphi(S)dS=\frac{f_t^{'}(t)}{K(t,t)}.$$

Может оказаться, что $K(t,t)\equiv 0$, тогда мы получаем

$$\int_a^t \frac{\partial}{\partial t}\left[K(t,S)\right]\varphi(S)dS=\frac{d}{dt}f(t).$$

В этом случае вновь обе части дифференцируются по t.

$$K_t^{'}(t,t)\varphi(t)+\int_a^t \frac{\partial^2 K(t,S)}{\partial t^2}\varphi(S)dS=f_t^{''}(t);$$

$$K_t^{'}(t,t)\neq 0.$$

Уравнение Фредгольма первого рода

$$\int_a^b k(t,S)\varphi(S)dS=f(t). \tag{1}$$

Даже при хорошем ядре уравнение Фредгольма первого рода может не иметь решения. Пусть ядро представляет собой степенную функцию:

$$k(t,S)=a_0(S)t^m+a_1(S)t^{m-1}+\ldots+a_m(S).$$

Не трудно показать, что

$$t^m\int_a^b a_0(S)\varphi(S)dS+t^{m-1}\int_a^b a_1(S)\varphi(S)dS+\ldots+\int_a^b a_m(S)\varphi(S)dS=$$

$$=t^m b_0+t^{m-1}b_1+\ldots+b_m.$$

Поэтому если $f(t)=\sin t$, то при конечном числе m левая часть никогда не будет равна $\sin t$. Поэтому уравнение не имеет решения.

Для симметричных ядер можно попытаться искать выход в следующем варианте: теорема Гильберта-Шмидта. По ней требуется, чтобы $f(t)$ разлагалась по собственным функциям ядра, то есть чтобы

$$f(t)=\sum_i a_i\varphi_{ic}(t); \tag{2}$$

$$a_i=\int_a^b f(t)\varphi_{ic}(t)dt.$$

В этом случае этот метод применим.

Гильберт и Шмидт предложили искать решение в виде разложения собственных функций ядра, но с другими коэффициентами.

$$\varphi(t)=\sum_i c_i\varphi_{ic}(t). \tag{3}$$

Если уравнение (3) подставить в уравнение Фредгольма первого рода (1), сравнить с (2) и вспомнить свойства собственных функций, то получим:

$$\frac{c_i}{\lambda_i} = a_i \text{, где } \lambda_i \text{ - собственные числа.}$$

Таким образом окончательное решение:

$$\varphi(t) = \sum_i a_i \lambda_i \varphi_{ic}(t).$$

21. Использование метода последовательных приближений для решения некоторых интегральных уравнений Фредгольма первого рода

Пусть $\lambda_{\min}$ - минимальное по абсолютной величине собственное число. Тогда, если $0 < |\lambda| < 2|\lambda_{\min}|$, то решение можно искать в виде итерационной процедуры следующего вида:

$$\varphi(t) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(t);$$

$$\varphi_n(t) = \varphi_{n-1}(t) + \lambda\left[f(t) - \int_a^b k(t,S)\varphi_{n-1}(S)dS \right].$$

То есть алгоритм упрощенно можно показать так:

1) $k(t,S) \to \{\lambda_i\} \to \lambda_{\min}$.
2) выбор $\varphi_0(t)$ и λ.
3) итерации.

22. Метод с использованием производящей функции

Предполагается, что, во-первых, ядро k - симметрично. Во-вторых, что оно представляет собой какую-либо из производящих функций. Функция $G(t,z)$ называется производящей функцией для некой системы исходной функции:

$$G(t,z) \leftarrow \{g_0(z), g_1(z), \ldots\}.$$

В-третьих, если ее можно представить следующим образом:

$$G(t,z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n g_n(z) t^n.$$

И, в-четвертых, все функции являются ортогональными:

$$\int_a^b g_i(z) g_j(z) dz = 0, \quad i \neq j.$$

Решение можно искать в виде:

$$\varphi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n g_n(t).$$

Подставим в наше выражение

$$\int_a^b k(t,S)\varphi(S)dS = \int_a^b \sum_{n=0}^{\infty} C_n g_n(S) t^n \left[\sum_{k=0}^{\infty} a_k g_k(S)\right] dS =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} C_n t^n \left[\sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_a^b g_n(S) g_k(S) dS\right] = \sum_{n=0}^{\infty} C_n t^n a_n G_n ,$$

где $G_n = \int_a^b g_n^2(S)dS$.

Надо найти a_n. Продифференцируем $f(t)$ k раз и подставим $t=0$:

$$\left.\frac{\partial^k f(t)}{\partial t^k}\right|_{t=0} = C_k a_k G_k k!;$$

$$y(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + \ldots$$

$$y'(t) = b_1 + 2b_2 t + 3b_3 t^2 + \ldots \Big|_{t=0} = b_1;$$

$$a_k = \frac{\left. f^{(k)}(t)\right|_{t=0}}{C_k G_k k!}.$$

Подставляем в

$$\varphi(t) = \sum a_k g_k(t).$$

23. Нефредгольмовы интегральные уравнения

Мы всегда рассматривали ядра:

$$\int_a^b \int_a^b |k(t,S)|^2 dt dS < +\infty.$$

Если это условие не выполняется, то у ядра не набор целых чисел, а непрерывные области и совокупность непрерывных функций.

Пример.

$$\varphi(t) = \lambda \int_{-D}^{D} e^{-|t-S|} \varphi(S) dS .$$

Проверим является ли оно фредгольмовым.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\left|K(t,S)\right|^2 dtdS = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2|t-S|}dS\right]dt = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{t} e^{-2(t-S)}dS + \int_{t}^{\infty} e^{-2(S-t)}dS\right]dt =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} dt \cdot 1 = \infty .$$

Уравнение не фредгольмовое.

$$\varphi_1(t) = c_1 e^{rt} + c_2 e^{-rt},$$

$$l = \sqrt{1-2\lambda},\ \lambda > 0 .$$

$$\varphi_1(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} \varphi(x)\cos\omega x dx .$$

$$\varphi(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty} \varphi_1(\omega)\cos\omega x dx .$$

$$\psi(x) = \varphi(x) + \varphi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\left[\varphi_1(t) + \varphi(t)\right]\cos\omega x dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty}\psi(t)\cos xt dt .$$

$$\psi(t) = \lambda\int_0^{\infty}\psi(t)\cos xt dt .$$

При $\lambda = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$,

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} | K |^2\ dxdt = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\cos^2 x + dxdt = \infty .$$

24. Применение преобразования Гильберта для решения интегральных уравнений

Каждая из двух функций может рассматриваться как интегральное уравнение первого рода. Тогда вторая функция будет решением этого интегрального уравнения. Это используется для решения более сложных интегральных уравнений.

Обозначим через $f(x) = \mathrm{H}[\varphi(t)] = \frac{1}{\pi} V.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(y)}{y-x} dy$ преобразование Гильберта над функцией φ. Этот метод используется для решения интегральных уравнений вида:

$$\varphi(x) - \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(y)}{y-x} dy = f(x).$$

С учетом введенного обозначения можно записать

$$\varphi(x) - \lambda\pi \mathrm{H}[\varphi] = f(x). \qquad (*)$$

Применим еще раз к обеим частям уравнения преобразование Гильберта.

$$\mathrm{H}[\varphi] - \lambda\pi\varphi = \mathrm{H}[f]; \quad \mathrm{H}\{\mathrm{H}[\varphi]\} = -\varphi.$$

Выразим $\mathrm{H}[\varphi]$ и подставим в (*):

$$\varphi - \lambda\pi \mathrm{H}[f] + \lambda^2\pi^2\varphi = f(x).$$

Выразим φ:

$$\varphi\left(1 + \lambda^2\pi^2\right) = f(x) + \lambda\pi \mathrm{H}[f];$$

$$\varphi(x) = \frac{f(x) + \lambda\pi \mathrm{H}[f]}{1 + \lambda^2\pi^2}; \quad 1 + \lambda^2\pi^2 \neq 0.$$

Преобразование Гильберта можно применять и в более сложных случаях, когда ядро вида

$$k(x, y) = \frac{1}{y-x} + k_0(x, y);$$

$$\varphi - \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} k(x, y)\varphi(y) dy = f(x).$$

Иногда преобразование Гильберта рассматривают в следующем виде:

$$\begin{cases} \Psi(x) = \dfrac{1}{2\pi} V.p. \int\limits_{-\pi}^{+\pi} \varphi(t) ctg\left(\dfrac{t-x}{2}\right) dt \\ \varphi(x) = -\dfrac{1}{2\pi} V.p. \int\limits_{-\pi}^{+\pi} \Psi(t) ctg\left(\dfrac{t-x}{2}\right) dt \end{cases}.$$

25. Нелинейные интегральные уравнения

Нелинейные интегральные уравнения гораздо сложнее. Ранее, мы рассматривали решение интегрального уравнения вида:

$$\varphi(t) = \lambda \int\limits_a^b k[t, S, \varphi(S)] dS + f(t),$$

про которые говорили, что если выполняется условие Липшица: $|\lambda| < \dfrac{1}{L(b-a)}$, то его можно решить с помощью метода последовательного приближения.
Рассмотрим интегральное уравнение Гамерштейна:

$$\varphi(t) = \lambda \int\limits_a^b k(t, S) \Psi[S, \varphi(S)] dS + f(t),$$

где $k(t, S)$- ядро.
Должно выполняться следующее условие:

$$\left| \frac{\partial \Psi(x, y)}{\partial y} \right| < |\lambda|_{\min}.$$

Решение этого интегрального уравнения можно искать методом последовательного приближения. φ_0 выбирается произвольно и строится ряд приближений:

$$\varphi_1(x) = \lambda \int\limits_a^b k(x, S) \Psi[S, \varphi_0(S)] dS + f(x);$$

$$\varphi_2(x) = \lambda \int\limits_a^b k(x, S) \Psi[S, \varphi_1(S)] dS + f(x);$$

$$\varphi_3(x)=\lambda\int_a^b k(x,S)\Psi[S,\varphi_2(S)]dS+f(x);$$

. . . .

$$\varphi_n(x)=\lambda\int_a^b k(x,S)\Psi[S,\varphi_{n-1}(S)]dS+f(x);$$

$$\varphi_{Ц-\square}(x)=\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x).$$

26. Применение вырожденных ядер для решения уравнений Гаммерштейна

Если ядро вырожденное, то есть его можно представить в виде:

$$k(t,S)=\sum_{i=1}^{m}a_i(t)b_i(S),$$

то решение зачастую проще.

$$\varphi(t)=\lambda\sum_{i=1}^{m}a_i(t)\int_a^b b_i(S)\Psi[S,\varphi(S)]dS+f(t);$$

$$\varphi(t)=\lambda\sum_{i=1}^{m}a_i(t)C_i+f(t), \qquad (*)$$

где $C_i=\int_a^b b_i(S)\Psi[S,\varphi(S)]dS.$

Подставим наше выражение (*) в исходное интегральное уравнение:

$$\int_a^b b_j(S)\psi(S,\sum_{i=1}^{m}c_ia_i(S)+f(S))dS=c_j,\ j=1\div m.$$

Здесь функции известны, следовательно интеграл можно найти. Если решение системы, вновь полученных нелинейных алгебраических уравнений существует, то это значит, что существует набор коэффициентов $\{c_1^\Delta\div c_m^\Delta\}$, таких, что их подстановка в соответствующее уравнение превращает его в верное тождество $\varphi(t)=\sum_{i=1}^{m}c_i^\Delta a_i(t)+f(t)$. Может получиться, что таких наборов $\{c_1^\Delta\div c_m^\Delta\}$ будет несколько.

Примеры.

1. Пусть имеем интегральное уравнение вида

$$\varphi(t) = \lambda\int_0^1 t^2 S\varphi^2(t)dt,$$

где $K(t,S) = t^2 S$ - вырожденное ядро, состоящее из одного члена. Следовательно, коэффициент c будет один.

$$c = \int_0^1 S\varphi^2(S)dS \qquad (*)$$

$$\varphi(t) = \lambda c t^2;$$

$$c = \int_0^1 c^2\lambda^2 S^4(S)dS = \frac{c^2\lambda^2}{6};$$

Нетрудно видеть, что решений у этого алгебраического уравнения два:

$$c_1 = 0$$

$$c_2 = \frac{6}{\lambda^2}\cdot$$

Поэтому и у интегрального уравнения два решения:

$$\varphi_1(t) \equiv 0$$

$$\varphi_2(t) = \frac{6}{\lambda^2}\cdot$$

2. $\varphi(t) = \int_0^1 a(t)a(S)\varphi(S)\sin\left(\dfrac{\varphi(S)}{a(S)}\right)dS$.

3.
$a(t) > 0$ на интервале $0 \div 1$.

Проделав аналогичные преобразования можно получить уравнения относительно c.

$$1 = \int_0^1 a^2(S)\sin c dS;$$

$$1 = \sin c\int_0^1 a^2(S)dS.$$

Может оказаться:

а) $\int_0^1 a^2(S)dS < 1$.

б) $\int_0^1 a^2(S)dS > 1$.Тогда,

$$\sin c = \frac{1}{\int_0^1 a^2(S)dS};$$

$$c = \left\{ \begin{matrix} \arcsin c = \frac{1}{\int_0^1 a^2(S)dS} + 2\pi n \\ \pi - \arcsin \frac{1}{\int_0^1 a^2(S)dS} + 2\pi n \end{matrix} \right\}.$$

3. $\varphi(t) = 1 + \lambda \int_0^1 \varphi^2(S)dS$.

$$c = \int_0^1 \varphi^2(S)dS;$$

$$\varphi(t) = 1 + \lambda c. \qquad (*)$$

Подставим в исходное, получим

$$\lambda^2 c^2 + (2\lambda - 1)c + 1 = 0.$$

В отношении c, мы имеем следующее:

$$c = \frac{1 - 2\lambda \pm \sqrt{1 - 4\lambda}}{2\lambda^2}.$$

Подставим его в $(*)$, получим

$$\varphi_1(t) = \frac{1 + \sqrt{1 - 4\lambda}}{2\lambda};$$

$$\varphi_2(t) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4\lambda}}{2\lambda}.$$

Для уравнения Гаммерштейна с невырожденным ядром, можно подобрать вырожденное ядро, которое на интервале интегрирования будет достаточно точно аппроксимировать невырожденное. В этом случае решение интегрального уравнения с вырожденным ядром можно рассматривать как приближенное решение интегрального уравнения с невырожденным ядром.

Литература

1. Краснов М.Л. Интегральные уравнения (Введение в теорию)/Главная редакция физико-математической литературы. – М.: Наука,1975.
2. Краснов М. Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Интегральные уравнения. Задачи и решения. – М.: Наука, 1976.
3. Полушин П.А., Архипов Е.А. Интегральные уравнения. Краткий курс лекций для магистров по направлению 552500. – Владимир, ВлГУ, 2003.
4. Корн. Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1970.
5. Маделунг Э. Математический аппарат физики – М.: Наука, 1978.