**АБДУЛГАЛИМОВ А.М.,
АДЕЕВА М.Г.**

ФИНАНСОВАЯ МАТЕМАТИКА

Учебное пособие

Махачкала – 2020 г.

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

ФГБОУ ВО
«Дагестанский государственный технический университет»

Кафедра информационных технологий и прикладной информатики в экономике

ФИНАНСОВАЯ МАТЕМАТИКА

Учебное пособие

Махачкала, 2020 г.

УДК 336.6(075.8)
ББК 65.261 я73

Абдулгалимов А.М., Адеева М.Г.
Финансовая математика: Учеб. пособие/ Под ред. А.М. Абдулгалимова - Махачкала, ДГТУ, 2020. – 94 с.: ил.

В учебном пособии излагаются краткие теоретические сведения по основным направлениям стандартного курса по финансовой математике, читаемого студентам профиля подготовки бакалавров «Прикладная информатика в экономике»: рассмотрены вопросы учета временного фактора в начислении процентов на денежные величины, финансовых операций по схемам простых и сложных процентов, начисления процентов по номинальной годовой процентной ставке, математического дисконтирования и банковского учета, эквивалентности и эффективности процентных ставок, потоков платежей, определения параметров постоянных рент постнумерандо по сложной процентной ставке, оценки инвестиционных проектов, учета инфляции в финансовых операциях. Значительное внимание уделяется методическим примерам и индивидуальным заданиям к выполнению лабораторных работ и практических занятий.

Учебное пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлению подготовки бакалавров 09.03.03 – «Прикладная информатика», профиль «Прикладная информатика в экономике». В результате его изучения студент будет иметь определенное представление о финансово-кредитных операциях, с которыми человек будет сталкиваться в повседневной жизни.

Рецензенты:

1. **Рабаданов А.Р.,** профессор кафедры финансов и бухгалтерского учета ФГБОУ ВО «Дагестанский государственный технический университет», д.э.н., профессор;
2. **Джабраилов Х.С.,** директор ООО «Информационно-внедренческий центр «Сигма», к.э.н.

Регистрационный номер_______

Печатается по решению Ученого совета Дагестанского государственного технического университета. Протокол №___ от «______» __________________2020 г.

ВВЕДЕНИЕ

Необходимость в изучении и овладении населения методами расчетов финансовых операций в современной России – это объективная реальность. Поэтому обучение студентов в этом направлении, тем более занимающихся информационными системами в экономике, является актуальной задачей. С этой точки зрения данное учебное пособие актуально и имеет практическое значение.

В любых кредитно-финансовых операциях расчет сумм денег практически всегда связывается с конкретными моментами времени (датами). Причем фактор времени играет не меньшую роль, чем размеры денежных сумм, и поэтому в контрактах обязательно фиксируются сроки, даты, периодичность поступлений денежных средств или их выплат. Необходимость учета этого фактора определяется сущностью самого процесса финансирования и кредитования и связана с постулатом неравноценности денег в разные моменты времени. Этот постулат верен даже при отсутствии инфляции, поскольку в любой момент есть организации или частные лица (заемщики), нуждающиеся в кредитах на тот или иной период и готовые платить за такой заем (ссуду) определенную сумму, называемую процентами.

Постулат неравноценности денег, связанный с временем ставит под сомнение правомерность операции суммирования денежных величин, относящихся к разным моментам времени, особенно при экономическом анализе и управлении финансами на длительные периоды.

Фактор времени в финансовой сфере учитывается с помощью процентной ставки как отношения суммы процентных денег, выплачиваемой за фиксированный отрезок времени, к величине ссуды.

Другой фактор, влияющий на предпочтения, - неопределенность будущего и связанный с нею риск. Деньги в «кармане» могут быть израсходованы на потребление сиюминутно. Сберегаемые же деньги подвержены всевозможным рискам в зависимости от способа сбережения. Если они хранятся на домашнем «депозите», например, по матрацем, им грозит обесценение из-за инфляции или кончины их владельца.

В случае, когда деньги даются в долг, риск невозврата зависит от успешности кредитуемого мероприятия, которое может завершиться и полным крахом, убытками. Поэтому возвращаемая сумма всегда должна быть больше заемной как с учетом срока ссуды, так и существующего риска потерь.

Основной целью данного учебного пособия по дисциплине «Финансовая математика» является обучение студентов методам количественного анализа финансовых операций, касающихся интересов взаимодействующих хозяйствующих субъектов.

Овладение методикой «Финансовой математики» позволяет формировать у студента аналитическое мышление, умения и навыки по использованию полученных знаний для объективной оценки складывающихся ситуаций в кредитно-финансовой сфере; обоснованию и выработке оптимальных управленческих решений в этой области.

Учебное пособие состоит из 8 глав и 5 лабораторных работ. Оно является полезным и при проведении практических занятий и выполнении лабораторных работ.

Авторы с благодарностью примут все предложения и критические замечания, которые можно направлять по адресу: ***367015, Республика Дагестан, г. Махачкала, пр-т И. Шамиля, дом 70а. Кафедра информационных технологий и прикладной информатики в экономике Дагестанского государственного технического университета.***

ГЛАВА 1
ВВЕДЕНИЕ В ФИНАНСОВУЮ МАТЕМАТИКУ

§1.1. Понятия «Финансы» и «Финансовая математика», цель курса «Финансовая математика»

В современной экономической науке термин "финансы" (фр. - "finances") в научный оборот ввел французский ученый Ж. Боден в своей известной работе "Шесть книг о республике" (1577 г.), с которой по общепризнанному мнению связывается зарождение теории финансов, т.е. финансовой науки.

Финансы (франц. finances – денежные средства, от старофранц. finer – платить, оплачивать), совокупность экономических отношений в процессе создания и использования централизованных и децентрализованных фондов денежных средств; возникли в условиях регулярного товарно-денежного обмена в связи с развитием государства и его потребностей в ресурсах.

Научная дисциплина «**Финансы»** изучает деньги и социально-экономические отношения, связанные с формированием, распределением и использованием материальных ресурсов. Финансы — это прикладная экономическая дисциплина.

Традиционно финансы разделяют на публичные и частные. К первой группе относятся: государственные финансы и муниципальные финансы (местные финансы). Во второй группе выделяют:

1. личные финансы и семейные финансы;
2. финансы малого бизнеса, корпоративные финансы (финансы предприятий, финансы бизнеса), финансы банков (банковское дело), финансы некоммерческих организаций.

Финансовая математика - это раздел прикладной математики, имеющий дело с математическими задачами, связанными с финансовыми расчётами.

Основные направления:

- классическая финансовая математика или математика кредита (проведение процентных расчётов; вопросы, связанные с различными долговыми инструментами: векселями, депозитными сертификатами, облигациями; анализ потоков платежей, применяемый в банковском деле, кредитовании, инвестировании);
- стохастическая финансовая математика, включающая расчёты в условиях риска и неопределенности;
- проведение актуарных расчётов (составляющих математическую основу страхования)
- эконометрические расчёты, связанные с прогнозированием поведения финансовых рынков

Цель курса «Финансовая математика» заключается в обучении студентов применению математических методов и моделей для объективной оценки последствий принимаемых решений в сфере финансово-экономических операций, а также лучшему пониманию ими мотивов поведения фирм и механизмов функционирования рынка капиталов.

§1.2. Об истории развития «Финансовой математики» как учебной дисциплины

Как учебная дисциплина «Финансовая математика» берет свое начало во второй половине XVIII-го века. Судя по некоторым публикациям первое в мире коммерческое училище было основано в 1772 году в Москве, на средства П.А.Демидова, внука выдающегося промышленника, сподвижника Петра I. Оно называлось «Воспитательное училище из купеческих детей для коммерции». Затем в 1804 году было создано на этой основе «Императорское Московское коммерческое училище», который в 1806 году был преобразован в «Практическую коммерческую академию», позже переименованную в «Императорскую практическую академию коммерческих наук», процветавшую до 1918 года.

В 1877 году преподаватель Московской Практической Академии Коммерческих Наук А.В. Прокофьев издал учебник «Коммерческая арифметика и торговые операции». Затем в 1910-1915 гг. П.М. Гончаров издает для коммерческих училищ серию популярных учебников: «Коммерческая арифметика», «Сборник задач по коммерческой арифметике» и другие.

В 1912 году был создан Московский Коммерческий Институт, который, в частности, готовил выпускников по специальностям счетоводство, коммерческая арифметика, страховые и банковские вычисления.

В процессе развития рыночных отношений «коммерческую арифметику», затем в «коммерческая математика», преобразовалась в «финансовую математику», как одну из составляющих «коммерческого дела» и «финансового менеджмента». Паралельно с развитием финансовой математики в России, она развивалась и в других европейских странах, а также в США.

К настоящему времени в России в сфере финансово-экономических расчетов значительный прогресс был достигнут благодаря работам по этой теме Г.П. Башарина, Е.С. Стояновой, Г.Б. Поляка, В.И.Малыхина, В.В. Капитоненко, В.А. Колемаева, А.В. Бухвалова, А.В. Идельсона, О.Ю. Ситниковой, Я.С. Мелкумова, Е.М. Четыркина, А.Н.Ширяева и др.

§1.3. Время и неопределенность как влияющие факторы на финансовые операции

В любых финансовых операциях расчет сумм денег практически всегда связывается с конкретными моментами времени (датами). Причем фактор времени играет не меньшую роль, чем размеры денежных сумм, и поэтому в контрактах обязательно фиксируются сроки, даты, периодичность поступлений денежных средств или их выплат. Необходимость учета этого фактора определяется сущностью самого процесса финансирования и кредитования и связана с постулатом неравноценности денег в разные моменты времени. Этот постулат верен даже при отсутствии инфляции, поскольку в любой момент есть организации или частные лица (заемщики), нуждающиеся в кредитах на тот или иной период и готовые платить за такой заем (ссуду) определенную сумму, называемую процентами.

Постулат неравноценности денег, связанный с временем ставит под сомнение правомерность операции суммирования денежных величин, относящихся к разным моментам времени, особенно при экономическом анализе и управлении финансами на длительные периоды.

Фактор времени в финансовой сфере учитывается с помощью процентной ставки как отношения суммы процентных денег, выплачиваемой за фиксированный отрезок времени, к величине ссуды.

Другой фактор, влияющий на предпочтения, - неопределенность будущего и связанный с нею риск. Деньги в «кармане» могут быть израсходованы на потребление сиюминутно. Сберегаемые же деньги подвержены всевозможным рискам в зависимости от способа сбережения. Если они хранятся на домашнем «депозите», например, под матрацем, им грозит обесценение из-за инфляции или кончины их владельца.

В случае, когда деньги даются в долг, риск невозврата зависит от успешности кредитуемого мероприятия, которое может завершиться и полным крахом, убытками. Поэтому возвращаемая сумма всегда должна быть больше заемной как с учетом срока ссуды, так и существующего риска потерь.

§1.4. Проценты и виды процентных ставок

Проценты

Под процентными деньгами или, кратко, процентами (interest), понимают абсолютную величину дохода от предоставления денег в долг в любой его форме: выдача ссуды, продажа товара в кредит, помещение денег на депозитный счет, учет векселя, покупка сберегательного сертификата или облигации и т.д. Какой бы вид или происхождение ни имели проценты, это всегда конкретное проявление такой экономической категории, как ссудный процент. Практика получения процентов за выданные в долг деньги существовала задолго до нашей эры. Например, в Древней Греции взимали от

10 до 36 % суммы долга в год. В России, например. годовой рост на занятый капитал определялся в 40%.

При заключении финансового или кредитного соглашения стороны (кредитор и заемщик) договариваются о размере процентной ставки. Под процентной ставкой (rate of interest) понимается относительная величина дохода за фиксированный отрезок времени - отношение дохода (процентных денег) к сумме долга. Процентная ставка - один из важнейших элементов коммерческих, кредитных или инвестиционных контрактов. Она измеряется в виде десятичной или обыкновенной дроби (в последнем случае она фиксируется в контрактах с точностью до 1/16 или 1/32) или в процентах. При выполнении расчетов процентные ставки обычно измеряются в десятичных дробях.

Временной интервал, к которому приурочена процентная ставка, называют периодом начисления (running period), его не следует путать со сроком начисления. В качестве такого периода принимают год, полугодие, квартал, месяц или даже день. Чаще всего на практике имеют дело с годовыми ставками.

Проценты согласно договоренности между кредитором и заемщиком выплачиваются по мере их начисления или присоединяются к основной сумме долга (капитализация процентов). Процесс увеличения суммы денег во времени в связи с присоединением процентов называют наращением, или ростом, этой суммы. Возможно определение процентов и при движении во времени в обратном направлении - от будущего к настоящему. В этом случае сумма денег, относящаяся к будущему, уменьшается на величину соответствующего дисконта (скидки). Такой способ называют дисконтированием (сокращением).

Размер процентной ставки зависит от ряда как объективных, так и субъективных факторов, а именно: общего состояния экономики, в том числе денежно-кредитного рынка; кратковременных и долгосрочных ожиданий его динамики; вида сделки, ее валюты; срока кредита; особенностей заемщика (его надежности) и кредитора, истории их предыдущих отношений и т. д.

Виды процентных ставок и способы начисления процентов

Существуют различные способы начисления процентов, зависящие от условий контрактов. Соответственно применяют разные виды процентных ставок. Можно выделить ряд признаков, по которым различаются процентные ставки.

Для начисления процентов применяют постоянную базу начисления и последовательно изменяющуюся (за базу принимается сумма, полученная на предыдущем этапе наращения или дисконтирования). В первом случае используют простые, во втором - сложные процентные ставки, при применении которых проценты начисляются на проценты.

Важным является выбор принципа расчетов процентных денег. Существует два таких принципа: от настоящего к будущему и, наоборот, от будущего к настоящему. Соответственно применяют ставки наращения (interest base rate) и дисконтные, или учетные, ставки (discount base rate). В финансовой литературе проценты, полученные по ставке наращения, принято называть декурсивными, по учетной ставке - антисипативными. Далее декурсивные проценты будем называть просто процентами. Подробную характеристику упомянутых ставок отложим до параграфов, в которых будут обсуждаться конкретные методики их применения в финансовых расчетах.

Процентные ставки могут быть фиксированными (в контракте указываются их размеры) или плавающими (floating). В последнем случае указывается не сама ставка, а изменяющаяся во времени база (базовая ставка) и размер надбавки к ней – маржа. Классическим примером базовой ставки может служить лондонская межбанковская ставка ЛИБОР (LIBOR: London interbank offered rate). В России применяются базовые ставки по рублевым кредитам Московская межбанковская ставка предложения МИБОР (MIBOR: Moscow Interbank Offered Rate). Размер маржи определяется рядом условий, в частности финансовым положением заемщика, сроком кредита и т.д. Он может быть постоянным на протяжении срока ссудной операции или переменным.

Важное место в системе процентных ставок занимает ставка рефинансирования Центрального Банка России - ставка, по которой ЦБ выдает кредит коммерческим банкам.

Следует еще обратить внимание на то, что при последовательном погашении задолженности возможны два способа начисления процентов. Согласно первому способу процентная ставка (простая или сложная) применяется к фактической сумме долга. По второму способу простые проценты начисляются сразу на всю сумму долга без учета последовательного его погашения. Последний способ применяется в потребительском кредите и в некоторых других (правда, редких) случаях.

В практических расчетах применяют так называемые дискретные проценты, т.е. проценты, начисляемые за фиксированные интервалы времени (год, полугодие и т.д.). Иначе говоря, время рассматривается как дискретная переменная. В некоторых случаях - в доказательствах и аналитических финансовых расчетах, связанных с процессами, которые можно рассматривать как непрерывные, в общих теоретических разработках и значительно реже на практике - возникает необходимость в применении непрерывных процентов (continuous interest), когда наращение или дисконтирование производится непрерывно, за бесконечно малые промежутки времени. В подобных ситуациях применяют специальные непрерывные процентные ставки.

ГЛАВА 2
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ФИНАНСОВЫХ ОПЕРАЦИЙ ПО СХЕМАМ ПРОСТЫХ И СЛОЖНЫХ ПРОЦЕНТОВ

§2.1. Математическая модель финансовых операций по схеме простых процентов

Здесь и далее рассматриваются процессы в финансовой сфере без учета влияния на них факторов, имеющих вероятностный или неопределенный характер.

Фактор времени в финансовой сфере учитывается с помощью *процентной ставки* как отношения суммы процентных денег, выплачиваемой за фиксированный отрезок времени, к величине ссуды. Интервал, к которому приурочена процентная ставка, называют *периодом начисления.* Сумму процентных платежей определяют исходя из размера ссуды, общего ее срока и уровня процентной ставки. Начисление процентов чаще всего производится дискретно, а в некоторых случаях и в виде непрерывных процентов.

В условиях рыночной экономики существуют различные варианты инвестирования. В простейшем случае кредитор и заемщик договариваются о величине кредита ***P*** (первоначальная денежная сумма), размере годовой процентной ставки ***i%***, сроке кредита и длительности периода начисления процентов. Математическая модель такой финансовой операции может развиваться по разным схемам, например, по схеме простых процентов. По этой схеме происходит накопление общей суммы долга ***S*** за счет периодического, например, ежегодного начисления процентных денег $I_{\tilde{a}}$. В соответствии с этим в конце первого года наращенная сумма будет равна:

$$S_1 = P + I_{\tilde{a}};$$

к концу второго года:

$$S_2 = S_1 + I_{\tilde{a}} = P + 2I_{\tilde{a}};$$

к концу третьего года:

$$S_3 = S_2 + I_{\tilde{a}} = P + 3I_{\tilde{a}};$$

к концу n-го года:

$$S_n = P + nI_{\tilde{a}} \quad .$$

В этом случае накопление суммы происходит по схеме простых процентов и образует возрастающую числовую последовательность:

$$S_0, S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n \ ,$$

которая представляет собой арифметическую прогрессию с первым членом $a_0 = \mathbf{S_0} = P$ и разностью прогрессии:

$$d = S_2 - S_1 = I_{\tilde{a}} \ .$$

Таким образом, математической моделью, отображающей изменение капитала по схеме простых процентов, является арифметическая прогрессия, в соответствии с которой любой ее *n - ый* член находится по формуле:

$$S_n = a_0 + d \times n .$$

Процентная сумма определяется по формуле:

$$I = P \times \frac{i\%}{100\%} = P \times i \ ,$$

где $\boldsymbol{i}$ — относительная величина годовой ставки ссудного процента:

$$i = \frac{i\%}{100\%} .$$

На этом основании модель накопления капитала (наращенной суммы) по схеме простых процентов принимает вид:

$$S = P + nPi = P(1 + ni) . \qquad (2.1)$$

Параметр n может быть как целым, так и дробным положительным числом:

$$n = t / K \ ,$$

где $\boldsymbol{t}$ — продолжительность периода начисления процентов в днях,

$\boldsymbol{K}$ — количество дней в году (360, 365, 366).

Тогда приведенную модель можно записать в другом виде:

$$S = P(1 + i \times \frac{t}{K}) . \qquad (2.2)$$

Как видим, в этом случае проценты начисляются всегда от величины первоначальной суммы $\boldsymbol{P}$.

§2.2. Наращенная сумма на последовательных интервалах начисления простых процентов

Если на последовательных интервалах начисления процентов:

$$n_1, n_2, n_3, ..., n_m ,$$

устанавливаются разные ставки процентов:

$$i_1, i_2, i_3, ..., i_m ,$$

то сумма процентных денег составит в конце первого интервала:

$$I_1 = Pn_1 i_1,$$

в конце второго интервала:

$$I_2 = Pn_2 i_2,$$

в конце m-го интервала:

$$I_m = Pn_m i_m .$$

На этом основании можно записать, что за весь срок договора наращенная сумма будет равна:

$$S = P + I_1 + I_2 + I_3 + ... + I_m = P + Pn_1 i_1 + Pn_2 i_2 + Pn_3 i_3 + Pn_m i_m, \text{ т.е.}$$

$$S = P(1 + \sum_{j=1}^{m} n_j i_j) = P \times k_{í} .$$

Следовательно, коэффициент наращения равен:

$$k_{í} = 1 + \sum_{j=1}^{m} n_j i_j$$

В банковской практике различных стран срок в днях и расчетное количество дней в году при начислении процентов определяются по-разному. В германской практике подсчет числа дней основывается на длительности года в 360 дней и месяцев в 30 дней. В французской практике длительность года принимается равной 360 дням, а количество дней в месяце берется равным фактической календарной длительности 28, 29, 30 или 31 день соответственно. В английской практике длительность года — 365 дней, а длительность месяцев соответствует фактической длительности по календарю. А для удобства выполнения расчетов пользуются сквозной нумерацией всех дней в году.

§2.3. Показатели финансовой операции по схеме простых процентов

В зависимости от содержания поставленной задачи, пользуясь моделью (2.1) или (2.2), можно определять различные показатели операции:

1) величину первоначальной суммы (математическое дисконтирование):

$$P = \frac{S}{1+ni} = \frac{S}{1+i \times \frac{t}{K}};$$

2) относительную величину процентной ставки:

$$i = \frac{S-P}{P \times n} = \frac{S-P}{P} \times \frac{K}{t};$$

3) продолжительность года:

$$K = \frac{i \times P \times t}{S-P};$$

4) количество интервалов начисления (лет):

$$n = \frac{S-P}{i \times P};$$

5) период начисления процентов (дней):

$$t = K \times \frac{S-P}{P \times i};$$

6) коэффициент наращения по простой процентной ставке:

$$k_{н} = \frac{S}{P} = 1 + i \times n \quad \text{или}$$

$$k_{н} = 1 + i\,\frac{t}{K}.$$

§2.4. Математическая модель финансовых операций по схеме сложных процентов

В финансовых операциях используется схема сложных процентов, если начисляемый процент I (доход от капитала) суммируется с исходным капиталом P, и на следующем этапе процент начисляется уже от всей образовавшейся суммы $(P + I)$. Этот вариант иногда называют капитализацией или реинвестированием или «проценты на проценты». В этом случае сумма накопленного капитала составит:

к концу первого года

$$S_1 = P + Pi_c = P(1 + i_c),$$

где i_c — относительная величина годовой ставки сложных ссудных процентов;

к концу второго года:

$$S_2 = S_1 + S_1 i_c = S_1(1 + i_c) = P(1 + i_c)^2;$$

к концу третьего года:

$$S_3 = S_2(1 + i_c) = P(1 + i_c)^3;$$

к концу n-го года:

$$S_n = P(1 + i_c)^n = Pk_{нс},$$

где $k_{нс}$ - коэффициент наращения; $k_{нс} = (1 + i_c)^n$.

Таким образом, накопление капитала по схеме сложных процентов образует возрастающую числовую последовательность:

$$S_0, S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n,$$

которая представляет собой геометрическую прогрессию с первым членом $b_0 = S_0 = P$ и знаменателем $q = 1 + i_c$. В соответствии с этим можно записать формулу для определения любого ее члена:

$$S_n = b_0 q^n = P(1 + i_c)^n.$$

Таким образом, получена модель наращения по формуле сложных процентов:

$$S = P(1 + i_c)^n = P(1 + i_c)^{\frac{t}{K}} = Pk_{нс},$$

где t-срок контракта в днях; K- количество дней в году; $k_{нс}$ - коэффициент наращения.

§2.5. Показатели финансовой операции по схеме сложных процентов

Отсюда находим формулы для определения различных показателей финансовой операции:

- величина первоначальной суммы:

$$P = \frac{S}{(1+i_c)^n} = \frac{S}{(1+i_c)^{\frac{t}{K}}}$$

(математическое дисконтирование при начислении сложных процентов);

-относительная величина процентной ставки:

$$i_c = \sqrt[n]{\frac{S}{P}} - 1$$

(одна из наиболее применяемых формул, используется для нахождения так называемой эффективной ставки сложных процентов, характеризующей доходность финансовой операции);

- количество интервалов начисления (лет):

$$n = \frac{\ln\frac{S}{P}}{\ln(1+i_c)};$$

- период начисления процентов в днях:

$$t = K \times \frac{\ln\frac{S}{P}}{\ln(1+i_c)};$$

- продолжительность года в днях:

$$K = t \times \frac{\ln(1+i_c)}{\ln\frac{S}{P}}$$

- коэффициент наращения:

$$k_{\text{íñ}} = (1+i_c)^n = (1+i_c)^{\frac{t}{K}}.$$

§2.6. Наращенная сумма на последовательных интервалах начисления сложных процентов

Если на последовательных интервалах начисления процентов:

$$n_1, i_2, i_3, \ldots, i_m.$$

устанавливаются разные ставки процентов:

$$i_{c_1}, i_{c_2}, i_{c_3}, \ldots, i_{c_m},$$

то на протяжении всего срока контракта получим следующую математическую модель определения наращенной суммы по схеме сложных процентов:

наращенная сумма составит в конце первого интервала:

$$S_1 = P(1+i_{c_1})^{n_1},$$

в конце второго интервала:

$$S_2 = P(1+i_{c_2})^{n_2},$$

в конце m-го интервала:

$$S_m = P(1+i_{c_m})^{n_m}.$$

На этом основании можно записать, что за весь срок договора наращенная сумма будет равна:

$$S = S_1 + S_2 + ... + S_m = P(1+i_{c_1})^{n_1} + P(1+i_{c_2})^{n_2} + ... + P(1+i_{c_m})^{n_m}.$$

В свернутом виде это выражение можно записать в следующем виде:

$$S = P\prod_{k=1}^{m} P(1+i_{c_k})^{n_k}.$$

где: n_k - k - й интервал начисления процентов, k=1,2,…,m;

m - количество интервалов начисления;

$$K_{нс} = P\prod_{k=1}^{m} P(1+i_{c_k})^{n_k}.$$ - коэффициент наращения.

§ 2.7. Номинальная процентная ставка и непрерывные проценты

Номинальная процентная ставка. Начисление сложных процентов может осуществляться несколько раз в году: по месяцам, кварталам, полугодиям. В таких случаях указывается ставка на периоде, а наращенная сумма находится по формуле:

$$S = P(1+i_n)^N,$$

где: i_n - ставка на периоде начисления;

N - количество интервалов начисления в течение срока действия контракта.

В случае, когда начисление сложных процентов осуществляется через равные промежутки времени m, указывается так называемая *номинальная годовая процентная ставка* j *(nominal rate).* В этом случае проценты начисляются по ставке $\frac{j}{m}$ и пользуются следующей формулой:

$$S = P(1+\frac{j}{m})^{mn},$$

где: m - количество интервалов начисления за год;

n - срок контракта в годах;

$N = m$ x n — количество интервалов начисления за весь срок контракта.

Нетрудно догадаться, что чем чаще начисляются проценты, тем быстрее идет процесс наращения.

Непрерывные проценты. На практике применяется еще и непрерывное начисление процентов по номинальной годовой процентной ставке *j*. В этом случае вычисление наращенной суммы находят из следующего выражения:

$$S = P \lim_{m \to \infty} (1 + \frac{j}{m})^{mn}.$$

Затем при переходе к пределу при $m \to \infty$ используя известное выражение, так называемый второй замечательный предел:

$$\lim_{m \to \infty} (1 + \frac{1}{m})^{m} = e,$$

получим такое уравнение:

$$\lim_{m \to \infty} (1 + \frac{j}{m})^{mn} = e^{jn},$$

следовательно, для определения наращенной суммы имеем формулу:

$$S = Pe^{jn} = Pk_{нс},$$

где $k_{нс} = e^{jn}$ - коэффициент наращения при непрерывном начислении процентов по номинальной годовой ставке *j*. Эту номинальную годовую процентную ставку сложных процентов при $m \to +\infty$ называют *силой роста (force of interest и обозначают символом δ*. В таком случае наращенную сумму можно записать так:

$$S = Pe^{\delta n} = Pk_{нс}.$$

В этой формуле коэффициент наращения

$$k_{нс} = e^{\delta n}.$$

Сила роста характеризует относительный прирост наращенной суммы за бесконечно малый промежуток времени.

По приведенным выше моделям можно проводить вычисления различных показателей финансовых операций.

Замечание. В практических финансово-кредитных операциях непрерывное наращение, т.е. наращение за бесконечно малые отрезки времени, применяется крайне редко. Существенно большее значение непрерывное наращение имеет в анализе сложных финансовых проблем, например при обосновании и выборе инвестиционных решений, в финансовом проектировании. С 110- мощью непрерывных процентов удается учесть сложные закономерности процесса наращения, например использовать изменяющиеся по определенному закону процентные ставки.

§ 2.8. Примеры использования схем простых и сложных процентов

Пример схемы простых процентов.

Пример. Определить проценты и сумму накопленного долга, если ссуда равна 700 тыс.руб., срок 4 года, проценты простые по ставке 20% годовых (i = 0,2).

Решение. В данном случае P=700 тыс.руб., n=4 года, i = 0,2.

Используем формулу наращенной суммы в следующем виде:

$$S = P + Pni .$$

Тогда проценты (начисленные процентные деньги) $I = Pni$, т.е.

I = 700 х 4 х 0,2 = 560 тыс. руб.;

А сумма накопленного долга, т.е. наращенная сумма долга равна

$$S = P + Pni = 700 + 560 = 1260 \text{ тыс руб.}$$

Увеличим теперь ставку i в два раза. Сумма процентов при этом, естественно, удвоится. Однако наращенная сумма увеличится в

(1 + 2 х 4 х 0,2) / (1 + 4 х 0,2) = 1,444 раза.

Пример схемы сложных процентов.

Пример. Коммерческие банки С и D начисляют доход один раз в полгода, причем банк С по простой ставке, а банк D по сложной ставке процентов. Через год в этих банках средства инвестора увеличиваются на 60%. В какой банк выгоднее положить деньги на полгода, и в какой на полтора года?

Решение: По условию задачи число периодов начисления процентов n=2, так как один период начисления составляет полгода.

Используем для наращенной суммы формулы простых и сложных процентов соответственно:

$$S = P(1 + in)\,;\ S = P(1 + i_c)^n .$$

Так как через год в этих банках средства инвестора увеличиваются на 60%, то коэффициенты наращения банков С и D: $k_i = (1 + in)$ и $k_{нс} = (1 + i_c)^n$ соответственно равны между собой:

для банка С ставка простых процентов при n=2 определяется из выражения:

$$k_i = 1 + ni = 1 + 2i = 1{,}6\,; \qquad i = \frac{1{,}6 - 1}{2} = 0{,}3 = 30\%\,;$$

для банка D ставка сложных процентов при n=2 определяется из выражения:

$$k_{нс} = (1 + i_c)^2 = 1{,}6\,; \qquad i_c = \sqrt{1{,}6} - 1 = 0{,}265 = 26{,}5\% .$$

Отсюда видно, что наращенная сумма при n=1, что соответствует периоду в полгода, больше для простых процентов, поэтому выгоднее положить деньги на полгода в банк С.

На полтора года, т.е. при n=3 выгоднее положить деньги в банк D, поскольку $k_{НС}$ = 2,02 > k_i = 1,9.

ГЛАВА 3

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ОПЕРАЦИЙ ДИСКОНТИРОВАНИЯ

§ 3.1. Математическое дисконтирование

В кредитно-финансовой сфере часто сталкиваются с задачей, обратной наращению процентов: по заданной сумме S, которую следует уплатить через некоторое время *n,* необходимо определить сумму *P*, которую хотелось бы клиенту получить в виде ссуды в данный момент. Такая ситуация может возникнуть, например, при разработке условий контракта. Расчет *P* по *S* необходим и тогда, когда проценты с суммы *S* удерживаются вперед, т.е. непосредственно при выдаче кредита, ссуды. В таких случаях говорят, что сумма *S дисконтируется* или *учитывается,* сам процесс начисления процентов и их удержание называют *учетом,* а удержанные проценты - *дисконтом (discount).* Необходимость дисконтирования возникает, например, при покупке краткосрочных обязательств, оплата которых должником производится в будущем.

Величину *P***,** найденную с помощью дисконтирования, называют *современной стоимостью,* или *современной величиной (present value)* будущего платежа *S,* а иногда - *текущей,* или *капитализированной, стоимостью.*

В зависимости ·от вида процентной ставки применяют два метода дисконтирования - *математическое дисконтирование* и банковский *(коммерческий) учет.*

Дисконтирование связано с распространенным в коммерческой сфере утверждением «время - это тоже деньги», что обусловлено неравноценностью одинаковых по абсолютной величине сумм денежных средств сегодня и через некоторое время в будущем. Это объясняется, например, возможностью инвестировать капитал сегодня и в будущем получить доход. Кроме того, инфляционный процесс обесценивает денежную массу. Поэтому можно утверждать, что «деньги сегодня» ценнее «будущих денег». Именно поэтому «Золотое» правило бизнеса гласит: сумма, полученная сегодня, больше той же суммы, полученной завтра.

Дисконтирование позволяет учитывать в операциях фактор времени. Различают математическое дисконтирование и коммерческий, или банковский, учет

Математическое дисконтирование связано с определением так называемого «современного» или «приведенного» значения P на некоторый момент времени, которое соответствует заданному значению *S* в другой момент времени. Простейшая задача связана с определением суммы вклада P на основе заданной конечной величины в будущем S через временной период начислений ***n*** под заданную, например, простую ставку процентов:

$$P = \frac{S}{1+ni} = S \times k_Д ,$$

где $к_{д}$ — коэффициент дисконтирования (приведения) по простой ставке процентов,

$$k_{Д} = \frac{1}{1+ni}.$$

Дисконтированное значение будущей суммы вклада по сложной ставке процентов равно:

$$P = \frac{S}{(1+i_c)^n} = S \times k_{ДС},$$

где: $к_{дс}$ — коэффициент дисконтирования (приведения) по сложной ставке процентов

$$k_{ДС} = \frac{1}{(1+i_c)^n},$$

а по номинальной ставке процентов ***j*** при начислении процентов m раз в году:

$$P = \frac{S}{(1+\frac{j}{m})^{mn}}.$$

§ 3.2. Дисконтирование по платежу (банковский учет)

Банковский учет заключается в покупке денежных обязательств, например, векселя банком по цене, которая меньше номинальной указанной в нем суммы. В этом случае говорят, что вексель учитывается, и клиент получает сумму:

$$P = S - D,$$

где: S - номинальная сумма данного обязательства;

P - цена покупки векселя банком;

D - дисконт, сумма процентных денег (доход банка).

Процентный доход покупателя векселя (в данном случае банка) может определяться по простой годовой учетной ставке:

$$d\% = \frac{D}{S} \times 100\%.$$

Если срок n от даты учета до даты погашения будет составлять часть года, то дисконт определяется по формуле:

$$D = n \times d \times S = \frac{t}{K} \times d \times S,$$

где d — относительная величина простой учетной ставки.

Предъявителю учитываемого денежного обязательства будет выдана сумма:

$$P = S - D = S(1-nd) = S(1-\frac{t}{K} \times d).$$

Следует заметить, что дисконтирование может быть связано и с проведением кредитной операции. В таком случае проценты начисляются в начале интервала начисления, и заемщик получает сумму P за вычетом процентных денег D из суммы кредита *S*, подлежащего возврату. Поэтому при проведении операции по простой учетной ставке *d* следует пользоваться формулой:

$$S = \frac{P}{1 - nd}.$$

При проведении операции по сложной учетной ставке d_c используют формулу:

$$S = \frac{P}{(1 - d_c)^n},$$

где d_c — относительная величина сложной учетной ставки, откуда можно определить показатели операции:

$$n = \frac{\ln \frac{P}{S}}{\ln(1 - d_c)}; \qquad d_c = 1 - \sqrt[n]{\frac{P}{S}}.$$

Выгодность метода начисления процентов по учетной ставке для кредитора или заемщика зависит от величины процентной ставки и срока кредита.

§ 3.3. Номинальная годовая учетная ставка в операциях дисконтирования

В финансовых операциях дисконтирование может производиться не один раз в году, а m раз в году. В этом случае используется номинальная годовая учетная ставка f, по которой начисление процентов m раз в году производится по ставке f/m. В этом случае:

$$S = \frac{P}{(1 - \frac{f}{m})^{mn}}.$$

Отсюда находим следующие формулы расчета показателей операции:

$$n = \frac{\ln \frac{P}{S}}{m \ln\left(1 - \frac{f}{m}\right)}; \qquad f = m\left(1 - \sqrt[nm]{\frac{P}{S}}\right)$$

При непрерывном начислении процентов по номинальной годовой учетной ставке f справедливо соотношение:

$$S = \frac{P}{\lim\limits_{m \to \infty} \left(1 - \frac{f}{m}\right)^{nm}} = Pe^{fn},$$

из которого находим следующие формулы:

$$n = \frac{1}{f}\ln\frac{S}{P}; \qquad f = \frac{1}{n}\ln\frac{S}{P}.$$

§ 3.4. Примеры использования моделей операций дисконтирования

Пример 1. Финансовая компания выдает ссуду 15000 руб. на полгода по простой годовой процентной ставке d = 5%. Определить сумму, которую получит клиент, и доход компании.

Решение: S = 15000 руб.; d = 0,05; n = 0,5, тогда сумма, полученная клиентом, составит:

$$P = S\,(1 - nd) = 15000\,(1 - 0{,}5 \times 0{,}05) = 14625 \text{ руб.}$$

Доход финансовой компании определяется простым дисконтом, т.е. как процентный доход, вычитаемый из ссуды в момент ее выдачи:

$$D = ndS = 0{,}5 \times 0{,}05 \times 15000 = 375 \text{ руб.}$$

Пример 2. Переводной вексель (тратта) выдан на 100000 руб. с уплатой 12 ноября того же года. Владелец векселя учел его в банке досрочно — 12 сентября по простой учетной ставке 10%. Определить сумму, полученную владельцем векселя в банке, если число дней в году принять равным К = 360.

Вексель (тратта) – финансовый документ, составленный в строго упорядоченной форме, который содержит безусловный приказ кредитора (трассанта) заемщику (трассату) об уплате в оговоренный срок определенной суммы денег.

Переводной вексель - письменный приказ кредитора заемщику уплатить определенную сумму денег третьему лицу – предъявителю, именуемому ремитентом.

Решение: S = 10000 руб.; d = 0,1; t = 60 дней; K = 360.
Находим сумму, полученную владельцем векселя:

$$P = S - D = S(1 - nd) = S(1 - \frac{t}{K} \times d) = 100000(1 - 0{,}1\frac{60}{360}) = 98333{,}33 \text{ рубля}.$$

Пример 3. Дата погашения дисконтного векселя — 22 июля текущего года. Определить выкупную цену и дисконт на 2 июля векселя номиналом 100 млн. рублей, если вексельная ставка составляет 40% годовых, если число дней в году принять за 360.

Дисконтный вексель - банковский вексель, реализуемый ниже номинала, а погашаемый по номиналу.

Решение: S = 100 000000 руб.; d = 0,4; t = 20 дней; K = 360.

Определяем выкупную цену дисконтного векселя:

$$P = S - D = S(1 - nd) = S(1 - \frac{t}{K} \times d) = 100000000(1 - 0{,}4\frac{20}{360}) = 97777777{,}78 \text{ }\textit{рубля}.$$

Пример 4. Финансовая операция, связанная с покупкой и последующей продажей облигаций должна принести через 3 года прибыль в 100000 руб. Определить современную ценность этой суммы по сложной годовой учетной ставке d=30%.

Облига́ция *(лат. obligatio — обязательство; англ. bond — долгосрочная, note — краткосрочная) — эмиссионная долговая ценная бумага, владелец которой имеет право получить от эмитента облигации в оговоренный срок её номинальную стоимость деньгами или в виде иного имущественного эквивалента. Облигация может также предусматривать право владельца на получение фиксированного процента (купона) от её номинальной стоимости либо иные имущественные права.*

Решение: S = 100000 руб.; d_c= 0,3; n = 3, тогда современная ценность суммы прибыли:

$$P = S(1 - d_c)^n = 100000(1 - 0{,}3)^3 = 34300 \text{ }\textit{руб.}$$

ГЛАВА 4

ЭФФЕКТИВНАЯ И ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ПРОЦЕНТНЫЕ СТАВКИ

§ 4.1. Сравнение роста наращенной суммы по сложным и простым процентам

Для того чтобы сопоставить результаты наращения по разным процентным ставкам, достаточно сравнить соответствующие множители наращения. Нетрудно убедиться в том, что при одинаковых уровнях процентных ставок соотношения этих множителей существенно зависят от срока. В самом деле, при условии, что временная база для начисления процентов одна и та же, находим следующие соотношения:

— для срока меньше года простые проценты больше сложных:

$$(1+ni) > (1+i_c)^n \quad \text{при} \quad i = i_c \ ,$$

— для срока больше года сложные проценты больше простых:

$$(1+ni) < (1+i_c)^n \quad \text{при} \quad i = i_c \ ,$$

— для срока, равного году, множители наращения равны друг другу.

Заметим также, что при $n > 1$ с увеличением срока различие в последствиях применения простых и сложных процентов усиливается. Графическую иллюстрацию соотношения множителей наращения см. на рис. 4.1. В табл. 4.1 приведены значения множителей наращения для $i_c = i = 12\%$, K = 365 дней.

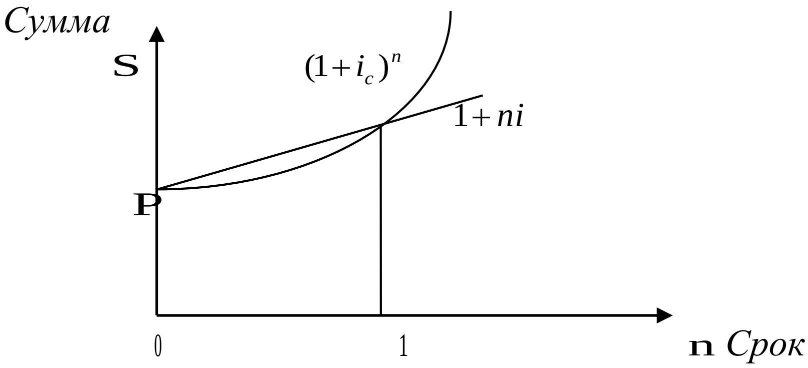

Рис. 4.1. Графическая иллюстрация множителей наращения

Таблица 4.1

Сравнение множителей наращения при i_c = i=12%

Множители наращения	**Срок ссуды**					
	30 дн.	180 дн.	1 год	5 лет	10 лет	100 лет
$1 + ni$	1,01644	1,05918	1,12	1,6	2,2	13
$(1 + i_c)^n$	1,00936	1,05748	1,12	1,76234	3,10584	83522,3

Формулы удвоения. Наиболее наглядно влияние вида ставки можно охарактеризовать, сопоставляя числа лет, необходимые для удвоения первоначальной суммы.

На основе $S = P(1 + ni)$ и $S = P(1 + i_c)^n$ *при* $i = i_c$ получим следующие *формулы удвоения:*

— удвоение по простым процентам:

$$n = \frac{1}{i};$$

— удвоение по сложным процентам:

$$n = \frac{\ln 2}{\ln(1 + i_c)} = \frac{0{,}69315}{\ln(1 + i_c)}.$$

Пример 4.1. *Найти сроки удвоения наращенных сумм для* $i = i_c = 22{,}5\%$:

$$n = \frac{1}{0{,}225} = 4{,}44; \qquad n = \frac{\ln 2}{\ln(1{,}225)} = 3{,}04.$$

§ 4.2. Номинальная и эффективная ставка

Номинальная ставка. В современных условиях проценты капитализируются, как правило, не один, а несколько раз в году – по полугодиям, кварталам и т.д. Некоторые зарубежные коммерческие банки практикуют даже ежедневное начисление процентов. При начислении процентов несколько раз в году можно воспользоваться формулой сложных процентов $S = P(1 + i_c)^n$. Параметр n в этих условиях будет означать число периодов начисления, а под ставкой i_c следует понимать ставку за соответствующий период. Например, при поквартальном начислении процентов за 5 лет общее число периодов начисления составит 5 х 4 = 20. Множитель наращения по квартальной (сложной) ставке 8% равен в этом случае $1{,}08^{20} = 4{,}6609$. На практике, как правило, в контрактах обычно фиксируется не ставка за период начисления, а годовая ставка, одновременно указывается период начисления процентов. Например, «18% годовых с поквартальным начислением» процентов.

Пусть годовая ставка равна j, число периодов начисления в году - m. Каждый раз проценты начисляются по ставке j/m. Ставку j называют *номинальной (nominal rate).* Формулу наращения теперь можно представить следующим образом:

$$S = P\left(1 + \frac{j}{m}\right)^N,$$

где N — общее количество периодов начисления.

Если N целое число ($N = nm$), то в большинстве случаев для определения величины множителя наращения можно воспользоваться таблицей сложных процентов (табл. 2 Приложения). Например, при $j = 20\%$ и поквартальном начислении процентов *(m* = 4) в течение *n*=5 лет отыскиваем табличное значение множителя для *i*= 20/4 = 5% и N = 5 x 4 = 20; находим коэффициент наращения *q* = 2,653298.

Пример 4.2. Какой величины достигнет долг, равный 1 млн. руб., через 5 лет: 1) при росте наращенной суммы по сложной ставке 15,5 % годовых; 2) при начислении процентов поквартально?

Решение. *В первом случае долг равен:* $S = P(1+i_c)^n$, *т.е.* *S=1000000(1+0,155)*^{5} *=2055464,22 руб.*

Во втором случае N=20, j=i_c *, долг равен:* $S = P\left(1+\frac{j}{m}\right)^N$,

т.е. $S = 1000000\left(1+\frac{0{,}155}{4}\right)^{20} = 2139049{,}01$ *руб.*

Нетрудно догадаться, что чем чаще начисляются проценты, тем быстрее идет процесс наращения (цепной процесс).

Эффективная ставка. Введем теперь новое понятие — *действительная,* или *эффективная ставка процента (effective rate).* Эта ставка измеряет тот реальный относительный доход, который получают в целом за год. Иначе говоря, эффективная ставка — это годовая ставка сложных процентов, которая дает тот же результат, что и *m*-разовое начисление процентов по ставке *j/m*.

Обозначим эффективную ставку через $i_э$. По определению множители наращения по двум ставкам (эффективной и номинальной при *m*-разовом начислении) должны быть равны друг другу:

$$(1+i_э)^n = \left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}.$$

Из равенства множителей наращения следует

$$i_э = \left(1+\frac{j}{m}\right)^m - 1.$$

Эффективная ставка при $m > 1$ больше номинальной. Замена в договоре номинальной ставки *j* при *m*-разовом начислении процентов на эффективную ставку $i_э$ не изменяет финансовых обязательств участвующих сторон. *Обе ставки эквивалентны в финансовом отношении.* Отсюда, кстати, следует, что разные по величине номинальные ставки оказываются эквивалентными, если соответствующие им эффективные ставки имеют одну величину.

Пример 4.3. *Каков размер эффективной ставки, если номинальная ставка равна 25% при помесячном начислении процентов? Имеем*

$$i_э = \left(1+\frac{0{,}25}{12}\right)^{12} - 1 = 0{,}280732 .$$

Для участвующих в сделке сторон безразлично применить ставку 25% при помесячном начислении процентов или годовую (эффективную) ставку 28,0732%.

Для сокращения дальнейшей записи используем символ $j^{(m)}$ означающий размер номинальной ставки и количество начислений за год. Эквивалентная замена номинальной ставки имеет место только в том случае, когда удовлетворяется равенство

$$\left(1+\frac{j_1^{(m_1)}}{m_1}\right)^{m_1}=\left(1+\frac{j_2^{(m_2)}}{m_2}\right)^{m_2}.$$

Так как m может иметь целые значения, то удобнее определять значение новой ставки, задаваясь величиной m_2 :

$$j_2^{(m_2)}=m_2\left[\left(1+\frac{j_1^{(m_1)}}{m_1}\right)^{\frac{m_1}{m_2}}-1\right].$$

Пример 4.4. Определим номинальную ставку $j_2^{(4)}$, которая безубыточно заменит ставку $j_1^{(12)}=25\%$ в примере 4.3. Тогда получим:

$$j_2^{(4)}=4\left[\left(1+\frac{0{,}25}{12}\right)^{\frac{12}{4}}-1\right]=0{,}25524.$$

Таким образом, сокращение количества начислений потребует увеличения ставки с 25% до 25,524%.

§ 4.3. Эквивалентные процентные ставки

Как было показано ранее, для процедур наращения и дисконтирования могут применяться различные виды процентных ставок. Определим теперь те их значения, которые в конкретных условиях приводят к одинаковым финансовым результатам. Иначе говоря, замена одного вида ставки на другой при соблюдении принципа эквивалентности не изменяет финансовых отношений сторон в рамках одной операции. Для участвующих в сделке сторон в общем безразлично, какой вид ставки фигурирует в контракте. Такие ставки назовем *эквивалентными.*

Проблема эквивалентности ставок уже затрагивалась выше при определении эффективной ставки процента: сложная годовая ставка i_c эквивалентна ставке j при начислении процентов m раз в году. Рассмотрим теперь проблему эквивалентности ставок более полно и систематизированно. В принципе соотношение эквивалентности можно найти для любой пары различного вида ставок - простых и сложных, дискретных и непрерывных.

Формулы эквивалентности ставок во всех случаях получим, исходя из равенства взятых попарно множителей наращения. Приведем простой пример. Определим соотношение эквивалентности между простой и сложной ставками. Для этого приравняем друг к другу соответствующие множители наращения:

$$(1+ni)=(1+i_c)^n,$$

где i *и* i_c — ставки простых и сложных процентов.

Приведенное равенство предполагает, что начальные и наращенные суммы при применении двух видов ставок идентичны (см. рис. 4.2).

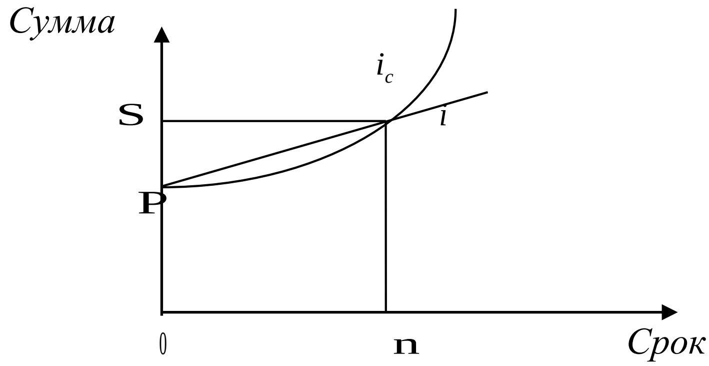

Рис. 4.2. Идентичность наращенных сумм.

Решение приведенного выше равенства дает следующие соотношения эквивалентности:

$$i=\frac{(1+i_c)^n-1}{n}, \tag{4.1}$$

$$i_c=\sqrt[n]{1+ni}-1. \tag{4.2}$$

Аналогичным образом определим и другие, приведенные ниже, соотношения эквивалентности ставок.

Эквивалентные ставки дают одинаковые наращенные суммы S при равных промежутках времени *n*. Для этих целей используют базовые модели вычисления наращенных сумм реальных процентных ставок:

Эквивалентность простой процентной и учетной ставок. При выводе искомых соотношений между ставкой процента и учетной ставкой следует иметь в виду, что при применении этих ставок используется временная база *К* = 360 или *К* = 365 дней.

Базовые модели вычисления наращенных сумм:

$$S=P(1+ni); \qquad S=\frac{P}{1-nd}.$$

Если временные базы одинаковы, то из равенства соответствующих множителей наращения следует:

$$i=\frac{d}{1-nd}, \qquad d=\frac{i}{1+ni}$$

где n - срок в годах, I - ставка простых процентов, d - простая учетная ставка.

Пример 4.5. *Вексель учтен за год до даты его погашения по учетной ставке 15%. Какова доходность учетной операции в виде процентной ставки? По формуле* $i=\frac{d}{1-nd}$ *находим* $i=\frac{0{,}15}{1-0{,}15}=0{,}17647$ *или 17,647%.*

Иначе говоря, операция учета по учетной ставке 15% за год дает тот же доход, что и наращение по ставке 17,647%.

§ 4.4. Эквивалентность простых и сложных ставок

Рассмотрим соотношения эквивалентности простых ставок *i* и *d*, с одной стороны, и сложных ставок i_c и *j*, с другой. Сложную учетную ставку здесь не будем принимать во внимание. Попарно приравняв друг к другу соответствующие множители наращения, получим набор искомых соотношений.

Эквивалентность i **и** i_c:

Формулы были получены выше (см. (4.3.1) и (4.3.2)).

Эквивалентность i и j:

Базовые модели вычисления наращенных сумм:

$$S=P(1+ni); \qquad S=P\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}.$$

Отсюда получаем:

$$i=\frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{mn}-1}{n}; \qquad j=m\left(\sqrt[mn]{(1+ni)}-1\right)$$

Эквивалентность d **и** i_c:

Базовые модели вычисления наращенных сумм:

$$S=\frac{P}{1-nd}; \qquad S=P(1+i_c)^n.$$

Отсюда получаем:

$$d = \frac{1-(1+i_c)^{-n}}{n}; \quad i_c = \sqrt[n]{1/(1-nd)} - 1.$$

***Эквивалентность** d **и** j:*

Базовые модели вычисления наращенных сумм:

$$S = \frac{P}{1-nd}; \qquad S = P(1+\frac{j}{m})^{mn}.$$

Отсюда получаем:

$$d = \frac{1-(1+\frac{j}{m})^{-mn}}{n}; \quad j = m(\sqrt[mn]{1/(1-nd)} - 1.$$

§ 4.5. Эквивалентность сложных ставок

Остановимся только на соотношениях эквивалентности для ставок i_c, j , f и d_c.

***Эквивалентность** d_c **и** i_c:*

Базовые модели вычисления наращенных сумм:

$$S = \frac{P}{(1-d_c)^n}; \qquad S = P(1+i_c)^n.$$

Отсюда получаем:

$$d_c = \frac{i_c}{1+i_c}; \qquad i_c = \frac{d}{1-d}.$$

***Эквивалентность** i_c **и** f:*

Базовые модели вычисления наращенных сумм:

$$S = P(1+i_c)^n; \qquad S = P(1-\frac{f}{m})^{-mn}.$$

Отсюда получаем:

$$i_c = (1-f/m)^{-m} - 1; \qquad f = m(1-\sqrt[m]{1/(1+i_c)}).$$

Эквивалентность i_c **и** j:

Базовые модели вычисления наращенных сумм:

$$S = P(1+i_c)^n; \qquad S = P(1+\frac{j}{m})^{mn}.$$

Отсюда получаем:

$$i_c = (1+j/m)^m - 1; \qquad j = m(\sqrt[m]{1+i_c} - 1).$$

<u>Примечание.</u> *Здесь мы не будем рассматривать все варианты эквивалентных процентных ставок, например , эквивалентность сложных дискретных и непрерывных ставок. Теоретически можно найти соотношение эквивалентности между непрерывной процентной ставкой (силой роста) и любой дискретной процентной ставкой. Однако в этом, как показывает практика, нет необходимости.*

ГЛАВА 5

МОДЕЛИ ФИНАНСОВЫХ ПОТОКОВ

§ 5.1. Виды потоков платежей и их основные параметры

Как правило, финансово-банковские операции часто предполагают не отдельные или разовые платежи, а множество распределенных во времени выплат и поступлений, например, погашение задолженности в рассрочку, периодическое поступление доходов от инвестиций, выплаты пенсии и т. д. Такого рода последовательность, или ряд платежей, называют *потоком платежей* (*cash flows stream* — буквально, потоки наличности). Отдельный элемент такого ряда платежей назовем *членом потока (cash flow).*

Классификация потоков. В практике встречаются разнообразные потоки платежей. Причем один и тот же вид потока может быть использован в анализе различных финансово-кредитных операций. Потоки платежей могут быть *регулярными* (размеры платежей постоянные или следуют установленному правилу, предусматривающему равные интервалы между платежами) и *нерегулярными.* Члены потоков могут быть как положительными (поступления), так и отрицательными величинами (выплаты).

Поток платежей, все члены которого - положительные величины, а временные интервалы между платежами одинаковы, называют *финансовой рентой,* или просто *рентой (rent).* Например, рентой является последовательность получения процентов по облигации, платежи по потребительскому кредиту, выплаты в рассрочку страховых премий и т.д. Иногда подобного рода поток платежей называют *аннуитетом (annuity),* что, строго говоря, применимо только к ежегодным выплатам.

Рента описывается следующими параметрами: *член ренты {rent)-* размер отдельного платежа, *период ренты (rent period, payment period)* - временной интервал между двумя последовательными платежами, *срок ренты (term)* - время от начала первого периода ренты до конца последнего, *процентная ставка.*

В практике применяют разные по своим условиям ренты. По количеству выплат членов ренты на протяжении года ренты делятся на *годовые* (выплата раз в году) и *m - срочные (m* - количество выплат в году). В анализе производственных инвестиций иногда применяют ренты с периодами, превышающими год. Перечисленные виды рент называют *дискретными.* В финансовой практике встречаются и с такими последовательностями платежей, которые производятся так часто, что их практически можно рассматривать как *непрерывные.*

По числу раз начислений процентов на протяжении года различают: ренты с ежегодным начислением, с начислением m раз в году, с непрерывным начислением. Моменты начисления процентов необязательно совпадают с моментами выплат членов ренты.

По величине своих членов ренты делятся на *постоянные* (с одинаковыми размерами членов ренты) и *переменные.* Постоянные ренты - наиболее распространенный вид ренты.

По вероятности выплат ренты делятся на *верные (annuity certain)* и *условные (contingent annuity).* Верные ренты подлежат безусловной уплате, например, при погашении кредита. Число членов такой ренты заранее известно. В свою очередь выплата условной ренты ставится в зависимость от наступления некоторого случайного события, число ее членов заранее неизвестно. К такого рода рентам относятся *страховые аннуитеты* — последовательные платежи в имущественном и личном страховании. Типичным примером страхового аннуитета является пожизненная выплата пенсии.

По количеству членов различают ренты с конечным числом членов, или *ограниченные* ренты (их срок заранее оговорен), и *бесконечные,* или *вечные* ренты *{perpetuity). С* вечной рентой встречаются на практике в ряде долгосрочных операций; когда предполагается, что период функционирования анализируемой системы или срок операции весьма продолжителен и не оговаривается конкретными датами. В качестве вечной ренты логично рассматривать и выплаты процентов по бессрочным облигационным займам.

По соотношению начала срока ренты и какого-либо момента времени, упреждающего начало ренты (например, начало действия контракта или даты его заключения), ренты делятся на *немедленные* и *отложенные,* или *отсроченные (deffered annuity).* Пример отсроченной ренты: погашение долга в рассрочку после льготного периода.

Очень важным является различие по моменту выплат платежей в пределах периода ренты. Если платежи осуществляются в конце этих периодов, то соответствующие ренты называют *обыкновенными,* или *постнумерандо (ordinary annuity),* если же платежи производятся в начале периодов, то их называют *пренумерандо (annuity due).* Иногда контракты предусматривают платежи или поступления денег в середине периодов.

Обобшающие параметры потоков платежей. В подавляющем числе практических случаев анализ потока платежей предполагает расчет одной из двух обобщающих характеристик: наращенной суммы или современной стоимости *потока. Наращенная сумма (amount of cashflows)* сумма всех членов потока платежей с начисленными на них к концу срока процентами. Под *современной стоимостью потока платежей (present value of cash flows)* понимают сумму всех его членов, дисконтированных на начало срока ренты или некоторый упреждающий момент времени.

Наращенная сумма может представлять собой общую сумму накопленной задолженности к концу срока, итоговый объем инвестиций, накопленный денежный резерв и т. д. В свою очередь современная стоимость заменяет всю *последующую* совокупность платежей, характеризует приведенные к началу осуществления проекта инвестиционные затраты, суммарный капитализированный доход или чистую приведенную прибыль от реализации проекта и т. п.

Обобщающие поток платежей характеристики, особенно его современная стоимость, широко применяются в различных финансовых расчетах. Так, без них, например, невозможно разработать план последовательного погашения задолженности, измерить финансовую эффективность проекта, осуществить сравнение или безубыточное изменение условий контрактов, решать многие другие практические задачи.

Прямой метод расчета наращенной суммы и современной стоимости потока платежей. Пусть имеется ряд платежей R_t, выплачиваемых спустя время n_t после некоторого начального момента времени. Общий срок выплат n лет. Необходимо определить наращенную на конец срока потока платежей сумму. Если проценты начисляются раз в году по сложной ставке i_c, то, обозначив искомую величину через S, получим по определению:

$$S = \sum_t R_t (1+i_c)^{n-n_t} . \qquad (5.1)$$

Современную стоимость такого потока также находим прямым счетом как сумму дисконтированных платежей:

$$A = \sum_t R_t v^{n_t} , \qquad (5.2)$$

где A - современная стоимость потока платежей, $v^{n_t} = (1+i_c)^{-n_t}$ - дисконтный множитель по ставке i_c.

Между величинами A и S существует функциональная зависимость. В самом деле, дисконтируем сумму S с помощью дисконтного множителя v^n, получим:

$$Sv^n = \sum_t R_t (1+i_c)^{n-n_t} \times v^n = \sum_t R_t v^{n_t} = A.$$

Отсюда следует, что наращивая сумму A по той же ставке, получим:

$$S = A(1+i_c)^n . \qquad (5.3)$$

§ 5.2. Наращенная сумма постоянной ренты постнумерандо по сложной процентной ставке

Годовая рента. Рассмотрим наиболее простой случай - годовая рента постнумерандо. Пусть в течение n лет в банк в конце каждого года вносится по R рублей. На взносы начисляются сложные проценты по ставке i_c % годовых. Таким образом, имеется рента, член которой равен R , а срок - n. Все члены ренты, кроме последнего, приносят проценты - на первый член проценты начисляются n-1 год, на второй n- 2 и т.д. На последний взнос проценты не начисляются (напомним, что рента постнумерандо). Наращенная к концу срока каждого взноса сумма составит:

$$R(1+i_c)^{n-1},\quad R(1+i_c)^{n-2},\quad \ldots\ ,\ R(1+i_c),\ R.$$

Перепишем этот ряд в обратном порядке. Нетрудно убедиться в том, что он представляет собой геометрическую прогрессию со знаменателем $(1+i_c)$ и первым членом *R*. Число членов прогрессии равно *n*. Искомая величина очевидно равна сумме членов этой прогрессии.

Откуда

$$S = R\frac{(1+i_c)^n - 1}{(1+i_c)-1} = R\frac{(1+i_c)^n - 1}{i_c}\ . \tag{5.4}$$

Обозначим множитель, на который умножается *R,* через $k_{n;i_c}$. В дальнейшем этот множитель будем называть *коэффициентом наращения ренты, т.е.*

$$\kappa_{n;i_c} = \frac{(1+i_c)^n - 1}{i_c}. \tag{5.5}$$

Таким образом

$$S = R\kappa_{n;i_c}\ . \tag{5.6}$$

Как видим, коэффициент наращения ренты зависит только от срока (числа членов ренты) и процентной ставки. С увеличением значения каждого из этих параметров его величина растет. При $i_c = 0$ имеем $S = Rn$ *(доказать самостоятельно).*

Годовая рента, начисление процентов m раз в год. В данном случае число членов ренты равно nm. Члены ренты с начисленными к концу срока процентами образуют убывающий ряд. Перепишем его в обратном порядке:

$$R,\quad R(1+{}^{j}\!/_{m})^{m},\quad R(1+{}^{j}\!/_{m})^{2m},\quad \ldots\ ,\ R(1+{}^{j}\!/_{m})^{(n-1)m}.$$

где j — номинальная ставка процентов.

Нетрудно убедиться, что и в этом случае мы имеем дело с возрастающей геометрической прогрессией. Первый член прогрессии равен R, знаменатель прогрессии равен $(1 + j/m)^m$. Сумма членов этой прогрессии составляет

$$S = R\frac{(1+j/m)^{mn} - 1}{(1+j/m)-1} = Rk_{mn;j/m}\ . \tag{5.7}$$

Рассмотрим теперь методы расчета наращенной суммы для вариантов *p*-срочной ренты постнумерандо при условии, что $m = 1$, $m = p$ и $m \neq p$.

Рента p-срочная *(m* **= 1*).*** Пусть рента выплачивается *p* раз в году равными суммами, процент начисляется один раз в конце года. Если годовая сумма платежей равна *R,* то каждый раз выплачивается *R/p.* Общее число членов ренты равно *np.* Последовательность членов ренты с начисленными процентами представляет собой геометрическую прогрессию. Первый член ее равен *R/p* , знаменатель - $(1 + i_c)^{1/p}$. Сумма членов этой прогрессии:

$$S=\frac{R}{p}\times\frac{(1+i_c)^{(1/p)np}-1}{(1+i_c)^{1/p}-1}=R\frac{(1+i_c)^n-1}{p[(1+i_c)^{1/p}-1]}=Rk_{n;i_c}^{(p)}. \qquad (5.8)$$

Рента p-срочная **(p** = ***m).*** На практике наиболее часто встречаются случай, когда число выплат в году равно числу начислений процентов: $p = m$. Для получения необходимой формулы воспользуемся (5.4), в которой i_c заменено на j/m , а вместо числа лет берется число периодов выплат ренты np, член ренты равен R/p. Поскольку $p = m$, то в итоге получим

$$S=\frac{R}{m}\times\frac{(1+j/m)^{mn}-1}{j/m}=R\frac{(1+j/m)^{mn}-1}{j}. \qquad (5.9)$$

Рента p-срочная *(p ≠ m).* Определим теперь наращенную сумму для наиболее общего случая — ***p* - срочная** рента с начислением процентов m раз в году. Общее количество членов ренты равно np, величина члена ренты R/p. Члены ренты с начисленными процентами образуют ряд, соответствующий геометрической прогрессии с первым членом R/p и знаменателем $(1 + + j/m)^{m/p}$. Сумма членов такой прогрессии составит

$$S=\frac{R}{p}\times\frac{(1+j/m)^{(m/p)np}-1}{(1+j/m)^{m/p}-1}=R\frac{(1+j/m)^{mn}-1}{p[(1+j/m)^{m/p}-1]}. \qquad (5.10)$$

§ 5.3. Современная стоимость постоянной ренты постнумерандо по сложной процентной ставке

Годовая рента. Напомним, что под современной стоимостью потока платежей понимают сумму дисконтированных членов этого потока на некоторый предшествующий момент времени. Вместо термина "современная стоимость" (современная величина) потока платежей в зависимости от контекста употребляют термины *капитализированная стоимость* или *приведенная величина.* Как было показано выше, современная стоимость потока платежей эквивалентна в финансовом смысле всем платежам, которые охватывает поток. В связи с этим данный показатель находит широкое применение в разнообразных финансовых расчетах (планирование погашения долгосрочных займов, реструктурирование долга, оценка и сравнение эффективности производственных инвестиций и т.д.). В общем виде метод определения современной величины потока платежей (метод прямого счета) рассмотрен в пункте 1настоящей лекции. Здесь же объектом анализа является постоянная финансовая рента постнумерандо.

Современная стоимость постоянной годовой ренты постнумерандо характеризуется членом ренты R, сроком ренты n, ежегодное дисконтирование, рента немедленная. В этих условиях дисконтированная величина первого платежа равна Rv, второго — Rv^2 , последнего — Rv^n. Как видим, эти величины образуют ряд, соответствующий геометрической прогрессии с первым членом Rv и знаменателем v. Обозначим сумму членов этой прогрессии через A. Тогда плучим:

$$A = R\sum_{t=1}^{n} v^t = Rv\frac{v^n-1}{v-1} = R\frac{1-v^n}{i_c} = R\frac{1-(1+i_c)^{-n}}{i_c} = Ra_{n;i_c}. \quad (5.11)$$

Множитель $a_{n;i_c}$, на который умножается *R*, называется *коэффициентом приведения ренты.* Этот коэффициент характеризует современную стоимость ренты с членом, равным 1.

Из формулы (5.11) следует, что чем выше значение i_c, тем меньше величина коэффициента $a_{n;i_c}$. Нетрудно показать *(доказать самостоятельно)*, что при $i_c = 0$

$$a_{n;i_c} = n. \quad (5.12)$$

При увеличении срока ренты величина коэффициента $a_{n;i_c}$ стремится к некоторому пределу. При $n \to \infty$ предельное значение коэффициента составит *(доказать самостоятельно):*

$$a_{\infty;i_c} = \frac{1}{i_c}. \quad (5.13)$$

Полученное выражение применяется при расчете современной стоимости вечной ренты.

График зависимости $a_{n\cdot j}$ от *n* показан на рис. 5.1.

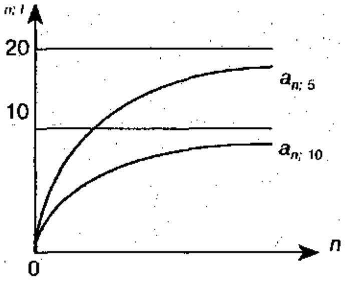

Рис. 5.1

Годовая рента, начисление процентов m раз в году. Заменим в формуле (5.11) дисконтный множитель $(1+i_c)^{-n}$ на эквивалентную величину $(1+j/m)^{-mn}$, соответственно, i_c заменим на $(1 + j/m)^m — 1$, после чего имеем:

$$A = R\frac{1-(1+j/m)^{-mn}}{(1+j/m)^m-1} = Ra_{mn;j/m}. \quad (5.14)$$

Рента p-срочная (m = 1). Если платежи производятся не один, а р раз в году, то коэффициенты приведения находятся так же, как это было сделано для годовой ренты. Только теперь размер платежа равен *R/p,* а число членов составит *np.* Сумма дисконтированных платежей в этом случае равна:

$$A = \frac{R}{p}\sum_{t=1}^{np} v^{t/p} = R \times \frac{1-(1+i_c)^{-n}}{p[(1+i_c)^{1/p}-1]} = Ra_{n;i_c}^{(p)} \;. \tag{5.15}$$

Рента p-срочная (p = m). Число членов ренты здесь равно числу начислений процентов; величина члена ренты составляет *R/m*. В этом случае современная стоимость постоянной ренты вычисляется по формуле:

$$A = \frac{R}{m} \times \frac{1-(1+j/m)^{-mn}}{j/m} = R\frac{1-(1+j/m)^{-mn}}{j} \;. \tag{5.16}$$

Рента p-срочная (*p* ≠ *m*). В этом случае сумма членов соответствующей геометрической прогрессии определяется следующим выражением (*доказать самостоятельно):*

$$A = R\frac{1-(1+j/m)^{-mn}}{p[(1+j/m)^{m/p}-1]} = Ra_{mn;j/m}^{(p)} \,. \tag{5.17}$$

§ 5.4. Определение параметров постоянных рент постнумерандо по сложной процентной ставке

Как показано выше, постоянная рента постнумерандо по сложной процентной ставке описывается набором основных параметров: R, n, i_c и дополнительными параметрами *p, m.* Однако при разработке контрактов и условий финансовых операций могут возникнуть случаи, когда задается одна из двух обобщающих характеристик: *S* или *A,* и необходимо рассчитать значение недостающего параметра.

Определение размера члена ренты. Исходные условия: задается *S* или *A* и набор параметров, кроме R. Например, за обусловленное число лет необходимо создать фонд в сумме *S* путем систематических постоянных взносов. Если рента годовая, постнумерандо, с ежегодным начислением процентов, то, обратившись к (5.6), получим:

$$R = \frac{S}{\kappa_{n;i_c}} \;. \tag{5.18}$$

Пусть теперь условиями договора задана современная стоимость ренты. Если рента годовая (m = 1), то из (5.11) следует:

$$R = \frac{A}{a_{n;i_c}} \;. \tag{5.19}$$

Аналогичным образом можно определить *R* и для других условий ренты.

Расчет срока ренты. При разработке условий контракта иногда возникает необходимость в определении срока ренты и, соответственно, числа членов ренты. Решая полученные выше выражения, определяющие S или A, относительно n, получим искомые величины. Так, для годовой ренты постнумерандо с ежегодным начислением процентов находим:

$$n = \frac{\ln\left(\frac{S}{R} i_c + 1\right)}{\ln(1+i_c)}; \qquad n = \frac{\ln\left(1 - \frac{A}{R} i_c\right)^{-1}}{\ln(1+i_c)}$$

Аналогичным образом определяются сроки и для других видов рент.

Все приведенные выше формулы для определения я, разумеется, пригодны и в случаях, когда заданными являются коэффициенты приведения или наращения рент, поскольку $a_{n;i_c} = A/R$, $\kappa_{n;i_c} = S/R$.

При расчете срока ренты необходимо принять во внимание следующие моменты.

1. Расчетные значения срока будут, как правило, дробные. В этих случаях для годовой ренты в качестве n часто удобно принять ближайшее целое число лет. У p-срочной ренты результат округляется до ближайшего целого числа периодов np. Например, пусть для квартальной ренты получено n = 6,28 лет, откуда np = 25,12 кварталов. Округляем до 25, в этом случае n = 6,25 лет.

2. Если округление расчетного срока производится до меньшего целого числа, то наращенная сумма или современная стоимость ренты с таким сроком оказывается меньше заданных размеров. Возникает необходимость в соответствующей компенсации. Например, если речь идет о погашении задолженности путем выплаты постоянной ренты, то компенсация может быть осуществлена соответствующим платежом в начале или конце срока, или с помощью повышения суммы члена ренты.

ГЛАВА 6

МОДЕЛИ ФИНАНСОВЫХ ОПЕРАЦИЙ С ОБЛИГАЦИЯМИ И АКЦИЯМИ

§ 6.1. Модели финансовых операций с облигациями

Облигация представляет собой долговую ценную бумагу, в соответствии с которой заемщик гарантирует кредитору выплату по истечении определенного срока полной суммы долга с процентами на определенную дату в будущем.

Эмитент выпускает облигации, на которых указаны их номинальная стоимость N и срок, по истечении которого облигации выкупаются (погашаются) эмитентом по номинальной стоимости.

Покупатель, приобретающий облигации по цене, меньшей номинала, предоставляет тем самым эмитенту ссуду и практически является кредитором. В таком случае покупатель получает доход, определяемый разностью между номиналом и ценой покупки облигации и называемый дисконтом. Если к облигации прилагаются купоны, то, например, ежегодно или ежеквартально ему выплачиваются проценты по указанной на них ставке. Это является дополнительным так называемым купонным доходом.

Целью операций с облигациями является использование одного из вариантов финансовых вложений для получения дохода и тем самым обеспечение защиты от обесценения капитала и его роста в условиях инфляции.

При расчете доходности покупки облигаций используют понятие курса, определяемого ценой облигации, выраженной в процентах от номинала:

$$P_k = \frac{P}{N}\cdot 100,$$

где P - цена облигации;

N - номинальная стоимость облигации.

Цена облигации при заданном курсе определяется по формуле

$$P = \frac{P_k \cdot N}{100} = 0{,}01 P_k N.$$

Если по облигациям выплачиваются проценты (ставка $i_{обл}$ годовых), то облигации называются процентными, а доход по каждой выплате определяется от ее номинальной стоимости:

$$I = i_{обл} \cdot N.$$

Если проценты по облигациям не выплачиваются, то источником дохода будет являться разность между ценой выкупа эмитентом (по номиналу) и ценой покупки, которая называется дисконтом, такие облигации называются дисконтными, например государственные краткосрочные обязательства (ГКО). Доход от этих облигаций находим как разность между номиналом и ценой покупки:

$$Д = N - P = N - \frac{P_k \cdot N}{100} = N(1 - 0{,}01 \cdot P_k).$$

Доходность облигаций к погашению можно определить по эквивалентной ставке простых процентов:

$$i_э = \frac{Д}{P \cdot n} = \frac{N - P}{P \cdot n} = \frac{100 - P_k}{P_k \cdot n} = \left(\frac{100 - P_k}{P_k}\right) \cdot \frac{K}{t},$$

де K – число дней в году;
t – число дней до погашения облигации;
n – число периодов (если облигация на несколько лет);

Доход от покупки долгосрочных облигаций с выплатой процентов будет состоять из суммы полученных процентов и разницы между ценой их погашения (номиналом) и ценой покупки.

Если проценты по облигациям выплачиваются в конце года, например, по ставке сложных процентов $i_с$, то сумма процентных денег при погашении облигации через n лет определяется по формуле

$$I = N(1 + i_c)^n - N = N\left[(1 - i_c)^n - 1\right];$$

общий доход -

$$Д = I + N - P = N(1 + i_c)^n - P = N\left[(1 + i_c)^n - \frac{P_k}{100}\right].$$

Замечание. Не путайте понятие дохода и доходности. Доход - это прибыль, выраженная в денежных единицах, разница между полученным и инвестируемым капиталом. Доходность - это доход, выраженный в процентах и скорректированный на время.

Доходность операции покупки-погашения облигации в виде эффективной ставки сложных процентов можно определить по формуле

$$S = P(1 + i_э)^n, \qquad Д = S - P = P[(1 + i_э)^n - 1].$$

На основе приведенных соотношений получим

$$i_э = \sqrt[n]{\frac{S}{P}} - 1 = \sqrt[n]{\frac{P + Д}{P}} - 1 = \frac{1 + i_c}{\sqrt[n]{\frac{P_k}{100}}} - 1.$$

При определении общего дохода следует учитывать возможность реинвестирования, если проценты выплачиваются периодически.

Пример 1. Курс облигаций номиналом 500 руб. составляет 75. Определите цену облигации.

Решение. $P_к = 75$; $N = 500$ руб.

Цена облигации равна:

$$P = \frac{P_k \cdot N}{100} = \frac{75 \cdot 500}{100} = 375 \text{ руб.}$$

Пример 2. Доход по облигациям номиналом 1000 руб. выплачивается каждые полгода по ставке 50% годовых. Вычислите сумму дохода по каждой выплате.

Решение. $N = 1\,000$ руб.; $I = 0,5$; $n = 0,5$.

Сумма дохода по каждой выплате:

$I = N \cdot n \cdot i = 1000 \cdot 0,5 \cdot 0,5 = 250$ руб.

Пример 3. Облигации номиналом 1000 руб. и со сроком обращения 90 дней продаются по курсу 85. Определите сумму дохода от покупки 5 облигаций и доходность финансовой операции при расчетном количестве дней в году 360.

Решение. $N = 1000$ руб.; $t = 90$ дн.; $K = 360$; $P_k = 85$.

Доход от покупки одной облигации при условии ее погашения составит

$$Д_1 = \left(N - \frac{P_k \cdot N}{100}\right) = N\left(1 - \frac{P_k}{100}\right) = 1000 \cdot \left(1 - \frac{85}{100}\right) = 150 \text{ руб.}$$

Сумма дохода от покупки 5 облигаций составит

$Д = 5 \cdot Д_1 = 5 \cdot 150 = 750$руб.

Доходность облигаций к погашению по эквивалентной ставке простых процентов:

$$i_э = \frac{N - P}{P} \cdot \frac{K}{t} = \frac{1000 - 850}{850} \cdot \frac{360}{90} = \frac{150}{850} \cdot 4 = \frac{60}{85} = 0,706 = 70,6\%.$$

Пример 4. Облигация куплена по курсу 95 и будет погашена через 10 лет. Проценты по облигации выплачиваются в конце срока по сложной ставке 5% годовых. Определите доходность приобретения облигации.

Решение. $P_k = 95$; $q = 0,05$; $n = 10$; $P = \frac{P_k \cdot N}{100} = 0,95N$.

Процентный доход за 10 лет составит

$I = N(1 + q)^n - N = N[(1 + q)^n - 1] = N[(1 + 0,05)^n - 1] = N[(1,05^{10} - 1) = 0,629N$;

доход от помещения облигации -

$Д_п = N(1 - 0,01P_k) = N(1 - 0,95) = 0,05N$;

общий доход -

$Д = I + Д_п = 0,629N + 0,05\,N = 0,679N$.

Доходность покупки облигации по эффективной ставке (сложных) процентов равна:

$$i = \sqrt[n]{\frac{Д + N}{N}} - 1 = \sqrt[10]{\frac{0,679N + N}{N}} - 1 = \sqrt[10]{1,679} - 1 = 1,053 - 1 = 0,053.$$

§ 6.2. Модели финансовых операций с акциями

Акция представляет собой долевую ценную бумагу, свидетельствующую о внесении определенной части в капитал акционерного общества, которая дает право на получение дохода и формальное участие в управлении предприятием. В зависимости от порядка начисления и выплаты дивидендов акции делят на привилегированные и обыкновенные.

Привилегированные акции – это акции, держатель которых имеет право получения фиксированного дивиденда, но не имеет права голоса.

Обыкновенные акции – это акции, приносящие доход в зависимости от полученной предприятием прибыли и дающие право голоса на собраниях акционеров.

Дивиденды (доход, выплачиваемый на одну акцию) по привилегированным акциям объявляются в фиксированных процентах ее номинальной стоимости и определяются по формуле:

$$D_1 = f \cdot N,$$

где f – годовая ставка дивиденда;

N – номинальная стоимость акции;

D_1 – дивиденды по одной привилегированной акции.

Доход на одну обыкновенную акцию

$$Д_0 = \frac{ЧП - D_{пр}}{M_0},$$

где M_0 – количество обыкновенных акций;

$D_{пр}$ – дивиденд по всем привилегированным акциям: $D_{пр}=M_{пр}*D_1$;

$M_{пр}$ – количество привилегированных акций;

$ЧП$ – чистая прибыль или ее часть по решению собрания акционеров.

Обычно на выплату дивидендов по обыкновенным акциям тратится не весь доход, а только его часть (по решению собрания акционеров), поэтому величина выплачиваемого дивиденда определяется дивидендным выходом.

Доходность по акциям определяется доходом от выплачиваемых дивидендов, а также разницей в цене покупки и продажи, что и определяет эффективность инвестиций.

$$Э = \frac{P_1 - P_a + D}{P_a} 100\ \%,$$

где P_a – цена покупки;

P_1 – цена продажи;

D – дивиденды за время владения акцией.

При анализе операций с акциями необходимо проводить расчеты по нескольким показателям, то есть различать разные виды доходности.

К таким показателям относятся: доходность текущая, без налогообложения, которая определяется по формуле:

$$r = \frac{D}{P_a} \cdot 100\ \%. \quad (1)$$

где P_a – курсовая стоимость акции, которая рассчитывается в сравнении с банковской депозитной ставкой (i %):

$$P_a = \frac{D_1}{i\ \%} \cdot 100\ \%.$$

Доходность конечная, которая определяется суммой дивидендов и дополнительным доходом от перепродажи (в пересчете на один год):

$$r = \frac{D + \frac{(P_1 - P_a)}{n}}{P_a} \cdot 100\ \%. \quad (2)$$

Пример5.

Инвестор приобрел акцию за 23 тыс. рублей. Номинал акции 20 тыс. рублей. По акции выплачивается фиксированный дивиденд 150 % годовых. Через 3 года инвестор продал ее за 20 тыс. рублей. Определить доходность на текущий момент для инвестора, доходность на текущий момент для покупателя и полную доходность.

Решение.

Используя приведенные выше формулы (1) и (2), получим:

доходность на текущий момент для инвестора:

$$r = \frac{20 \cdot 1{,}5}{23} 100\ \% \approx 130{,}4\ \%.$$

доходность на текущий момент для покупателя:

$$r = \frac{20 \cdot 1{,}5}{20} 100\ \% = 150\ \%.$$

Полная доходность в пересчете на один год:

$$r = \frac{20 \cdot 1{,}5 + \frac{(20 - 23)}{3}}{23} 100\ \% \approx 126{,}1\ \%.$$

Пользуясь приведенными моделями, можно сравнивать выгодность финансовых операций с акциями и, следовательно, решать задачу выбора инвестиционного проекта.

ГЛАВА 7

МЕТОДЫ ОЦЕНКИ ИНВЕСТИЦИОННЫХ ПРОЕКТОВ

§ 7.1. Метод расчета чистой текущей стоимости

При анализе и оценке инвестиционных проектов широко используются методы дисконтирования, основанные на логике сложных процентов. Поэтому
в рамках этой темы приводятся сущность и преимущества использования этих методов.

Чистая текущая стоимость (Net Present Value, NPV) рассчитывается как разность дисконтированных к одному моменту времени потоков доходов и расходов по проекту:

$$NPV = \sum_{t=0}^{n} \frac{CF_{IN_t} - CF_{OF_t}}{(1+r)^t}, \qquad (1)$$

где CF_{IN_t} (Cash Flow – денежный поток) - денежный приток за период t;

CF_{OF_t} - денежный отток за период t;

r — ставка дисконтирования;

n — жизненный цикл проекта.

В тех случаях, когда инвестиции представляют собой разовые вложения в начальный период, формула расчета NPV будет выглядеть следующим образом:

$$NPV = -C_0 + \sum_{t=1}^{n} \frac{CF_{IN_t}}{(1+r)^t}, \qquad (2)$$

где C_0 - капиталовложения в нулевой период.

Пользоваться данным критерием при принятии решений достаточно просто. Положительное значение *NPV* показывает ту величину дохода, которую инвестор получит сверх требуемого уровня. В том случае, когда *NPV* равна нулю, инвестор не только возвращает свой капитал, но и приращивает его на величину. Задаваемую ставкой дисконтирования. Полученное отрицательное значение *NPV* говорит о том, что проект следует отвергнуть.

Следует отметить, что показатель *NPV* аддитивен во времени. Данное свойство позволяет суммировать чистые текущие стоимости различных проектов, что является очень важным при анализе оптимальности инвестиционного портфеля.

§ 7.2. Метод расчета индекса рентабельности инвестиций

Индекс рентабельности *P1 (Profitability Index)* представляет собой отношение дисконтированных величин прибыли и затрат по проекту. То есть применительно, например, к разовым вложениям расчет производится по формуле:

$$PI = \frac{\sum_{t=1}^{n} \frac{CF_{IN_t}}{(1+r)^t}}{C_0}. \tag{3}$$

В том случае, когда значение *P1>1*, проект прибыльный. Если *P1<1*, то от инвестирования следует отказаться. Значение индекса рентабельности, равное единице, говорит о том, что проект и ни прибыльный, и ни убыточный.

Преимущество данного показателя от показателя *NPV* состоит в том, что он относительный. Поэтому им легко пользоваться, когда необходимо выбрать один проект из ряда альтернативных, имеющих примерно одинаковые значения *NPV*, а также при формировании портфеля инвестиций с максимальным суммарным значением *NPV*.

Такая задача возникает в том случае, когда на выбор имеется несколько привлекательных инвестиционных проектов, но из-за ограниченности в финансовых ресурсах инвестор не может участвовать во всех проектах одновременно. Тогда для каждого проекта рассчитывается *PI* и проекты ранжируются по убыванию *PI*. В инвестиционный портфель включаются первые *m* проектов, которые в сумме могут быть профинансированы в полном объеме. В случае, если очередной проект поддается дроблению, то он также включается в портфель в той его части, которая может быть профинансирована.

§ 7.3. Метод расчета нормы рентабельности инвестиций

Норма рентабельности IRR (Internal Rate of Return) представляет собой такое значение ставки дисконтирования, при котором чистая текущая стоимость проекта равняется нулю:

$$\sum_{t=0}^{n} \frac{CF_{IN_t} - CF_{OF_t}}{(1+IRR)^t} = 0, \tag{4}$$

где IRR — норма рентабельности (внутренняя норма доходности).

Значение *IRR* показывает максимально допустимый относительный уровень расходов, которые тем или иным образом могут быть связаны с рассматриваемым проектом. Так, например, если проект полностью финансируется за счет ссуды, то значение *IRR* покажет верхний предел банковской ставки процента, превышение которого сделает проект убыточным.

Для определения *IRR* используют либо расчетный, либо расчетно-- графический способы. В первом случае, ежегодные денежные потоки (с учетом необходимых вложений капитала) дисконтируются различными пробными ставками нормы дисконта с шагом в один процент. При этом будет получен ряд соответствующих чистых текущих стоимостей, наименьшая положительная величина из которых будет указывать на ту норму доходности, которую следует принять к расчету.

Применение расчетно-графического способа сводится к тому, что на системе координат по вертикальной оси откладываются нормы доходности, а по горизонтальной - чистые текущие стоимости. Затем рассчитываются два значения *NPV*, соответствующие двум любым ставкам нормы доходности. Между этими двумя точками проводится прямая, точка пересечения которой с вертикальной осью и является предполагаемой внутренней нормой доходности. Однако необходимо отметить, что полученное значение обязательно следует проверить на ноль, и сделать при необходимости корректировку.

§ 7.4. Метод определения дисконтированного срока окупаемости

Под дисконтированным сроком окупаемости понимается период времени, в течение которого инвестор полностью возвращает свои первоначальные затраты, обеспечивая при этом требуемый уровень доходности:

$$n = PP, \text{ при котором } \sum_{t=1}^{PP} \frac{CF_{IN_t}}{(1+r)^t} = PV, \tag{5}$$

где PP (Payback Period) – дисконтированный срок окупаемости;

PV (Present Value) – современная стоимость инвестиций.

Данный метод является одним из самых простых и широко распространенных, но, как правило, используется для получения дополнительной информации о проекте в тех случаях, когда главное, чтобы инвестиции окупились как можно скорее. Кроме того, метод удобен и при анализе проектов с высокой степенью риска, так как чем короче срок окупаемости, тем менее рискованным является проект.

§ 7.5. Учет инфляции при анализе проектов

Влияние инфляции можно учитывать, корректируя на ее индекс либо будущие поступления, либо ставку дисконтирования. При этом целесообразно использовать следующую зависимость:

$$1+r_{nom}=(1+\mathrm{r}_{real})(1+\lambda), \tag{6}$$

где r_{nom} — номинальная ставка процента;

r_{real} - реальная ставка процента;

λ - общий уровень инфляции.

При небольших значениях r и λ формулу (6) можно записать следующим образом:

$$r_{nom}\approx \mathrm{r}_{real}+\lambda\,. \tag{7}$$

В качестве ставки дисконтирования может использоваться как номинальная, так и реальная ставки процента. Выбор зависит от того, как измеряется денежный поток проекта. Если денежный поток представлен в реальном измерении (в постоянных ценах), то для дисконтирования следует использовать
реальную ставку процента.

$$NPV=\sum_{t=0}^{n}\frac{CF_t}{(1+r_{real})^t}. \tag{8}$$

Однако использование реальных ставок процента и расчет денежного потока в постоянных ценах не позволяет учесть структурную инфляцию. В таких случаях расчет необходимо осуществлять в текущих ценах. Правда в этом случае требуется умение прогнозировать рост цен:

$$NPV=\sum_{t=0}^{n}\frac{CF_t(1+\lambda)}{(1+r_{nom})^t}. \tag{9}$$

ГЛАВА 8

МОДЕЛИ ИНФЛЯЦИИ В ФИНАНСОВЫХ ОПЕРАЦИЯХ

§ 8.1. Понятия инфляции и потребительской корзины

Инфляция - обесценивание денег, вызванное превышением их количества в обращении над товарным обеспечением. Инфляция характеризуется обесценением национальной валюты, снижением ее покупательной способности и общим повышением цен в стране. При наличии инфляции инвестор может потерять часть дохода, а заемщик может выиграть за счет погашения задолженности деньгами сниженной покупательной способности. На этом основании необходимо установить количественные соотношения по определению влияния инфляции на показатели финансовой операции.

Следует заметить, что если наблюдается общее снижение цен, то происходит дефляция.

Все показатели финансовой операции можно разделить на две группы: номинальные, рассчитанные в текущих ценах, и реальные, учитывающие влияние инфляции, рассчитанные в сопоставимых ценах базового периода.

Для оценки упомянутых процессов формируют определенный набор товаров и услуг, называемый потребительской корзиной, и фиксируют изменения ее стоимости в различные моменты времени.

Состав потребительской корзины математически можно представить в виде n-мерного вектора товаров:

$$\vec{X} = (\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, ..., \mathrm{x}_n),$$

где x_i - количество i-го вида товара или услуги в корзине;

n- количество товаров и услуг потребительской корзины.

В базовом периоде t_0 цены состава потребительской корзины можно представить в виде n - мерного вектора:

$$\vec{P}_0 = (\mathrm{p}_1^0, \mathrm{p}_2^0, ..., \mathrm{p}_n^0),$$

а в анализируемом периоде t_1 соответственно вектором:

$$\vec{P}_1 = (\mathrm{p}_1^1, \mathrm{p}_2^1, ..., \mathrm{p}_n^1).$$

Тогда стоимость потребительской корзины описывается скалярным произведением векторов $\vec{P}$ и $\vec{X}$:

$$S = (\vec{P}, \vec{X}).$$

Стоимость потребительской корзины в базовом периоде t_0 составит:

$$S_0 = p_1^0 x_1 + p_2^0 x_2 + p_n^0 x_n = \sum_{i=1}^{n} p_i^0 x_i,$$

а в анализируемом периоде t_1 составит:

$$S_1 = p_1^1 x_1 + p_2^1 x_2 + p_n^1 x_n = \sum_{i=1}^{n} p_i^1 x_i.$$

§ 8.2. Индекс, уровень и темп инфляции

В силу сказанного выше полагают, что изменение (рост или падение) потребительских цен определяется безразмерным показателем, называемым индексом инфляции, который показывает во сколько раз выросли цены:

$$I_u = \frac{S_1}{S_0},$$

а относительная величина уровня инфляции есть темп инфляции:

$$\alpha = \alpha_{01} = \frac{S_1 - S_0}{S_0} = \frac{\Delta S}{S_0} = \mathrm{I}_u - 1,$$

откуда следует, что индекс инфляции равен:

$$\mathrm{I}_u = 1 + \alpha.$$

Уровень инфляции определяют в процентах:

$$\alpha\% = \frac{S_1 - S_0}{S_0} \times 100\%.$$

Индекс инфляции показывает, во сколько раз выросли цены, а уровень инфляции - на сколько процентов выросли цены за рассматриваемый период. При проведении исследования стоимость потребительской корзины фиксируется через, например, равные промежутки времени:

$$t_1, t_2, ..., t_n,$$

что можно записать таким образом:

$$S_1, S_2, ..., S_n.$$

Аналогично, для темпов инфляции на этих интервалах

$$\alpha_{01}, \alpha_{12}, ..., \alpha_{n-1n}.$$

Тогда можно записать следующие уравнения связи между числами ряда:

$$S_1 = S_0(1+\alpha_{01}), S_2 = S_1(1+\alpha_{12}), ..., S_n = S_{n-1}(1+\alpha_{n-1n}),$$

откуда после соответствующих подстановок получим:

$$S_n = S_0 \times \mathop{\Pi}_{i=1}^{n}(1+a_{i-1,i}).$$

Тогда индекс инфляции за весь период будет равен

$$I_u = \frac{S_n}{S_o} = \mathop{\Pi}_{i=1}^{n}(1+a_{i-1,i}).$$

Индекс инфляции связан с темпом инфляции выражением:

$$I_u = 1 + a,$$

откуда можно определить темп инфляции за весь период:

$$a = I_u - 1 = \mathop{\Pi}_{i=1}^{n}(1+a_{i-1,1}) - 1.$$

Следует заметить, что при равенстве значений темпов инфляции на всех интервалах:

$$I_u = \frac{S_n}{S_o} = \prod_{i=1}^{n}(1+a_{i-1,1}) = (1+a_{0,1})^n$$

Рассмотрим различные варианты начисления процентов с учетом инфляции.

§ 8.3. Начисление простых процентов с учетом инфляции

Для простых процентов обозначим i_a ставку процентов учитывающую инфляцию. Тогда для наращенной суммы имеем выражение:

$$S_a = P(1+ni_a).$$

Кроме того, если воспользоваться уравнением связи S_a с S через индекс инфляции:

$$S_a = S \times I_u = P(1+\mathrm{ni})\,\mathrm{I}_u,$$

то можно записать равенство

$$P(1+\mathrm{ni}_a) = \mathrm{P}(1+\mathrm{ni})\,\mathrm{I}_u,$$

откуда получим модель определения ставки простых процентов, учитывающей инфляцию:

$$i_a = \frac{(1+\mathrm{ni})\mathrm{I}_u - 1}{n} = \frac{(1+\mathrm{ni})(1+\alpha)-1}{n}.$$

Реальная доходность операции по ставке простых процентов при заданных i_a и I_u определяется по формуле:

$$i = \frac{\mathrm{ni}_a + 1 - \mathrm{I}_u}{n\mathrm{I}_u}.$$

§ 8.4. Начисление сложных процентов с учетом инфляции

Для сложных процентов аналогично запишем два выражения:

$$S_a = P(1+\mathrm{i}_c)^n \times \mathrm{I}_u,\; S_a = P(1+\mathrm{i}_{ca})^n,$$

из которых получим:

$$\mathrm{i}_{ca} = (1+\mathrm{i}_c)\sqrt[n]{\mathrm{I}_u} - 1.$$

Эту формулу можно записать так:

$$\mathrm{i}_c = \frac{1+\mathrm{i}_{ca}}{\sqrt[n]{\mathrm{I}_u}} - 1,$$

по которой можно сравнивать i_{ca} и α (больше, равно, меньше), проводить экономический анализ эффективности вложений и устанавливать, поглощается ли доход инфляцией или происходит реальный прирост вложенного капитала, а не убыток.

Приведенные модели позволяют проводить взаиморасчеты с клиентами по показателям в контрактах с учетом инфляции.

Пример. Определить ожидаемый уровень инфляции за год при ежемесячном уровне инфляции *6%*.

Решение: α% = 6%; α = 0,06; n = 12.

Индекс инфляции за год составит :

$$I_и = (1+\alpha)^n = (1+0,06)^{12} = 2,012,$$

Уровень инфляции за год составит:

$$\alpha = I_и - 1 = 2,012 - 1 = 1,012;$$

$$\alpha\% = 101,2\%.$$

ЛАБОРАТОРНЫЕ РАБОТЫ

Лабораторные работы посвящены схемам простых и сложных процентных ставок, операциям дисконтирования, потокам платежей и параметрам оценки инвестиционных проектов.

<u>Содержание отчета по лабораторной работе:</u>

1. Титульный лист (на обложке ученической тетради)
2. Название и номер лабораторной работы.
3. Постановка задачи.
4. Исходные данные.
5. Теоретические материалы по теме, рассматриваемой в лабораторной работе.
6. Описание хода выполнения работы.
7. Распечатки результатов расчетов в табличном редакторе MS Excel и/или на C++, C#.
8. Результаты выполнения работы.
9. Выводы и предложения.

Отчет по лабораторной работе студент оформляет в ученической тетради и защищает его перед преподавателем.

Лабораторная работа № 1

«Математические модели финансовых операций по схемам простых процентов»

(операции с вкладами и кредитами, инструментарий: C++, C#, MS Excel)

1.1. Простые проценты

В основе любой кредитной операции, т. е. передачи денег в долг заемщику от кредитора, лежит стремление получить доход. Абсолютная величина дохода, получаемого кредитором за передачу денег в долг, называется *процентными деньгами* или *процентами*. Происхождение этого названия связано **с** тем, что величина платы за кредит определяется обычно как соответствующий процент (в математическом смысле) от суммы кредита

Плата за кредит может взиматься как в конце срока кредита, так и в его начале (авансовый процентный доход). В первом случае проценты начисляются в конце срока исходя т величины предоставляемой суммы, и возврату подлежит сумма долга вместе с процентами. Такой способ начисления процентов называется *декурсивным.* Во втором случае процентный доход приходуется авансом (выплачивается в начале срока), при этом должнику выдается сумма, уменьшенная на его величину, а возврату в конце срока подлежит лишь исходная ссуда. Процентный доход, выплачиваемый таким образом, называется *дисконтом* (т. е. скидкой с суммы ссуды), а способ, начисления процентов—*антисипативными*.

В мировой практике декурсивный способ начисления процентов получил большее распространение, поэтому термин "декурсивный" обычно опускают, говоря просто о проценте или о ссудном проценте. При использовании же антисипативных процентов используют полное наименование.

Виды процентных ставок

Рассмотрим сначала декурсивный способ, когда проценты начисляются в конце срока кредита. С количественной стороны кредитная операция характеризуется следующим основным соотношением:

$$S=P+I, \tag{1.1.1}$$

где P - первоначальная сумма (сумма кредита); I- процентный доход - сумма платы за кредит; S - сумма, подлежащая возврату (полная стоимость кредита).

Сумма платы за кредит I обычно определяется в виде процента от суммы самого кредита - i_T :

$$i_T=\frac{I}{P}=(S-P)/P\cdot \tag{1.1.2}$$

Это отношение называется ставкой процентов, точнее, ставкой процентов за период T.

Временной период, в конце которого приходуется процентный доход, называют еще *периодом начисления процентов* (часто встречается термин «период конверсии»). Процентная ставка относится ко всему периоду действия кредитного соглашения.

Поскольку сроки кредитов меняются в широком диапазоне (от нескольких дней до десятков лет), то для сравнения условий различных кредитов процентную ставку задают по отношению к некоторому базовому периоду. Наиболее распространен годовой базовый период — в этом случае говорят о годовой процентной ставке. Если период конверсии совпадает с базовым, то годовая процентная ставка совпадает с *фактической* (1.1.2). Если же срок сделки имеет другую длительность, то годовая процентная ставка, служащая основой для определения процентной ставки за период (фактической процентной ставки), называется *номинальной*. Процентная ставка за период вычисляется по формуле:

$$i_T = iT, \tag{1.1.3}$$

где i - номинальная годовая процентная ставка; T - срок действия соглашения, по истечении которого кредит должен быть возвращен вместе с процентами.

Если период конверсии укладывается целое число раз в году, то ставка за период вычисляется по формуле:

$$i_T = i/m, \qquad (1.1.4)$$

где $T = 1/m$; m- число периодов начисления процентов в году, или частота начисления процентов.

Задание 1. 1.1

Кредит выдан под a % годовых сроком на b месяцев. Определить процентную ставку за срок кредитования.

№ варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	1	12	3	5	16	30	13	18	12	14
b	2	3	5	7	4	8	1 2	13	17	24
№ варианта	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
a	11	22	33	15	6	2	17	19	23	16
b	29	24	26	27	15	56	34	39	50	51
№ варианта	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
a	11	22	33	15	6	2	17	19	23	16
b	29	24	26	27	15	56	34	39	40	51

Если срок кредита определен в днях и равен n, то

$$t = n/K, \qquad (1.1.5)$$

где K - число дней в году, или временная база (365 или 366, если год високосный). Проценты, начисленные по формуле (1.1.5), называют *точными.*

В банковской практике различных стран расчетное число дней в году при начислении процентов определяется по-разному: в так называемой германской (коммерческой) практике расчет числа дней основывается на длительности года 360 дней, а месяцев - 30 дней; во французской - годовой период приравнивается также к 360 дням, а вот месячный - к их фактической продолжительности (28. 29, 30 и 31 день соответственно); в английской - продолжительность и года и месяцев берется точно по календарю.

Закон наращения по простой процентной ставке. Дисконтирование. Ббудущая и текущая стоимости денег.

Процентный доход по закону простых процентов вычисляется исходя из того, что номинальная процентная ставка не зависит от периода начисления процентов:

$$I = PiT. \qquad (1.1.6)$$

Сумму S также называют накопленным (наращенным) значением исходной суммы P. Используя формулы (1.1.1), (1.1.6) получим:

$$S = P(1+iT) \equiv Ps(T) \qquad (1.1.7)$$

где $s(T) = 1 + iT$ - множитель (коэффициент) наращения, или аккумулирующий множитель за период T.

Зная инвестированную сумму P и процентную ставку i, легко вычислить по формуле (1.1.7) значение S для произвольного срока кредитного соглашения. Множитель наращения не зависит от величины начальной суммы и показывает, во сколько раз вырос первоначальный капитал. Именно он характеризует доходность кредитной операции, позволяя определить, во что превратится единичная сумма к концу срока (или через любой промежуток времени T). В финансовой математике принято рассчитывать результаты финансовых операций для единичных сумм, умножая затем результат на первоначальную величину и получая значение наращенной суммы.

Задание 1.1.2

Определить проценты, множитель наращения и сумму накопленного долга, если ссуда равна a тыс. руб., срок долга - b месяцев, номинальная процентная ставка - c %.

№ варианта	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
a	1	12	3	5	16	30	13	18	12	14
Ь	2	3	5	7	4	8	12	13	17	24
c	2	3	5	7	4	13	12	13	17	24
№ варианта	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
a	11	22	33	15	6	2	17	19	23	16
b	2	3	5	7	4	8	12	13	17	24
c	29	24	26	27	15	56	34	39	60	51
№ варианта	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
a	11	20	31	16	62	22	37	49	52	44
b	3	4	6	8	5	9	13	14	15	25
c	27	24	36	23	26	45	64	39	69	52

При проработке различного рода финансовых операций нередко приходится решать обратную задачу: известно, какая сумма в будущем нужна для получения некоторого результата, искомой величиной является текущее ее значение. Иными словами, задача ставится так: какую сумму необходимо инвестировать сегодня, чтобы через определенный интервал времени получить заданное значение? В данной ситуации текущая стоимость денежной суммы является проекцией ее заданного будущего значения. Такое проецирование суммы из будущего в настоящее называют *дисконтированием*. Название термина происходит от слова «дисконт» - скидка с цены долгового обязательства при авансированной выплате процентов за пользование кредитом. Дисконтирование и наращение - взаимно обратные процессы. Формула дисконтирования по простой процентной ставке выглядит следующим образом:

$$P = \frac{S}{1+iT} \equiv S\nu_T, \tag{1.1.8}$$

где $\nu_T = 1/(1+iT)$ - дисконтный множитель за период *T*.

Задание 1.1.3

(сравнить с заданием 1.1.2.)

Определить сумму вклада, которую нужно положить в банк сроком на ***c*** месяцев под ***a*** % годовых, чтобы к концу срока получить ***b*** руб.

№ варианта	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
a	1	12	3	5	16	30	13	18	12	14
Ь	2	3	5	7	4	8	12	13	17	24
c	2	3	5	7	4	18	12	13	17	24
№ варианта	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
a	11	22	33	15	6	2	17	19	23	16
b	2	3	5	7	4	8	12	13	17	24
c	29	24	26	27	15	56	34	39	60	51
№ варианта	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
a	11	20	31	16	62	22	37	49	52	44
b	3	4	6	8	5	9	13	14	15	25
c	27	24	36	23	26	45	64	39	69	52

Термины «наращение» и «дисконтирование» употребляются и в более широком смысле, как средства определения любой стоимостной величины на некоторый произвольный момент времени вне зависимости от конкретного вида финансовой операции, предусматривающей начисление процентов. Такой расчет называют приведением стоимостного показателя к заданному моменту времени. Наращенная, или будущая, стоимость денежной суммы означает проекцию заданной в настоящий момент суммы на определенный интервал времени вперед, в будущее. Дисконтирование - проекцию суммы, заданной в некоторый момент времени в будущем, на определенный интервал времени назад, в настоящее.

Переменная процентная ставка.

Часто в течение срока действия кредитного соглашения процентная ставка изменяется. В этом случае проценты рассчитываются отдельно для каждого периода, в течение которого процентная ставка постоянна, а затем в конце срока кредитования рассчитанные для отдельных периодов проценты суммируются.

Задание 1.1.4

Клиент внес вклад в банк в сумме 100 тыс. руб. сроком на 1 год. Причем процентная ставка до середины второго квартала составляла ***a*** % годовых, далее до конца третьего квартала - ***b*** %, а с начала четвертого квартала - ***c*** %. Какую сумму клиент получил в конце года?

№ варианта	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
a	1	12	3	5	16	30	13	18	12	14
Ь	2	3	5	7	4	8	12	13	17	24
c	2	3	5	7	4	11	12	13	17	24

№ варианта	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
a	*11*	22	33	15	6	2	17	19	23	16
b	2	3	5	7	4	8	12	13	17	24
c	29	24	26	27	15	56	34	39	60	51
№ варианта	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
a	11	20	31	16	62	22	37	49	52	44
b	3	4	6	8	5	9	13	14	15	25
c	27	24	36	23	26	45	64	39	69	52

В общем виде при интервалах времени *N*, на каждом из которых будет меняться своя ставка процентов, начисленная сумма процентов за весь срок составит:

$$I = P\sum_{k=1}^{N} i_k t_k \ , \qquad (1.1.10)$$

где *к* - порядковый номер временного интервала; i_k , t_k- соответственно номинальная процентная ставка и длительность временного интервала (в годах).

Иногда в литературе встречается утверждение, что (1.1.10) есть сумма процентов, начисленных в каждом временном периоде. Однако, согласно схеме простых процентов, начисление и выплата процентов предполагаются лишь по истечении срока кредитного соглашения; их начисление и присоединение к сумме основного долга в пределах срока ссуды не предусмотрено. В связи с этим следует провести различие между расчетом и начислением процентов. *Расчет процентов* - это математическая операция по делению величины процентных денег за любой временной период, а также за весь срок кредитного соглашения. *Начисление* же *процентов* - это конкретная бухгалтерская операция, в результате которой плата за кредит должна быть либо перечислена кредитору, либо присоединена к сумме основного долга как в методе сложных процентов(см. параграф 1.2). Поэтому говорить о начислении процентов при изменении процентной ставки в пределах срока кредита некорректно, поскольку никаких бухгалтерских операций в этом случае не осуществляется; можно вести речь лишь о расчете процентов за тот или иной период.

Лабораторная работа № 2

«Математические модели финансовых операций по схемам сложных процентов»

(операции с вкладами и кредитами, инструментарий: C++, C#, MS Excel)

1.2. Сложные проценты

Закон наращения по сложной процентной ставке

Если проценты в конце каждого периода начисления не выплачиваются, а присоединяются к основной сумме и полученная величина становится исходной для начисления процентов в следующем периоде, то размер наращенной к концу срока суммы определяется по закону сложных процентов. Присоединение начисленных процентов к сумме, которая служила базой для их определения, называют *капитализацией* процентов. Начисление сложных процентов обычно применяют в случаях, когда проценты составляют заметную долю первоначальной суммы.

При наращении по сложной процентной ставке при ее фиксированном размере на весь срок кредитования изменение первоначальной суммы P происходит дискретно, скачками, в конце каждого периода начисления процентов. Так, в конце первого периода величина наращенной суммы $S_1 = P(1+i)$, в конце второго - $S_2 = P(1+i)^2$ и т. д. Таким образом, за весь срок кредитования основная сумма по закону сложных процентов составит:

$$S_n = P(1+i)^n, \quad I = S - P = P[(1+i)^n - 1], \qquad (1.2.1)$$

где n - количество периодов начисления процентов (если проценты капитализируются один раз в год, то n — число лет наращения).

Начисление сложных процентов по формуле (1.2.1) за весь срок кредита эквивалентно начислению простых процентов в каждом периоде с присоединением их к основной сумме в начале следующего периода, т. е. реинвестированию средств. В обоих случаях величина наращенной суммы будет одинаковой.

Задание 1.2.1

В какую сумму обратится долг в **10 тыс. руб.** через ***b*** лет при росте по годовой процентной ставке ***a*** % с ежегодной капитализацией процентов? Определить сумму процентов.

№ варианта	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
a	1	12	3	5	16	30	13	18	12	14
b	2	3	5	7	4	8	9	3	4	4
№ варианта	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
a	11	22	13	15	6	2	17	19	12	16
b	9	4	6	7	5	5	4	3	6	5
№ варианта	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
a	11	20	32	14	6	2	17	19	18	17
b	2	3	6	4	5	6	3	3	2	7

Начисление процентов несколько раз в год

Обычно в финансовых контрактах фиксируются годовая процентная ставка и периодичность начисления процентов: раз в полгода, ежеквартально, ежемесячно и т. д. Если период начисления процентов не равен году, то, как было сказано выше, годовая ставка называется номинальной, а процентная ставка за период начисления равна отношению номинальной ставки к числу периодов в году. Пусть срок контракта равен *T (в* годах), а проценты начисляются *m* раз в год. Тогда общее число периодов начисления за весь срок контракта составит *mT*, а наращенная сумма вычисляется по формуле:

$$S = P(1+i/m)^{mT} \equiv Ps(T) \equiv Ps^{T} , \qquad (1.2.2)$$

где $s=(1+i/m)^{m}$ - множитель наращения за год, или годовой множитель наращения.

Эта формула следует из (1.2.1) при замене *i* (ставки за период начисления процентов) на *i/m* (номинальную годовую ставку), деленную на число периодов начисления процентов в году, а *n* (числа периодов начисления процентов в годовом измерении) - на *mT* (общее число периодов начисления процентов).

Задание 1.2.2

Определить наращенную за 1 год сумму вклада в 10 тыс. руб., если номинальная годовая процентная ставка не зависит от числа. периодов начисления в году и составляет ***a*** % , а начисление процентов производится ***b*** раз в год.

№ варианта	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
a	1	12	3	5	16	30	13	18	12	14
b	2	3	5	7	4	8	9	3	4	4
№ варианта	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
a	11	22	13	15	6	2	17	19	12	16
b	9	4	6	7	5	5	4	3	6	5
№ варианта	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
a	11	20	32	14	6	2	17	19	18	17
b	2	3	6	4	5	6	3	3	2	7

При одной и той же номинальной процентной ставке, но разной частоте начисления процентов результаты отличаются: с увеличением количества начислений процентов в году абсолютный годовой доход возрастает. По этой причине номинальная процентная ставка не может служить универсальным измерителем эффективности финансовых операций.

Эффективная процентная ставка

Реальная доходность финансового контракта с начислением сложных процентов несколько раз в год измеряется *эффективной* процентной ставкой (годовой нормой доходности), которая показывает, какой относительный годовой доход был бы получен за год от начисления процентов. Иными словами, эффективная ставка дает возможность увидеть, какая годовая ставка простых процентов позволит достичь такого же финансового результата, что и m-разовое наращение в год по ставке *i/m*. При сроке контракта 1 год из формулы (1.2.2) имеем:

$$i_e = \frac{S-P}{P} = s-1 = (1+i/m)^m - 1, \qquad (1.2.3)$$

где i_e - эффективная процентная ставка.

Если период начисления процентов *T* не укладывается целое число раз в году, то эффективная ставка i_e определяется формулой:

$$i_e = (1+iT)^{\frac{1}{T}} - 1 \qquad (1.2.4)$$

Задание 1.2.3

Определить эффективные процентные ставки для вариантов задания 1.2.2.

Решить задачу используя функцию ЭФФЕКТ из блока «Финансовые функции» в диалоговом окне «Мастер функции» электронных таблиц MS Excel. Сравнить результат с аналитическими выкладками (расчет по соответствующим формулам)

Выполнение задания 1.2.3 покажет, что, несмотря на одну и ту же номинальную процентную ставку, эффективные ставки для различного количества периодов начисления процентов в году разные.

Два финансовых контракта считаются эквивалентными (имеющими одинаковую доходность), если соответствующие им эффективные ставки совпадают. По этой причине именно эффективная ставка служит основой для сравнения между собой различных контрактов и определения годовых номинальных ставок для периодов начисления процентов, отличных от года. Таким образом, несмотря на то, что в условиях конкретных финансовых контрактов фигурируют годовые номинальные ставки и частоты начисления процентов, их доходность определяется эффективной процентной ставкой. Совокупность эквивалентных номинальных годовых процентных ставок для контрактов с различной частотой начисления процентов (*m* раз в год), но с одинаковой доходностью (т. е. эффективной процентной ставкой i_e) задается формулой:

$$i^{(m)} = m(1+i_e)^{1/m} - m. \qquad (1.2.5)$$

Эту формулу легко получить из (1.2.3).

Если период начисления процентов T не укладывается целое число раз в году, то номинальная процентная ставка, эквивалентная эффективной ставке i_e, рассчитывается по формуле:

$$i^{(1/T)} = \frac{[(1+i_e)^T - 1]}{T} . \qquad (1.2.6)$$

Задание 1.2.4

Определить, какое помещение денег на срок ***а*** месяцев выгоднее:

а) под простую «лавку процентов в ***в*** % годовых;

б) под сложную ставку в ***с*** % годовых при ежеквартальном начислении процентов?

№ варианта	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
a	1	12	3	5	16	30	13	18	12	14
b	2	3	5	7	4	8	12	13	17	24
c	2	3	5	7	4	8	12	13	17	24
№ варианта	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
a	11	22	33	15	6	2	17	19	23	16
b	2	3	5	7	4	8	12	13	17	24
c	29	24	26	27	15	56	34	39	60	51
№ варианта	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
a	11	22	33	15	6	2	17	19	23	16
b	2	3	5	7	4	8	12	13	17	24
c	29	24	26	27	15	56	34	39	60	51

Непрерывное начисление процентов

Увеличение частоты начисления процентов при фиксированном значении номинальной годовой процентной ставки i приводит к росту годового множителя наращения (1.2.2), который при непрерывном начислении процентов $(m \to \infty)$ достигает своего предельного значения:

$$s = \lim(1+i/m)^m = e^i . \qquad (1.2.7)$$

Если же переходить ко все более частому начислению процентов при фиксированной годовой норме доходности, то эквивалентная ей номинальная ставка (при m-кратном начислении процентов) стремится к величине:

$$i^{(m)} = m[(1+i_e)^{1/m} - 1] \equiv m\{\exp[\ln(1+i_e)/m - 1\} \xrightarrow[m\to\infty]{} \ln(1+i_e) . \qquad (1.2.8)$$

Величина $\delta = \ln(1+i_e)$ называется *силой роста* или непрерывной процентной ставкой.

В дальнейшем, работая со сложными процентами, мы везде, где это не вызовет недоразумений, будем для простоты опускать индекс e у i_e, подразумевая, что используется эффективная процентная ставка.

Задание 1.2.5

При эффективной процентной ставке $i = a$ % найти номинальные процентные ставки, соответствующие начислению процентов: а) один раз в квартал; б) один раз в месяц; в) один раз в неделю; г) один раз в день; д) непрерывно.

Решить задачу используя функцию НОМИНАЛ из блока «Финансовые функции» в диалоговом окне «Мастер функции» электронных таблиц MS Excel. Сравнить результат с аналитическими выкладками (расчет по соответствующим формулам).

№ варианта	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
a	1	12	3	5	16	30	13	18	12	14
№ варианта	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
a	11	22	33	15	6	2	17	19	23	16
№ варианта	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
a	И	22	33	15	6	2	17	19	23	16

Приращение начальной суммы при непрерывной капитализации процентов будет происходить по закону:

$$S = Pe^{\delta i} = Ps^t, \qquad (1.2.9)$$

где

$$s = 1 + i = e^{\delta}.$$

Рост по простой и сложной непрерывным ставкам

Сравним характер роста единичной суммы по простой процентной ставке и по непрерывной ставке сложных процентов при одинаковой годовой норме доходности. Как видно из рис. 1.2.2, в пределах одного года ($0 < t < 1$) рост по непрерывной сложной процентной ставке происходит медленнее, чем по простой. При сроке же, превышающем год, он идет значительно быстрее.

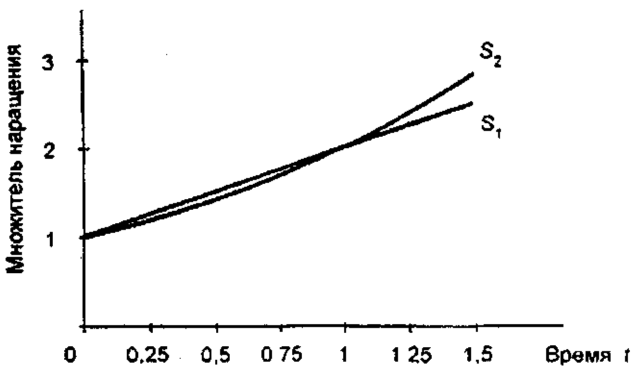

Рис. 1.2.2. Динамика наращения по простой (S_1) и сложной непрерывной (S_2) процентным ставкам (при i = 1)

Большинство коммерческих банков начисляют проценты не реже, чем один раз в год. Если срок кредитного соглашения превышает год, то используют два способа. Первый способ предполагает использование общей формулы (1.2.9), в которой время наращения t может быть произвольной нецелой величиной. Однако многие банки применяют приближенный метод, согласно которому множитель наращения за целое число лет n вычисляется по закону сложных процентов, а за оставшуюся дробную часть m года начисляются простые проценты:

$$s(t)=s^n(1+i\tau),\quad s=1+i,\ \tau=t-n. \qquad (1.2.10)$$

Приближенный способ более выгоден для кредитора, поскольку рассчитанная по этому методу величина процентов больше, чем при использовании точного метода.

Задание 1.2.6

Первоначальная сумма долга равна 100 тыс. Определить сумму S, подлежащую возврату, и сумму процентов $\boldsymbol{I}$ через $\boldsymbol{a}$ лет, используя точный и приближенный способы начисления процентов, исходя из процентной ставки $\boldsymbol{b}$ % за год.

№ варианта		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a		1	12	3	5	16	30	13	18	12	14
b		4	6	9	8	6	3	12	10	11	15
№ варианта		11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
a		5	10	15	2	5	7	8	12	16	18
b		8	9	10	11	12	5	6	18	20	3
№ варианта		21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
a		20	15	10	5	6	7	8	14	16	18
b		24	23	11	18	12	13	6	3	4	7

Переменная процентная ставка

Если уровень процентной ставки будет изменяться в течение срока контракта, то величина наращенной суммы определяется последовательным умножением первоначальной суммы на множители наращения в каждом периоде, где процентная ставка постоянна:

$$S=P\prod_{k=1}^{N}(1+i_kT_k)\ , \qquad (1.2.11)$$

где i_k , T_k — номинальная процентная ставка и длительность Аг-го временного интервала, где ставка постоянна; N — количество временных интервалов с различными процентными ставками.

Если заданы не номинальные, а эффективные процентные ставки, то имеем:

$$S=P\prod_{k=1}^{N}(1+i_{ek})^{T_k}\,. \qquad (1.2.12)$$

Задание 1.2.7

Клиент сделал вклад в банк в сумме 1 тыс. руб. под ***a*** % годовых сроком на 1 год. Процентная ставка в первом квартале составляла ***a*** % годовых, в середине второго квартала понизилась до ***b*** %, в начале четвертого квартала снова возросла до ***c*** %. Какую сумму клиент получил в конце года? (Данные задания 1.1.4 для наращения по простой процентной ставке.)

Решить задачу используя функцию БЗРАСПИС из блока «Финансовые функции» в диалоговом окне «Мастер функции» электронных таблиц Excel. Сравнить результат с аналитическими выкладками (расчет по соответствующим формулам на C++, C#).

Расчет ставок сложных процентов в электронных таблицах MS Excel

Блок "Финансовые функции" в диалоговом окне "Мастер функций" электронных таблиц MS Excel содержит набор наиболее употребительных в практике финансовых, расчетов программ, в том числе и программы расчета процентных ставок.

Функция **ЭФФЕКТ** при обращении к ней возвращает рассчитанное по формуле (1.2.3) значение эффективной процентной ставки, если задана годовая номинальная процентная ставка i и количество периодов наращения процентов за год m. Обращение к функции ЭФФЕКТ (номинальная ставка, кол_периодов). Процентная ставка задается либо в относительных величинах, либо в процентах (но тогда после числового значения вводится знак процентов, например 10%). При номинальной ставке 50% годовых и ежемесячном начислении процентов $(m = 12)$ имеем: ЭФФЕКТ (0,5, 12) = 0,63209.

Если задана эффективная процентная ставка, то величина соответствующей ей годовой номинальной процентной ставки рассчитывается по формуле (1.2.4) с помощью функции НОМИНАЛ. Обращение к функции: НОМИНАЛ (эффективная_ставка, кол периодов). При эффективной ставке 60% в год и ежемесячном начислении процентов ($T = 12$) получим: НОМИНАЛ (0,6, 12) = 0,479329.

Для расчета наращенной суммы при переменной процентной ставке используется функция **БЗРАСПИС.** Обращение к функции: БЗРАСПИС (основной_капитал, ставки). Основной капитал - это текущая стоимость инвестиций; ставки - это массив применяемых процентных ставок за периоды, когда ставка постоянна.

Обычно в качестве аргументов в финансовых функциях MS Excel фигурируют не числа, а адреса ячеек, где эти числа записаны. Это позволяет изменять исходные данные, не меняя программы.

Дисконтирование по сложной ставке процентов

Дисконтирование по сложной ставке процентов — процесс, обратный во времени процессу наращения (компаундинга) по сложной ставке процентов. Если при наращении изменение первоначальной суммы P происходит дискретно, скачками, в конце очередного периода начисления процентов, то процесс дисконтирования будущей суммы S также происходит скачкообразно, в обратном направлении, со скачком в конце очередного периода дисконтирования. В конце первого периода дисконтирования величина текущей стоимости суммы S равна $S/(1 + i_T)$, в конце второго периода — $S/(1+ i_T)^2$ и т. д. После n циклов дисконтирования текущая стоимость суммы S равна (сравнить с (1.2.1)):

$$P=\frac{S}{(1+i_T)^n}\equiv S(\nu_T)^n, \qquad (1.1.13)$$

где $\nu_T = 1/(1+i_T)$ - дисконтный множитель за период T.

При начислении процентов m раз в году дисконтный множитель за период равен: $\nu_{1,m} = 1/(1+i^{(m)}/m)$. По аналогии с процессом наращения вводится годовой дисконтный множитель ν, что позволяет записать выражение для текущей стоимости в следующем виде (сравнить с (1.2.2), (1.2.3), (1.2.9)):

$$P=\frac{S}{(1+i^{(m)}/m)^{mt}}\equiv P\nu^t \;; \quad \nu=\frac{1}{s}\equiv\frac{1}{(1+i^{(m)}/m)^m}\equiv\frac{1}{1+i_e}. \qquad (1.2.14)$$

Дисконтирование при непрерывном начислении процентов также описывается формулой (1.2.14), где время изменяется непрерывно, в отличие от дискретного начисления процентов m раз в год, когда время изменяется дискретно, с шагом $1/m$.

Задание 1.2.8

Определить текущую стоимость суммы S = 100 тыс. руб., подлежащей уплате через ***a*** года при использовании сложной процентной ставки ***b*** % годовых.

№ варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	1	12	3	5	16	30	13	18	12	14
b	4	6	9	8	6	3	12	10	11	15
№ варианта	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
a	5	10	15	2	5	7	8	12	16	18
b	8	9	10	11	12	5	6	18	20	3
№ варианта	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
a	20	15	10	5	6	7	8	14	16	18
b	24	23	11	18	12	13	6	3	4	7

Лабораторная работа № 3
«Математические модели операций дисконтирования»

*(*Расчет процентных и учетной ставок, инструментарий:

C++, C#, MS Excel)

1.3. Учетная процентная ставка. Учетная ставка

В банковской практике при учете (т. е. досрочной покупке) векселей и других денежных обязательств в расчетах исторически используется не ставка ссудных процентов, а так называемая *учетная* ставка. Учетная ставка связана с антисипативным способом начисления процентов, где плата за кредит, т. е. процентный доход, начисляется авансом при выдаче кредита. В этом случае должнику выдается сумма, уменьшенная на величину процентного дохода, а возврату в конце срока подлежит полная сумма долга.

Величина дисконта, скидки с суммы долга, D определяется как разница между суммой, подлежащей возврату - S, и первоначальной суммой ссуды - P. Отношение этих величин d_T называется учетной ставкой за период T:

$$d_T = D / S = (S - P) / S \,. \tag{1.3.1}$$

Обычно банки указывают годовую (номинальную) учетную ставку d, а учетная ставка за период времени T до погашения долга определяется по формуле

$$d_T = dT \,. \tag{1.3.2}$$

Тогда

$$P = S(1 - d_T) = S v_T \,, \tag{1.3.3}$$

где множитель $v_T = 1 - d_T = 1 - dT$ называется дисконтным множителем за период T по учетной ставке d.

Задание 1.3.1

Кредит выдается на полгода по годовой учетной ставке ***a*** %. Определить сумму, получаемую заемщиком, и величину дисконта, если сумма долга равна ***b*** тыс. руб.

№ варианта	1	**2**	3	4	5	6	**7**	8	9	10
a	**1**	12	3	**5**	16	30	13	18	12	14
b	2	3	5	7	4	8	12	13	17	24
№ варианта	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
a	11	22	33	15	6	2	17	19	23	16
b	29	24	26	27	15	56	34	39	60	51
№ варианта	21	22	23	24.	25	26	27	28	29	30
a	11	22	33	15	6	2	17	19	23	16
b	29	24	26	27	15	56	34	39	60	51

Задание 1.3.2

Владелец векселя на сумму ***a*** тыс. руб. учел его в банке за ***b*** месяца до срока погашения по годовой учетной ставке ***c*** %. Определить выкупную (учетную) стоимость векселя, т. е. сумму, которую получил владелец.

№ варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	**1**	12	3	5	16	30	13	18	12	14
b	2	3	**5**	7	4	8	12	13	17	24
c	2	3	5	7	4	**8**	12	13	17	24
№ варианта	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
a	11	22	33	15	6	2	17	19	23	16
b	2	3	**5**	7	4	8	12	13	17	24
c	**29**	24	26	27	15	56	34	39	60	51
№ варианта	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
a	11	22	33	15	6	2	17	19	23	16
b	2	3	5	7	4	8	12	13	17	24
c	29	24	26	27	15	56	34	39	60	51

Расчет стоимости ценных бумаг в электронных таблицах Excel

Для расчета стоимости векселя в Excel используется финансовая функция ЦЕНА-СКЦДКА.

Обращение к функции: ЦЕНА-СКИДКА (дата_соглашения, дата_вступтения_в_силу, скидка, погашение, базис).

Дата_соглашения - дата соглашения для ценных бумаг, выраженная как дата в числовом формате (дата покупки, учета).

Дата_вступпения_в_силу - дата вступления в силу ценных бумаг, выраженная как дата в числовом формате (дата погашения).

Скидка - норма скидки для ценных бумаг (годовая номинальная учетная ставка).

Погашение - цена при погашении (за 100 руб. нарицательной стоимости ценных бумаг).

Базис - тип используемого способа вычисления дня (если 0 или отсутствует,то длительность года принимается равной 360 дням).

Расчет производится по формуле (1.3.3), где время (в долях года) равно количеству дней от даты продажи до даты погашения, деленному на количество дней в году.

Даты продажи и погашения выражаются в числовом формате как номер дня в соответствующей системе (в Excel - с 1 января 1900 г.) с помощью функции ДАТА из блока функций «ДАТА И ВРЕМЯ».

Наращение по учетной ставке

При антисипативном методе начисления процентов дисконтирование - прямая операция, а наращение по простой учетной ставке - обратная. В последней возникает необходимость при определении суммы, которую следует проставить в векселе, если известна текущая сумма долга. Как следует из формулы (1.3.3), наращение по простой учетной ставке описывается следующей формулой:

$$S = \frac{P}{1-d_T} = \frac{P}{1-dT}. \quad (1.3.4)$$

Задание 1.3.3

Сумма ***a*** тыс. руб. выдается в ссуду на полгода по годовой учетной ставке ***b*** %. На какую сумму следует выдать вексель?

№ варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a	1	12	3	5	16	30	13	18	12	14
b	2	3	5	7	4	**8**	12	13	17	24
№ варианта	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
a	**11**	22	33	15	6	2	17	19	23	16
b	2	3	5	7	4	8	12	13	17	24
№ варианта	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
a	11	22	33	15	6	2	17	19	23	16
b	2	3	5	7	4	8	12	13	17	24

Исходя из формул (1.1.7) и (1.3.4), нетрудно определить связь между процентной и учетной ставками за период *T:*

$$1-d_T = \frac{1}{1+i_T}. \quad (1.3.5)$$

Из этого соотношения следуют формулы, выражающие процентную ставку через учетную за период *T* и наоборот:

$$i_T = \frac{d_T}{1-d_T}, \quad (1.3.6)$$

$$d_T = \frac{i_T}{1+i_T}. \quad (1.3.7)$$

Если продолжительность периода равна одному году, то

$$i = \frac{d}{1-d}, \quad (1.3.8)$$

$$d = \frac{i}{1+i}. \quad (1.3.9)$$

Сложная учетная ставка

В случае, когда величина дисконта становится сравнимой с величиной суммы, подлежащей возврату, обычно применяют сложную учетную ставку. Процесс вычисления дисконта по сложной учетной ставке аналогичен процессу начисления сложных процентов - там производится ступенчатое начисление процентов несколько раз в течение срока кредитного соглашения, а здесь несколько раз производится ступенчатое дисконтирование суммы, подлежащей возврату. Разница заключается в направленности процессов во времени: начислению процентов соответствует прямой ход времени, дисконтированию - обратный.

Определим текущую стоимость суммы S после нескольких периодов дисконтирования. В пределах одного периода производится дисконтирование по простой учетной ставке, затем полученное значение текущей стоимости суммы становится исходным для следующего периода дисконтирования и т.

д. Текущая стоимость дисконтированной на один период конечной суммы равна $S_1 = S(1-d_T)$ в конце второго периода дисконтирования имеем

$S_2 = S(1-d_T)^2$ и т.д. Таким образом, после n периодов дисконтирования текущая стоимость суммы S будет равна:

$$P = S_n = S(1-d_T)^n \equiv S\nu_T^n; \qquad v_T = l - d_T \tag{1.3.10}$$

Пример 1.3.4

Определить текущую стоимость векселя на сумму ***a*** тыс. руб. сроком на ***b*** года при использовании сложной учетной ставки ***c %*** годовых.

№ варианта	1	2	**3**	4	5	**6**		**7**	**8**	9	10
a	1	12	3	5	16	30		13	18	12	14
b	2	3	5	7	4	8		12	13	17	24
c	2	3	5	7	4	8		12	13	17	24
№ варианта	11	12	13	14	15	16		17	18	19	20
a	11	22	33	15	6	2		17	19	23	16
b	2	3	5	7	4	8		12	13	17	24
c	29	24	26	27	15	56		34	39	60	51
№ варианта	21	22	23	24	25	26		27	28	29	30
a	11	22	33	15	6	2		17	19	23	16
b	2	3	5	7	4	8		12	13	17	24
c	29	24	26	27	15	56		34	39	60	51

Учет процентов несколько раз в год по сложной учетной ставке

Если дисконтирование по сложной учетной ставке производится m раз в год, то учетная ставка за период равна $d_{1/m} = d/m$. Тогда текущая стоимость дисконтированной на 1 год конечной суммы будет равна:

$$P = S(1-d/m)^m \equiv S\nu, \tag{1.3.11}$$

где $\nu = (1 - d/m)^m$ -годовой дисконтный множитель.

Отсюда видно, что при постоянной номинальной годовой учетной ставке d конечный результат дисконтирования зависит от числа периодов в году; при одинаковой номинальной учетной ставке с увеличением количества периодов годовой дисконтный множитель уменьшается. По этой причине номинальная годовая учетная ставка не может служить универсальным измерителем эффективности финансовых операций. Реальная их эффективность связана с эффективной годовой учетной ставкой, равной относительному дисконту за год:

$$d_e = D/S = 1 - v. = 1 - (1 - d/m)^m. \qquad (1.3.12)$$

Доходность двух финансовых контрактов считается одинаковой, если соответствующие им эффективные учетные ставки совпадают. Номинальная годовая учетная ставка для контракта с начислением m раз в год, эквивалентная ставке d_e определяется формулой

$$d^{(m)} = m - m(1 - d_e)^{1/m}. \qquad (1.3.13)$$

Связь номинальной учетной ставки с номинальной процентной ставкой легко получить из формул (1.3.12) и (1.2.3 -1.2.4):

$$d^{(m)} = \frac{i^{(m)}}{1 + i^{(m)}/m}\ ; \qquad \frac{1}{d^{(m)}} = \frac{1}{m} + \frac{1}{i^{(m)}}\ . \qquad (1.3.14)$$

Отсюда видно, что при $m \to \infty$, т. е. при переходе к непрерывному дисконтированию, $d^{(m)} \to 0$, что и следовало ожидать: когда процентный доход поступает непрерывно, различие между авансовым и задолженным процентным доходом исчезает.

Лабораторная работа №4

«Оценка и анализ денежных потоков»

(инструментарий: C++, C#, MS Excel)

1. Теоретические сведения

1.1. Ренты, выплачиваемые несколько раз в год

Наряду с ежегодными рентами широко распространены ренты, выплачиваемые несколько раз в год (ежеквартальные, ежемесячные и т.п.). Ренты, выплачиваемые m раз в год, часто называют m-срочными или m-кратными. Вычисление накопленной и текущей стоимости таких рент производится путем суммирования наращенных и текущих стоимостей членов ренты совершенно аналогично случаю ежегодных рент. Если число членов ренты равно N, а процентная ставка за период $j=i/m$ (где i - номинальная годовая процентная ставка), для ренты постнумерандо с единичными членами получим:

$$s_{j,N} = \sum_{k=0}^{N-1} (1 + j)^k = \frac{(1 + j)^N - 1}{j};$$

$$a_{j,N}=\sum_{k=1}^{N}(1+j)^{-k}=\frac{1-1/(1+j)^N}{j} \qquad (1)$$

Аналогично для ренты пренумерандо:

$$\ddot{s}_{j,N}=\sum_{k=1}^{N}(1+j)^{k}=\frac{(1+j)^N-1}{j}(1+j)=S_{j,N}(1+j);$$

$$\ddot{a}_{j,N}=\sum_{k=0}^{N-1}(1+j)^{-k}=\frac{1-1/(1+j)^N}{j/(1+j)}=a_{j,N}(1+j) \qquad (2)$$

Из результатов будет видно, чти при ежеквартальных взносах наращенная сумма меньше, чем при ежегодных, а при ежемесячных меньше, чем при ежеквартальных, хотя и годовая сумма взносов, и годовая норма доходности одинаковы. Дело в том, что в первом случае вся годовая сумма вносится в начале года и к концу года успевает прирасти в *1+i* раз, тогда как при уплате годового взноса в рассрочку "центр тяжести" потока взносов находится примерно в середине года, и наращенная к копну года сумма будет превышать годовой взнос только в *1+i/2* раз. Таким образом, ренты с одинаковой годовой суммой взносов и одинаковой годовой нормой доходности, но с разной частотой платежей приводят к различным финансовым результатам и поэтому неэквивалентны друг другу.

На практике же постоянно приходится решать вопрос: как заменить годовую ренту эквивалентной ей рентой с более частыми платежами? Под эквивалентностью понимается равенство накопленных или текущих стоимостей годовой и *m*-кратной рент на конец каждого года и для ренты в целом. Дня решения этого вопроса следует заменить всю совокупность платежей *m*-кратной ренты внутри каждого года одним эквивалентным платежом соответственно в конце или в начале года. Величина этого платежа должна быть равна величине платежа соответствующей годовой ренты.

1.2. Обычная рента

Для определения величины членов $r^{(m)}$ *m*-кратной ренты постнумерандо, эквивалентной соответствующей годовой ренте с единичными платежами, необходимо заменить ее платежи внутри года одним единичным платежом в конце года. Очевидно, что величина этого платежа будет равна накопленной стоимости *m*-кратной ренты постнумерандо продолжительностью в 1 год:

$$1=r^{(m)}\sum_{k=1}^{m-1}\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^k=r^{(m)}ms_{\bar{1}|}^{(m)}, \qquad (3)$$

где величина

$$s_{\bar{1}|}^{(m)}=\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m-1}(1+j)^k=\frac{s_{j,N}}{m}=\frac{(1+i^{(m)}/m)^m-1}{i^{(m)}}=\frac{i}{i^{(m)}} \qquad (4)$$

обозначает накопленную стоимость *w*-кратной ренты постнумерандо сроком в 1 год с платежами величиной *1/m*, т.е. с единичной годовой суммой платежей. Здесь процентная ставка за период *1/m* равна:

$$j=i_{1/m}=i^{(m)}/m=(1+i)^{1/m}-1=s^{1/m}-1$$

Из формулы (3) видно, что членов m-кратной ренты постнумерандо, эквивалентной соответствующей единичной годовой ренте, равна:

$$r_{\overline{1|}}^{(m)} = \frac{1}{ms_{\overline{1|}}^{(m)}} = \frac{i^{(m)}}{mi} \tag{5}$$

1.3. Приведенная рента

Для определения величины членов $\ddot{r}^{(m)}$ m-кратной ренты пренумерандо, эквивалентной соответствующей годовой ренте с единичными платежами, необходимо заменить ее платежи внутри года одним единичным платежом в начале года очевидно, что величина этого платежа будет равна текущей стоимости от m-кратной ренты пренумерандо продолжительностью в 1 год:

$$1 = \ddot{r}^{(m)} \sum_{k=0}^{m-1} \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^{k} = \ddot{r}^{(m)} m \ddot{a}_{\overline{1|}}^{(m)} \tag{6}$$

где величина $\ddot{a}_{\overline{1|}}^{(m)} = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1}(1+j)^{-k} = \ddot{a}_{j,N}/m = \frac{1-(1+i^{(m)}/m)^{-m}}{i^{(m)}}\left(1+\frac{i}{i^{(m)}}\right) = \frac{is^{1/m}}{i^{(m)}s}$ (7)

обозначает текущую стоимость m-кратной ренты пренумерандо сроком в 1 год с платежами величиной *1/m*, т. Е. с единичной годовой суммой платежей.

Из формулы (6) видно, что величина членов m-кратной ренты пренумерандо, эквивалентной соответствующей единичной годовой ренте, равна:

$$\ddot{r}^{(m)} = \frac{1}{m\ddot{a}_{\overline{1|}}^{(m)}} = \frac{i^{(m)}s}{mis^{1/m}} \tag{8}$$

В расчетах наряду с множителями наращения и приведенными (1) и (2) для рент с единичной величиной платежей широко используются аналогичные множители, но с единичной суммой платежей за год (они меньше в m раз):

$$s_{\overline{n|}}^{(m)} = s_{j,m\times n}/m = \ddot{s}_{\overline{n|}}^{(m)} \Big/ s^{1/m} = \frac{i}{i^{(m)}s}\ddot{s}_{\overline{n|}} = s_{\overline{n|}}\frac{i}{i^{(m)}} \tag{9}$$

$$a_{\overline{n|}}^{(m)} = a_{j,m\times n}/m = \ddot{a}_{\overline{n|}}\frac{i}{i^{(m)}} \tag{10}$$

$$\ddot{a}_{\overline{n|}}^{(m)} = \ddot{a}_{j,m\times n}/m = \ddot{a}_{\overline{n|}} a_{\overline{1|}}^{(m)} = \ddot{a}_{\overline{n|}}\frac{iv}{i^{(m)}v^{1/m}} = \ddot{a}_{\overline{n|}}\frac{is^{1/m}}{i^{(m)}s} \tag{11}$$

$$\ddot{s}_{\overline{n|}}^{(m)} = \ddot{s}_{j,m\times n}/m = \ddot{s}_{\overline{n|}}\ddot{a}_{\overline{n|}}^{(m)} = \ddot{s}_{\overline{n|}}\frac{is^{1/m}}{i^{(m)}s} \tag{12}$$

Если годовая сумма выплат ренты равна R, то накопленная стоимость получается умножением этих формул на R.

1.4. Непрерывная рента

В рассмотренных выше рентах предполагалось, что члены потока платежей поступают дискретно, через равные промежутки времени (периоды ренты). Однако во многих случаях платежи совершаются настолько часто (ежедневно, еженедельно), что суммирование большого количества членов ренты на протяженных интервалах времени становится неэффективным, и удобнее перейти к непрерывному описанию, считая, что платежи осуществляются непрерывно. При переходе к непрерывному описанию потоков платежей естественно считать, что и начисление процентов также происходит непрерывно.

Вычислим накопленную и текущую стоимость непрерывной ренты, представляющей собой непрерывный поток платежей с единичной годовой интенсивностью (т.е. размер каждого платежа равен *1/m*, суммарный платеж за год равен единице). Для вычисления наращенной суммы необходимо воспользоваться формулой (9), устремив к бесконечности количество платежей в год m. Тогда номинальная процентная ставка превратится в силу роста $i^{(m)} \to \infty$, которая в свою очередь выражается через эффективную процентную ставку формулой (6): $\delta = \ln(1+i)$. В результате получим формулу для наращенной суммы непрерывной единичной ренты:

$$\bar{s}_{\overline{n|}} = s_{\overline{n|}} \frac{i}{\ln(1+i)} = \frac{s^n - 1}{\ln s} \qquad (13)$$

Черта над s означает, что в данном случае рассматривается непрерывная рента, $s_{\overline{n|}}$ - множитель наращения для ренты постнумерандо сроком на *n* лет с платежами в конце года.

Аналогичным образом из формулы (10) получим для текущей стоимости непрерывной ренты следующее выражение:

$$\bar{a}_{\overline{n|}} = s_{\overline{n|}} \frac{i}{\ln(1+i)} = \frac{v^n - 1}{\ln v} \qquad (14)$$

Очевидно, для непрерывной ренты нет различий между рентой пренумерандо и рентой постнумерандо, поскольку платежи начинаются сразу же после начала ренты и выполняются непрерывно до конца срока ренты.

1.5. Переменные ренты

Наряду с постоянными рентами в последнее время широкое применение нашли ренты с переменными членами. Такие ренты применяются в ипотечном кредитовании, в страховании жизни, в планировании инвестиций и т. д. Как правило, получить аналитические формулы для текущей и накопленной стоимости таких рент удается лишь в специальных случаях (такие ренты называют стандартными), в общем же случае удается получить только численные результаты.

1.6. Рекуррентные формулы

Численный расчет накопленной и текущей стоимости различных рент и фондов обычно выполняется с помощью так называемых рекуррентных формул, связывающих значения соответствующих показателей за два соседних года. Различают два типа расчетных схем, использующих прямой или обратный отсчет времени.

Если известна накопленная стоимость фонда в конце (k-1)-го года D_{k_t} и величина платежа R_k, вносимого в конце k-го года, то сумма на конец k-го года (непосредственно после очередного k-го платежа) равна сумме на конец предыдущего года, умноженной на годовой множитель наращения, плюс платеж в конце k-го года:

$$D_k = D_{k-1}s + R_k \tag{15}$$

где s = 1 + i - годовой множитель наращения.

Такая схема соответствует прямому течению времени, выражая настоящие значения показателей через прошлые.

Если же, наоборот, задано будущее значение стоимости фонда, то текущее ее значение определится формулой:

$$D_{k-1} = v(D_k - R_k) \tag{16}$$

1.7. Ретроспективный метод

Рассмотрим денежный фонд, куда помещен начальный капитал D_0, и куда в конце каждого года в течение *n* лет вносятся добавочные суммы R_k *(k = 1. 2, ..., n)*, представляющие собой переменную ренту постнумерандо.

Сумма в фонде на конец первого года равна, очевидно, первоначальной сумме с начисленными процентами плюс сумма платежа: $D_1 = D_0(1+i) + R_1$

Для того чтобы определить накопленную на конец произвольного t-го года сумму, умножим обе части рекуррентного уравнения (15) на дисконтный множитель v^k и просуммируем по всем значениям k от 1 до t:

$$\sum_{k=1}^{t} D_k v^k = s\sum_{k=1}^{t} D_{k-1} v^k + \sum_{k=1}^{t} R_k v^k$$

После преобразований в левой и в правой части получим:

$$D_t = D_0 s^t + \sum_{k=1}^{t} R_k s^{t-k} \tag{17}$$

Финансовый смысл формулы (17) совершенно ясен: сумма средств в фонде к концу 1-го года складывается из наращенной за t лет величины начального капитала и суммы наращенных ежегодных платежей (за время от момента платежа k до момента времени t).

Формулу (17) называют ретроспективной, поскольку она выражает сумму средств в фонде через величину начального капитала и уже произведенных платежей. Обычно ретроспективный метод используется для расчета накопленной стоимости рент и фондов.

1.8. Перспективный метод

Если задана стоимость фонда в момент окончания потока платежей, то удобнее использовать перспективный метод, выражая текущие значения показателей через будущие. Умножим (16) на v^{k-1} и просуммируем по всем значениям k, но уже от t+1 до n. В результате получим:

$$D_t = D_n v^{n-t} + \sum_{k=t+1}^{n} R_k v^{k-t} \qquad (18)$$

Соотношение (18) иллюстрирует очевидный результат: текущая стоимость фонда на конец 1-го года равна текущей стоимости его конечного значения за вычетом текущей стоимости предстоящих платежей. Формулу (18) называют перспективной, поскольку она выражает текущую стоимость через величину будущих платежей. Легко показать, что формулы (17) и (18) эквивалентны, для чего достаточно подставить в последнюю формулу D_n, из (17) (при t = n).

При перспективном подходе все показатели естественным образом выражаются не через время t, прошедшее от начала потока платежей, а через время $\tau = n - t$, оставшееся до его окончания. Это становится очевидным, если переписать (18) в виде:

$$D_\tau = D_n v^\tau + \sum_{q=0}^{\tau-1} R_q v^{t-q} \quad , \qquad (18а)$$

где q=n-k.

Из формул (17) и (18) легко сразу же получить все результаты для постоянных ежегодных рент.

Накошенная стоимость рассчитывается по ретроспективной формуле (17). Для ренты постнумерандо с единичными платежами:

$$D_0 = 0; R_k = 1; D_n = s_{\overline{n}|} = \sum_{k=1}^{n} s^{n-k} = \sum_{q=0}^{n-1} s^q = \frac{s^n - 1}{i} \qquad (19)$$

Для соответствующей ренты пренумерандо: $D_0 = 1; R_k = 1; R_n = 0$

$$D_n = \ddot{s}_{\overline{n}|} = s_{\overline{n}|} + \sum_{k=1}^{n-1} s^{n-k} = s\frac{s^n - 1}{i} \qquad (20)$$

Полученные выше формулы совпадают с формулами для накопленной стоимости постоянных рент.

Текущие стоимости рассчитываются по перспективной формуле (18). Для ренты постнумерандо с единичными платежами:

$$D_n = 0; R_k = -1; D_0 = a_{\overline{n}|} = \sum_{k=1}^{n} v^k = \frac{1 - v^n}{i} \qquad (21)$$

Для соответствующей ренты пренумерандо:

$$D_0 = 0; R_k = -1; R_n = 0;$$

$$D_0 = \ddot{a}_{\overline{n|}} - 1 = \sum_{k=1}^{n-1} v^k = \frac{1 - v^{n-1}}{i} \tag{22}$$

1.9. Стандартная возрастающая рента

Стандартная возрастающая рента постнумерандо представляет собой совокупность выплат, возрастающих по закону арифметической прогрессии начиная с единичной выплаты в конце первого года: $b_k = k; k = 1,2,...,n$

Текущая стоимость этой ренты:

$$(Ia)_{\overline{n|}} = \sum_{k=1}^{n} kv^k = (\ddot{a}_{\overline{n|}} - nv^n)/i \tag{23}$$

Буква I в обозначении текущей стоимости - от английского increase - возрастать.

При выводе (23) используется формула для суммы арифметико-геометрической профессии

$$z_n = \sum_{q=0}^{n} (a_0 + qd) r^q = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} \left[a_0 + \frac{rd}{1 - r} \right] - \frac{d(n+1) r^{n+1}}{1 - r} \tag{24}$$

Стандартная возрастающая рента пренумерандо представляет собой совокупность выплат, возрастающих по закону арифметической прогрессии начиная с единичной выплаты в начале первого года: $b_k = 1 + k; k = 0,1,2,...,n-1$

Текущая стоимость этой ренты:

$$(I\ddot{a})_{\overline{n|}} = \sum_{k=0}^{n-1} (1+k) v^k = \frac{(Ia)_{\overline{n|}}}{v} \quad . \tag{25}$$

1.10. Стандартная убывающая рента

Выплаты *стандартной убывающей ренты постнумерандо* представляют собой совокупность выплат, убывающих по закону арифметической профессии, завершающихся единичной выплатой в конце n-го года: $b_k = n + 1 - k; k = 1,2,...,n$.

Если сложить выплаты стандартной возрастающей и стандартной убывающей рент, то получим постоянную ренту с выплатами величиной n+1. Отсюда ясно, что текущая стоимость стандартной убывающей ренты постнумерандо:

$$(Da)_{\overline{n|}} = \sum_{k=1}^{n} (n+1-k) v^k = (n+1) a_{\overline{n|}} - (Ia)_{\overline{n|}} = \frac{n - a_{\overline{n|}}}{i} \tag{26}$$

Буква D в обозначении текущей стоимости ренты - от английского decrease - убывать.

Выплаты *стандартной убывающей ренты пренумерандо* представляют собой совокупность выплат, убывающих по закону арифметической профессии, завершающихся единичной выплатой в начале n-го года: $b_k = n - k; k = 0,1,2,..., n-1.$

Текущая стоимость этой ренты:

$$(D\ddot{a})_{\overline{n|}} = \sum_{k=0}^{n-1}(n-k)v^k = (n+1)\ddot{a}_{\overline{n|}} - (I\ddot{a})_{\overline{n|}} = \frac{n - a_{\overline{n|}}}{iv} \qquad (27)$$

2. Задача для самостоятельного выполнения

Задача №1

Клиент в течение a лет делает вклады в банк под сложную процентную ставку b% годовых. Вклады делаются: а) в начале каждого квартала; б) в начале каждого месяца. Определить величину накопленной к концу a-го года суммы, если сумма взносов за год равна c тыс.руб. (исходные данные представлены в таблице 1).

Задача №2

Определить величину ежеквартальных и ежемесячных платежей для рент постнумерандо, эквивалентных годовой ренте постнумерандо с платежом a тыс.руб. Годовая ставка сложных процентов - b % (исходные данные представлены в таблице 1).

Задача №3

Определить величину ежеквартальных и ежемесячных платежей для рент пренумерандо, эквивалентных годовой ренте пренумерандо с платежом a тыс.руб. Годовая ставка сложных процентов b %. (исходные данные представлены в таблице 1).

Задача №4

Финансовая компания должна выполнить по своим обязательствам вкладчика в течение a лет по b млн. руб. ежегодно. Какой суммой она должна для этого располагать, если норма доходности составляет c % за год? (исходные данные представлены в таблице 1).

Задача№5

Найти текущее значение возрастающей ренты с первой выплатой a тыс. руб. и каждой последующей - на a тыс. руб. больше, чем предыдущая, при условии, что проценты начисляются по ставке b % в месяц, срок ренты - c месяцев, выплаты производятся в конце каждого месяца. (исходные данные представлены в таблице 1).

Таблица 1

№ варианта	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
a	1	12	3	5	16	30	13	18	12	14
b	2	3	5	7	4	8	12	13	17	24
c	2	3	5	7	4	8	12	13	17	24
№ варианта	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
a	11	22	33	15	6	2	17	19	23	16
b	2	3	5	7	4	8	12	13	17	24
c	29	24	26	27	15	56	34	39	60	51
№ варианта	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
a	11	22	33	15	6	2	17	19	23	16

b	2	3	5	7	4	8	12	13	17	24
c	29	24	26	27	15	56	34	39	60	51

Контрольные вопросы:

1. Расчет рент, выплачиваемых несколько раз в год.
2. Расчет обычной, приведенной, непрерывной, переменной рент.
3. Рекуррентные формулы. Ретроспективный и перспективный методы расчетов.
4. Стандартные возрастающие и убывающие ренты.

Лабораторная работа № 5
«Оценка инвестиционных проектов»
(инструментарий: C++, C#, MS Excel)

1. Теоретические сведения
1.1. Амортизация долга

Погашение долга в рассрочку, или амортизация долга, обычно производится посредствам ряда периодических платежей, т.е. ренты. Каждый платеж состоит из двух частей: погашаемой части основной суммы долга и процентов, начисляемых на текущий долг. Под текущим долгом понимают не выплачиваемый остаток основной суммы долга на конец очередного платежа ренты, т.е. на момент времени непосредственно после очередного платежа. Наиболее прост метод погашения основного долга равными суммами. Недостатком этого метода является то, что срочные выплаты в начальный период погашения долга выше, чем в конце срока, что не всегда устраивает должника. Поэтому широкое распространение получил метод погашения долга равными срочными платежами, т.е. посредством постоянной ренты постнумерандо. Если сумма займа сроком на n лет равна D и срочные платежи осуществляются в конце каждого года, то величина ежегодного платежа R составит:

$$R = \frac{D}{a_{\overline{n}|}} \quad , \qquad (1)$$

где $a_{\overline{n}|}$ текущая стоимость единичной ренты.

Важный показатель, характеризующий динамику погашения долга, - величина остатка долга (текущего долга) на любой момент времени. Остаток долга на момент окончания первого года равен, очевидно, первоначальной сумме долга за вычетом погашаемой части основного долга (срочной выплате за вычетом процентов на сумму долга): $D_1 = D_0 - (R - iD_0) = D_0(1+i) - R$

Аналогично остаток долга на конец *k-го* года (непосредственно после *k-го* платежа) связан с остатком долга на конец предыдущего года следующим соотношением:

$$D_k = D_{k-1}s - R, \tag{2}$$

где $s = 1 + i$ — годовой множитель наращения.

Формула (2) сразу же получается из рекуррентной формулы, если в ней положить $R_k = -R$(знак «минус» означает, что платеж отрицательный, т.е. производится выплата)

Формулу (2) можно переписать в виде:

$$R = D_k i + (D_{k-1} - D_k)\ . \tag{3}$$

Формула (3) наглядно показывает, что каждый платеж состоит из двух частей: процентов, начисляемых на текущий долг, и суммы погашения основного долга.

Остаток долга на конец 1-го года в соответствии с ретроспективным методом равен:

$$D_t = D_0 s^t - \sum_{k=1}^{t} R s^{t-k} = D_0 s^t - R s_{\bar{t}|} \tag{4}$$

Остаток долга к концу 1-го года складывается из наращенной за *t* лет величины начального долга за вычетом суммы наращенных ежегодных выплат. Поскольку долг в конце последнего года *n* должен быть полностью погашен ($D_n = 0$). из (4) при *t*=*n* следует (1).

Как правило, текущий долг удобнее выразить через величину предстоящих платежей. Из формулы перспективного метода получаем:

$$D_t = D_n v^{n-t} + \sum_{k=t+1}^{n} R v^{k-t} = D_n v^{n-t} + R a_{\overline{n-t}|} \tag{5}$$

Текущий долг (остаток долга) в конце *t-го* года равен сумме текущей стоимости его конечного значения и текущей стоимости предстоящих выплат.

С учетом $D_n = 0$ формула (5) примет вид:

$$D_t = R a_{\overline{n-t}|} = \sum_{k=1}^{n-1} R v^k\ . \tag{6}$$

При составлении плана предполагается, что остаток долга на начало года равен его значению на конец предыдущего года. Расчеты производятся следующим образом: вычисляются проценты с остатка долга на начало соответствующего года, затем путем вычитания процентов из общей суммы расходов по обслуживанию займа определяется погашаемая часть основного долга (в соответствии с (3)). Последняя вычитается из остатка долга на начало года, давая его значение на конец года или на начало следующего года. Погашаемая часть основного долга за пятый год в точности равна остатку долга на начало этого года и полностью погашает задолженность.

Подобный способ последовательного расчета остатка долга и составления полного плана погашения долга может оказаться весьма утомительным занятием при большом количестве платежей (например, при ежемесячных выплатах). Этой работы можно избежать, если воспользоваться формулами (4) или (6), которые позволяют определить остаток долга на конец любого года. Тогда план погашения будет состоять только из остатка долга на начало года и величины ежегодных расходов по займу.

Обычно планы погашения долга предусматривают ежеквартальные или ежемесячные выплаты в течение срока погашения долга (n лет). Если выплаты осуществляются m раз в год, то их совокупность представляет собой m-кратную ренту постнумерандо. Величина каждой выплаты определяется формулой, аналогичной (1):

$$R^{(m)} = \frac{D}{ma_{\bar{n}}^{(m)}} = D\frac{(1+i)^{1/m} - 1}{1 - v^n}, \tag{7}$$

где $a_{\bar{n}}^{(m)}$ определяется формулой (10) из лабораторной работы №3.

Остаток долга на конец t-*го* года определяется формулой, аналогичной(6):

$$D_t = R^{(m)} m a_{\overline{n-t|}}^{(m)} = D\frac{a_{\overline{n-t|}}}{a_{\overline{n|}}} = D\frac{1 - v^{n-t}}{1 - v^n} \tag{8}$$

1.2. Стандартные ипотеки

Ссуды под залог недвижимости, или ипотеки, широко распространены в странах с развитой и стабильной экономикой. Характерная особенность ипотечных ссуд - длительный срок погашения. В связи с этим существует достаточно большое количество различных схем погашения долга по ипотеке, учитывающих возраст заемщиков, их материальное и семейное положение. Суть типовой, или стандартной, ипотечной ссуды сводится к погашению долга равными, обычно ежемесячными, взносами, т.е. путем выплаты постоянной ежемесячной ренты, рассмотренной выше. Величина ежемесячного платежа и остатка долга после очередного платежа определяется формулами (7) и (8).

Часто встречаются ипотеки с неполным погашением задолженности в течение срока и разовым погашением остатка долга B в конце срока. Текущая стоимость выплат по такой схеме:

$$D = R^{(m)} a_{\overline{n|}}^{(m)} m + Bv^n \quad , \tag{9}$$

откуда

$$R^{(m)} = \frac{D - Bv^n}{ma_{\overline{n|}}^{(m)}} \ . \tag{10}$$

1.3. Нестандартные ипотеки с переменными платежами

Нестандартные ипотечные схемы отличаются от стандартной схемы тем, что взносы в течение срока погашения долга не остаются постоянными, а, как правило, увеличиваются с течением времени. Такие схемы имеют целью снизить расходы заемщиков на начальном этапе погашения долга, перенося основную их тяжесть на более поздние этапы.

В таких схемах совокупность платежей представляет собой переменную ренту постнумерандо. Рассмотрим ежегодную ренту. По аналогии с рекуррентной формулой запишем разностное уравнение для текущей задолженности на конец *k-го* года:

$$D_k = D_{k-t} s - R_k; \quad R_k = Rf_k, \tag{11}$$

где R_k - величина выплаты в конце *k-го* года; R - величина выплаты в "базовом" году, взятом за основу; $f_k = R_k / R$ - относительная величина выплаты *k-го* года задает закон изменения величины выплат во времени в соответствии с конкретной схемой ипотеки.

Замкнутые ретроспективная и перспективная формулы для остатка долга имеют вид:

$$D_t = D_0 s^t - \sum_{k-1}^{t} R_k s^{t-k} = D_0 s^t - R\sum_{k=1}^{t} f_k s^{t-k} \tag{12}$$

$$D_t = D_n v^{n-t} - \sum_{k-1}^{n} R_k v^{k-t} = D_n v^{n-t} + R\sum_{k=t+1}^{n} f_k v^{k-t}. \tag{13}$$

1.4. Изменение финансовых контрактов

На практике часто возникает необходимость пересмотреть условия финансового контракта в связи с изменением финансового положения заемщика. Иногда необходимо заменить одно обязательство другим, с более отдаленным сроком исполнения или, наоборот, досрочно погасить задолженность, заменив совокупность платежей одним (консолидация платежей). При ухудшении финансового состояния заемщика часто возникает необходимость уменьшить расходы по обслуживанию займа, увеличив его срок. Возможных вариантов изменения условий конкретных финансовых контрактов довольно много, и нет смысла их рассматривать в общем виде. Достаточно сформулировать общее правило, которому должны удовлетворять параметры преобразованного контракта:

$$\begin{pmatrix} Текущая\_стоимость \\ предстоящих\_платежей \\ после\_изменения \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Текущая\_стоимость\_задолженности \\ на\_дату\_изменения\_условий, т.е. \\ текущей\_стоимости\_предстоящих \\ платежей\_до\_изменения \end{pmatrix}$$

1.5. Оценки инвестиционных проектов

Любая предпринимательская деятельность в той или иной степени связана с инвестициями. Инвестиции необходимы для обновления существующей материально-технической базы производства, расширения объемов производства, освоения новых видов деятельности и т.п. Капитал инвестируют по одной главной причине - для получения существенного экономического дохода в будущем. Привлекательность того или иного инвестиционного проекта характеризуют четыре основных компонента:

– Объем затрат - *чистые инвестиции*;

– потенциальные выгоды - *чистый денежный поток* от деятельности;

– период, в течение которого инвестиционный проект будет давать доход — *жизненный цикл инвестиции*;

– высвобождение капитала в конце срока экономической жизни инвестиции - *ликвидационная стоимость.*

Детальному количественному исследованию инвестиционного проекта предшествует простой предварительный анализ, основанный на понятии окупаемости.

1.6. Окупаемость

Окупаемость, точнее, *срок окупаемости* есть отношение суммы инвестиций к ожидаемому ежегодному чистому доходу:

$$n_y = \frac{C}{R}, \tag{14}$$

где С - суммарный инвестированный капитал, R - ежегодный чистый доход.

В результате получаем число лет, необходимое для возврата первоначального вложения. Для того чтобы получить доход, необходим жизненный цикл инвестиции, превышающий срок ее окупаемости. Это грубая проверка того, окупится ли инвестиция в течение срока ее жизненного цикла или нет.

Проект будет рентабельным только при условии, что он будет приносить доход в течение срока, превышающего срок окупаемости инвестиционного проекта.

Если проект не приносит доходов регулярно и равными частями, то срок окупаемости определяется последовательным сложением доходов каждого года до тех пор, пока сумма не сравняется с суммарной величиной инвестированного капитала. В год, когда это равенство достигается, наступает окупаемость.

Показатель окупаемости дает только самую грубую первоначальную оценку и не учитывает срок жизненного цикла инвестиции, что не дает возможности оценить суммарный доход от проекта. Таким образом, показатель окупаемости не является полноценным критерием оценки доходности проектов. Все, что можно сказать о нашем примере, используя окупаемость, - вложение в проект полностью вернется к инвестору спустя 5 лет. Если для оценки инвестиционных проектов пользоваться только показателем окупаемости, то инвестиционный проект с более коротким сроком окупаемости может показаться более предпочтительным, чем проект способный принести больший суммарный доход.

Для детальной оценки инвестиционных проектов применяют методы современного инвестиционного анализа, использующие стоимость денег с учетом фактора времени. Очевидно, что из двух инвестиционных предложений, не отличающихся ничем, кроме разницы во времени получения будущих доходов, инвестор выберет то, которое обещает доход раньше. Причина в том, что деньги, полученные раньше, можно снова инвестировать и получить дополнительный доход. Точно так же инвестор, имея выбор произвести затраты немедленно или распределить их но времени, выберет последний вариант. Причина вновь в возможности заработать прибыль в течение времени отсрочки платежей.

Последовательный экономический анализ инвестиционных проектов предполагает использование рассмотренных выше операций дисконтирования и наращения, отражающих временную стоимость денег. Ключевыми показателями анализа инвестиций являются: чистая дисконтированная (текущая) стоимость, индекс прибыльности и внутренняя норма окупаемости.

Объем инвестиций характеризуется чистой текущей стоимостью капиталовложений:

$$IC = \sum_k C_k v^k \quad , \tag{15}$$

где $C_к$ - капиталовложения k-го года, v - годовой дисконтный множитель.

Следует остановиться на используемой ставке дисконтирования. С экономической точки зрения это должна быть средняя ставка доходности, обычно получаемая инвестором от похожих проектов. Действительно, инвестор вправе ожидать от данной инвестиции не меньшей доходности, чем от альтернативных вложений средств.

Доходы от проекта характеризуются чистой текущей стоимостью поступлений:

$$PV = \sum_k P_k v^k \quad , \tag{16}$$

где $P_к$ - поступления k-го года.

1.7. Чистая текущая стоимость

Одним из наиболее популярных показателей инвестиционного анализа является чистая текущая стоимость (Net Present Value, NPV), равная разности чистых текущих стоимостей поступлений и инвестиций: $NPV = PV - IC$ (17)

Показатель чистой текущей стоимости "взвешивает" результат совокупного действия денежных потоков вложений, будущих доходов и ликвидационной стоимости на протяжении жизненного цикла инвестиции в терминах дисконтированной стоимости. Он позволяет аналитику определить, благоприятен или нет чистый баланс этих сумм. Если NPV>0, то проект является рентабельным, если NPV<0, то проект следует сразу же отвергнуть как нерентабельный. Этот вывод зависит от применяемой ставки дисконтирования, или от требуемой ставки доходности. При одном значении ставки проект может быть рентабельным, а при более высокой ставке - нерентабельным.

Инвестиционный проект, приемлемый для одного инвестора, может оказаться неприемлемым для другого инвестора, требующего более высокую ставку доходности. Обычно чистую текущую стоимость используют в качестве индикатора, который показывает, действительно ли выбранная ставка доходности может быть достигнута в течение срока жизненного цикла данной инвестиции. Другим, часто более удобным индикатором, отвечающим на этот же вопрос, является внутренняя норма окупаемости.

1.8. Показатель доходности

Показатель NPV дает качественную оценку рентабельности того или иного инвестиционного проекта, но не дает критерия выбора между двумя рентабельными проектами капиталовложений различных размеров. Количественным критерием является *показатель доходности* (Profitability Index, PI), выражающий соотношение затраты/доходы и равный отношению всей суммы дисконтированных доходов по проекту к сумме дисконтированных инвестиционных затрат:

$$PI = \frac{PV}{IC} . \qquad (18)$$

Показатель доходности дает ответ на вопрос: какова величина текущей стоимости доходов в расчете на единицу чистых инвестиций? Инвестор выберет тот инвестиционный проект, у которого показатель доходности выше. Если показатель равен 1 или ниже, это означает, что проект едва отвечает или даже не отвечает ставке доходности, используемой для вычисления текущей стоимости. Показатель, в точности равный единице соответствует нулевой чистой текущей стоимости проекта. При этом ставка доходности в точности равна внутренней норме окупаемости проекта, рассматриваемой ниже.

1.9. Внутренняя норма окупаемости

Рассмотренный выше метод оценки рентабельности инвестиционного проекта с помощью показателя NPV не всегда удобен, поскольку он дает ответ только на вопрос: рентабелен ли проект при заданной ставке доходности? Если же необходимо сделать заключение о рентабельности проекта с несколько отличающейся ставкой доходности, приходится снова рассчитывать NPV. Один и тот же инвестиционный проект при различных значениях этой ставки может иметь чистую текущую стоимость как больше, так и меньше нуля, т.е. проект при одном значении ставки мог считаться рентабельным, а при другом значении - нерентабельным. Более наглядным является подход, основанный на концепции "истинной" доходности данной инвестиции в течение ее жизненного цикла, называемой также *внутренней нормой окупаемости* (Internal Rate of Return, IRR). Часто используются термины "внутренняя норма доходности", "норма рентабельности инвестиций". Внутренняя норма окупаемости - это тот уровень доходности, использование которого в качестве ставки дисконтирования применительно к притокам и оттокам в течение жизненного цикла инвестиции дает нулевую чистую текущую стоимость:

$$NPV(i = IRR) = \sum_k (P_k - C_k)v^k = 0; \qquad v = 1/(1 + IRR)$$

Указанное соотношение означает, что дисконтированная величина доходов в точности равна дисконтированной величине инвестиций. Внутренняя норма окупаемости меняется в зависимости от изменения срока жизненного цикла инвестиции и графика денежных потоков и является уникальной характеристикой каждого инвестиционного проекта. Поэтому этот показатель является основным измерителем эффективности инвестиций. Для определения IRR необходимо решить трансцендентное уравнение, в котором вложения и доходы являются заданными величинами, а IRR - неизвестной величиной. Внутренняя норма окупаемости сразу позволяет сделать заключение о рентабельности проекта: если IRR больше требуемой инвестором ставки доходности, то проект рентабелен, и наоборот.

Если требуемая норма доходности выше этого значения, то проект является нерентабельным.

Приведенные выше показатели дают интегральную оценку инвестиционных проектов за весь срок их жизни. Наряду с этими показателями важное значение имеет динамика потоков инвестиций и доходов, выражаемая графиком или диаграммой потоков инвестиций и доходов во времени. Динамика потоков инвестиций определяется распределением потребностей в финансовых средствах проекта во времени. Обычно анализируют так называемый двусторонний поток платежей, положительные элементы которого соответствуют доходам, а отрицательные - инвестициям.

1.10. Текущая окупаемость

Наглядную характеристику инвестиционного проекта дает показатель текущей окупаемости, определяющий срок, в течение которого чистая текущая стоимость доходов уравновесит чистую текущую стоимость инвестиций при заданном уровне процентной ставки. Иными словами, текущая окупаемость определяет срок, по истечении которого достигается ставка доходности, равная ставке дисконтирования, используемой в расчетах. Очевидно, что при использовании внутренней нормы окупаемости в качестве ставки дисконтирования мы получим срок окупаемости, в точности равный сроку жизненного цикла инвестиции.

2. Задачи для самостоятельного выполнения

Задача №1

Долг в сумме а тыс. руб. необходимо погасить за пять лет равномерными платежами в конце каждого года. Определить размер ежегодных выплат и составить план погашения долга исходя из процентной ставки b% годовых (исходные данные представлены в таблице 1).

Задача №2

Для данных задачи №1 найти остаток долга на конец второго года (начало третьего года).

Задача №3

Ипотечная ссуда в размере a тыс. руб. выдана сроком на b лет. Погашение - в конце каждого месяца, номинальная годовая ставка - c%. Определить сумму ежемесячного платежа и остаток долга на конец пятого года погашения (исходные данные представлены в таблице 1).

Задача №4

Для покупки и запуска оборудования по производству нового продукта требуются капиталовложения в размере a тыс. руб. Ожидаемый ежегодный доход от реализации этого продукта после налогообложения (т. е. чистый доход) равен b тыс. руб. Рассчитать срок окупаемости этого инвестиционного проекта (исходные данные представлены в таблице 1).

Задача №5

Для данных задачи №4 зададим срок инвестиционного проекта равным c годам, а ставку дисконтирования примем равной d%. Рассчитать чистую текущую стоимость поступлений и чистую текущую стоимость проекта (исходные данные представлены в таблице 1).

Задача №6

Вычислить показатель доходности для данных задачи №5.

Задача №7

Вычислите внутреннюю норму окупаемости для данных задачи №5.

Решить задачу используя функцию НОРМА из блока «Финансовые функции» в диалоговом окне «Мастер функции» электронных таблиц Excel. Сравнить результат с аналитическими выкладками (расчет по соответствующим формулам)

Таблица 1

№ варианта	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
a	1	12	3	5	16	30	13	18	12	14
b	2	3	5	7	4	8	12	13	17	24
c	1	12	3	5	16	30	13	18	12	14
d	2	3	5	7	4	8	12	13	17	24
№ варианта	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
a	11	22	33	15	6	2	17	19	23	16
b	29	24	26	27	15	56	34	39	60	51
c	11	22	33	15	6	2	17	19	23	16
d	29	24	26	27	15	56	34	39	60	51
№ варианта	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
a	15	11	21	14	9	3	12	17	21	12
b	24	20	21	23	11	29	23	29	50	43
c	15	11	21	14	9	3	12	17	21	12
d	24	20	21	23	11	29	23	29	50	43

Контрольные вопросы:

1. Амортизация долга.
2. Стандартные ипотеки, нестандартные ипотеки с переменными платежами. Их расчет.
3. Оценка инвестиционных проектов. Расчет окупаемости.
4. Расчет чистой текущей стоимости и показателей доходности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ И ИНТЕРНЕТ-РЕСУРСОВ

1. Лукашин Ю.П. Финансовая математика: Учебно-практическое пособие.- М.: Изд-во МЭСИ, 2001
2. Бочаров П.П.. Касимов Ю.Ф. Финансовая математика: Учебник.М.: «Гардарики», 2002
3. Мелкумов Я.С. Финансовые вычисления. Теория и практика: учебно-справочное пособие. М.: «ИНФРА-М», 2002
4. Ковалев В.В., Уланов В.А.Курс финансовых вычислений.М.: Финансы и статистика. 2001
5. Уланов В.А.Сборник задач по курсу финансовых вычислений.М.: Финансы и статистика, 2000
6. Малыхин В.И.Финансовая математика и ее приложения: Учебн. пособие для вузов. П.М.: «ЮНИТИ-ДАНА», 2000
7. Фомин Г.П. Финансовая математика: 300 примеров и задач. Учебное пособие.М.: «Гном-Пресс», 2000
8. Четыркин Е.М. Финансовая математика: Учебник.- 9-е изд., испр.М.: «Дело», 2010
9. Самаров, К.Л.Финансовая математика: сборник задач с решениями: учебное пособие.М.: Альфа- М: ИНФРА-М. 2011.-
10. Половников В. А., . Пилипенко А.И. Финансовая математика: Математическое моделирование финансовых операций: -Учеб. пособие для студентов вузов.- М.: Вузовский учебник. ИНФРА-М, 2010..
11. Капитоненко В.В. Задачи и тесты по финансовой математике. Гриф УМО ВУЗов России М.: Финансы и статистика.- 2007.
12. Кузнецов, Б.Т. Финансовая математика: учебн. пособие для вузов . -М.: Экзамен, 2005.
13. Нешитой А.С. Инвестиции: Учебник. - 5-е изд., перераб. и испр. - М.: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К^0», 2007. - 372 с.
14. Лазарев Л. Mathlab 5.x. Библиотека студента. - К.: Торгово-издательское бюро BHV, 2000.
15. Электронно-библиотечная система ООО «Издательство Лань» www.e.lanbook.com). 2020
16. Электронно-библиотечная система IPRbooks (www.IPRbooks.ru). 2020
17. MS Windows XP/ Vista / 7/10
18. Microsoft Office 2007/2013/2016
19. Пакет программ С++
20. MathCad
21. MatLab
22. www, window.edu.ru - единое окно доступа к образовательным ресурсам
23. www.intuit..ru - интернет-университет
24. www.consultant.ru - юридическая база данных

ПРИЛОЖЕНИЕ

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ДАГЕСТАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

**КАФЕДРА ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
И ПРИКЛАДНОЙ ИНФОРМАТИКИ В ЭКОНОМИКЕ**

ОТЧЕТ
по лабораторной работе №_____
по дисциплине «Финансовая математика»

Выполнил (а):

Студент(ка) _______________________________
номер группы, курс,

____
факультет,

____
фамилия и инициалы студента

Руководитель:

____
ученая степень, звание (должность),

____
фамилия и инициалы

Махачкала, 20_____ г.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Стр.