

Документ подписан простой электронной подписью
Информация о владельце:
ФИО: Баламирзоев Назим Лиодинович
Должность: Ректор
Дата подписания: 20.10.2026 11:37:44
Уникальный программный ключ:
5cf0d6f89e80f49a334f6a4ba58e91f3326b9926

Министерство науки и высшего образования РФ
ФГБОУ ВО
«Дагестанский государственный технический университет»

Айдемиров К.Р.

«СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА»
(Расчет статически определимых систем
и построение эпюр внутренних усилий)

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ
для студентов направления подготовки 08.03.01 – «Строительство»

Махачкала 2026

УДК 624.04

Айдемиров К.Р. «Строительная механика» (Расчет статически определимых систем и построение эпюр внутренних усилий) Учебное пособие для обучающихся по направлению подготовки 08.03.01 Строительство, профиль «Промышленное и гражданское строительство: теория и проектирование зданий и сооружений»/ К.Р. Айдемиров. – Махачкала: 2026, 41 с.

Рецензенты:

Э.К. Агаханов д.т.н., профессор – зав. каф. «ТСиСМ» ДГТУ

А.И. Акаев к.т.н., доцент ДГУНХ.

В учебном пособии изложены основы теории расчета статически определимых систем (СОС), (арок и рам, простых и многопролетных балок, плоских ферм) на неподвижную нагрузку и на многих примерах представлена методика определения внутренних усилий с построением их эпюр.

Для каждого вида систем, перед расчетом, производится проверка их геометрической неизменяемости и статической определимости по числу степеней свободы и степени изменяемости системы.

Дано краткое описание внешних нагрузок, приведены виды нагрузок и их классификацию. Перечислены основные свойства и допущения СОС и изложены методы их расчета.

Для каждого вида систем (шарнирно-стержневые балки, арки и фермы) подробно указаны особенности их работы и приведено множество примеров расчета.

Учебное пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлению «Строительство».

Рег.№

Печатается по решению Ученого совета ДГТУ от 2026г.
(протокол № ...)

Методы расчета статически определимых систем на постоянную нагрузку

1. Предмет и задачи строительной механики. Введение.

Строительная механика – это фундаментальная инженерная наука, лежащая в основе проектирования и расчета любых сооружений: от мостов и небоскребов до станков, кораблей и самолетов. Ее цель – обеспечить *жесткость и устойчивость* конструкций при минимальном расходе материалов. Она возникла на стыке *теоретической механики* (законы равновесия и движения) и *сопротивления материалов* (изучение напряжений и деформаций в одном элементе), расширив свои задачи на сложные системы элементов вплоть до *строительных конструкций*.

Предметом строительной механики является *расчетная схема* (модель) конструкции и методы определения усилий (внутренних силовых факторов), перемещений (деформаций) и напряжений в ней под действием внешних нагрузок в виде статических и динамических воздействий.

Ключевыми элементами предмета являются: расчетная схема, внешние воздействия, внутренние силовые факторы и перемещения.

Расчетная схема – это упрощенная, но адекватная реальности модель конструкции (например, балка, рама, ферма, арка), в которой выделяются основные несущие элементы, виды связей и опор.

Внешние воздействия – это силы (сосредоточенные, распределенные и вращательного эффекта), моменты, температурные изменения, осадка опор.

Внутренние силовые факторы – это продольная сила (N), поперечная сила (Q), изгибающий момент (M) то, что возникает внутри сечения элемента в ответ на внешнюю нагрузку.

Перемещения – это линейные прогибы и углы поворота сечений элементов конструкции.

Основные задачи строительной механики можно разделить на три фундаментальных типа:

1. *Задача расчета на прочность и жесткость (анализ существующей конструкции)*. Это прямая, или проверочная задача, где дана система с известными геометрическими параметрами, материалами и нагрузками. Где следует определить внутренние усилия (построить эпюры), найти максимальные напряжения и перемещения. При этом целью исследования является, будут ли напряжения меньше допускаемых, а прогибы – меньше предельных.

2. *Задача проектирования (подбор сечения)*. Это обратная, или проектная, задача, где даны схема конструкции, нагрузки и свойства материала и

следует подобрать такие размеры поперечного сечения элементов (например, номер двутавра, диаметр трубы), чтобы условия прочности и жесткости выполнялись. При этом цель считается достигнутым, если найдено оптимальное решение и подобрано экономичное сечение.

3. *Задача определения несущей способности.* Это также важная проверочная задача, где требуется найти максимальную нагрузку, которую может выдержать данная конструкция без разрушения или потери устойчивости. Установка запаса безопасности или предельную эксплуатационную нагрузку является целью этого типа задачи.

Помимо основных задач, строительная механика решает более узкие и специальные задачи:

а). *Расчета на устойчивость*, где проводится изучение поведения конструкций (особенно сжатых стержней, пластин, оболочек) при нагрузках, вызывающих потерю первоначальной формы равновесия и

б). *Динамического расчета*, где проводится изучение поведения конструкций под действием динамических нагрузок (удар, вибрация, землетрясение, ветровая пульсация). Определение собственных частот и форм колебаний.

в). *Расчета статически неопределимых систем*, где происходит разработка методов (сил, перемещений, конечных элементов - МКЭ) для расчета систем, которые нельзя рассчитать только с помощью уравнений статики, так как большинство современных конструкций являются статически неопределимыми.

г). *Оптимизации конструкций*, где происходит поиск такой формы и распределения материала, которые обеспечили бы выполнение всех условий при минимальной массе или стоимости.

Строительная механика является *ключевым звеном* в цепочке инженерной подготовки: *математика, теоретическая механика и сопротивление материалов* дают аппарат подготовки и создают основу для изучения строительной механики. *Строительная механика* учит рассчитывать системы элементов. *Проектирование железобетонных, металлических, деревянных конструкций* применяет методы строительной механики к конкретным материалам и нормам.

Без строительной механики современное строительство и машиностроение были бы невозможны. Она превращает искусство строительства в точную науку, позволяя создавать безопасные, надежные и экономичные сооружения, которые определяют облик нашей цивилизации от древних арок до современных вантовых мостов и космических станций.

Важной задачей расчета сооружений является определение их напряженно-деформированного состояния (НДС). Эта задача состоит из:

- определения опорных реакций и внутренних усилий;
- определения напряжений;
- определения перемещений и деформаций.

Перед расчетом должны быть установлены геометрические размеры и формы элементов сооружения, физические характеристики материала, внешняя нагрузка и особенности ее воздействия.

Наиболее простым является расчет статически определимых систем.

Статически определимой называется система, внутренние усилия которой можно определить только из уравнений статики (равновесия).

Статически определимые системы (СОС) имеют свои особенности:

- 1) их внутренние усилия не зависят от упругих характеристик материала, форм сечений и площадей элементов;
- 2) воздействие температуры, осадки опор, неточность изготовления элементов не вызывают внутренних усилий;
- 3) если нет внешних нагрузок, все внутренние усилия равны нулю.

2. Нагрузка. Классификация нагрузок.

За нагрузку могут приниматься как внешние силы, действующие на сооружение, так и различные сочетания внешних воздействий, изменение температуры, осадки опор и т.д. Различают следующие виды нагрузок:

1. По способу приложения:

- **ОБЪЕМНАЯ НАГРУЗКА** действует во всех точках сооружения (собственный вес, инерционные силы и др.),
- **ПОВЕРХНОСТНАЯ НАГРУЗКА** распределена по поверхности (снег, ветер и др.).

2. По происхождению:

- **ПОЛЕЗНЫЕ** нагрузки, для восприятия которых возводится сооружение (оборудование, краны, транспорт, гидростатическое давление в плотинах);
- **СОБСТВЕННЫЙ ВЕС** конструкций;
- **ПРИРОДНЫЕ** нагрузки (ветер, снег, землетрясения и др.)

3. По продолжительности действия:

- **ПОСТОЯННАЯ** - это собственный вес и некоторые виды полезных нагрузок, действует постоянно и зачастую сохраняется в течение всей жизни сооружения.
- **ВРЕМЕННАЯ**, которая действует только в определенный период или момент времени и подразделяется на:

- 1) длительную

2) кратковременную (вес людей, атмосферная нагрузка)

3) особую (сейсмическая, температура, осадки опор)

4. По характеру действия:

- **СТАТИЧЕСКИЕ** - величина, направление и положение нагрузки неизменны во времени (нет инерции) и действуют так, что сооружение сохраняет статическое равновесие.
- **ДИНАМИЧЕСКИЕ** - нагрузки вызывающие инерционные силы и нарушают это равновесие. Источниками динамической нагрузки являются различные машины и механизмы, ветер, землетрясения и др.
- **ПОДВИЖНЫЕ** - нагрузки меняют свое положение (поезд, автотранспорт, группа людей и т.д.).

При расчете конструкций должны учитываться нагрузки и воздействия в наиболее невыгодных комбинациях.

5. Различают основные, дополнительные и особые сочетания нагрузок:

- **ОСНОВНЫЕ** - это постоянная плюс длительная временная и одна из наиболее существенных кратковременных временных нагрузок;
- **ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ** - это постоянная плюс временная длительная и все кратковременные временные нагрузки.
- **ОСОБЫЕ** сочетания - это постоянная плюс временная длительная плюс все кратковременные временные плюс особые нагрузки.

Нагрузка, действуя и распределяясь между элементами сооружения, вызывает внутренние напряжения и деформации. В строительной механике определяются их обобщенные характеристики – внутренние усилия и перемещения. А сами напряжения и деформации определяются через внутренние усилия по известным формулам сопротивления материалов.

Нормативные величины и характер нагрузок, а также коэффициент перегрузки берутся из СНиП 2.01.07-85* "Нагрузки и воздействия".

3. Основные свойства статически определимых систем и методы их расчета

Первым и главным свойством статически определимых систем (СОС) является *условие статического равновесия* ($\sum X=0$, $\sum Y=0$, $\sum M=0$).

Они *достаточны* для определения всех опорных реакций и внутренних усилий. Не требуется привлекать дополнительные уравнения, учитывающие деформации системы.

Вторым условием является отсутствие "лишних" связей. Число неизвестных опорных реакций равно числу независимых уравнений статики для плоской системы (обычно 3). Для пространственной – 6.

Третьим условием является *независимость внутренних усилий от физических параметров*. Величина внутренних усилий (продольных сил N , поперечных сил Q , изгибающих моментов M) *не зависит* от материала конструкции (модуля упругости E); Геометрических характеристик сечений (площади F , момента инерции I); Способа изготовления и сборки (если нет начальных несоответствий). Если в статически определимой системе допущена ошибка в размерах или она собрана из элементов с разными жесткостями, это не вызовет дополнительных внутренних усилий после монтажа (при условии, что сборка возможна).

Четвертое условие такое, что *температурные воздействия и осадки опор* в статически определимых системах *не вызывают внутренних усилий*. Они приводят только к изменению формы системы (деформациям, перемещениям) без возникновения напряжений.

Пятое условие такое, что СОС имеют меньшую надежность по сравнению со статически неопределимыми. При выходе из строя одного элемента (или одной связи) система, как правило, теряет геометрическую неизменяемость и превращается в механизм.

3.1. Методы определения внутренних усилий

В элементах плоской стержневой системы возникают три усилия: продольная сила N , поперечная сила Q и изгибающий момент M . Для любого поперечного сечения стержня они определяются как на рис. 3.1.

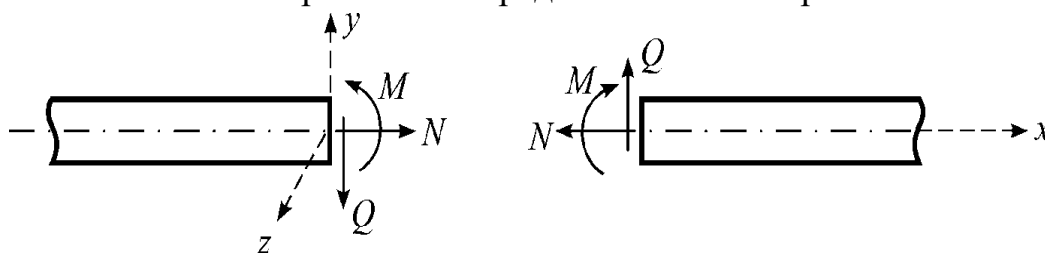


Рис. 3.1

Изгибающий момент – это сумма моментов всех сил, лежащих слева (или справа) от сечения относительно оси z :

$$M = \sum_{\text{лев}} M_{iz} = - \sum_{\text{пр}} M_{jz}.$$

В строительной механике знак изгибающего момента обычно не устанавливается, а *эпюра M изображается на стороне растянутого волокна*.

Поперечная сила – это сумма проекций на ось y всех сил, лежащих слева (или справа) от сечения:

$$Q = \sum_{лев} P_{iy} = - \sum_{пр} P_{jy}.$$

Поперечная сила положительна, если вращает элемент по часовой стрелке, и отрицательна, если вращает его против часовой стрелки.

Продольная сила – это сумма проекций всех сил на ось x , лежащих слева (или справа) от сечения:

$$N = \sum_{лев} P_{ix} = - \sum_{пр} P_{jx}.$$

Продольная сила положительна, если растягивает элемент, и отрицательна, если сжимает его.

Между M и Q существует дифференциальная зависимость:

$$Q = \frac{dM}{dx}.$$

Исходя из геометрического смысла первой производной, величина Q для заданного сечения равняется тангенсу угла между осью x и касательной к эпюре M .

По эпюре M можно также определить знак Q . Для этого в рассматриваемом сечении ось x нужно повернуть до совпадения с касательной к эпюре M . Если поворот будет происходить по часовой стрелке, то для Q будет знак «+», а если против часовой стрелки, то знак «-».

Эпюры поперечных и продольных сил можно изображать на любой стороне от оси стержня, но эпюру изгибающего момента нужно обязательно изображать на стороне растянутых волокон.

Внутренние усилия статически определимых систем определяются методами сечений, сквозных сечений, замкнутых сечений (вырезания узла), совместных сечений, замены связей и др.

3.2. Метод сечений

Универсальным и основным методом определения внутренних усилий является *метод сечений* (для балок, рам, арок).

Этот метод позволяет рассматривать внутреннее усилие как внешнюю силу для разрезанной части (левой или правой) и определять его из уравнений равновесия статики.

Например, внутренние усилия в сечении K , для балки (рис. 3.2 а) определяются как на рис. 3.2 б.

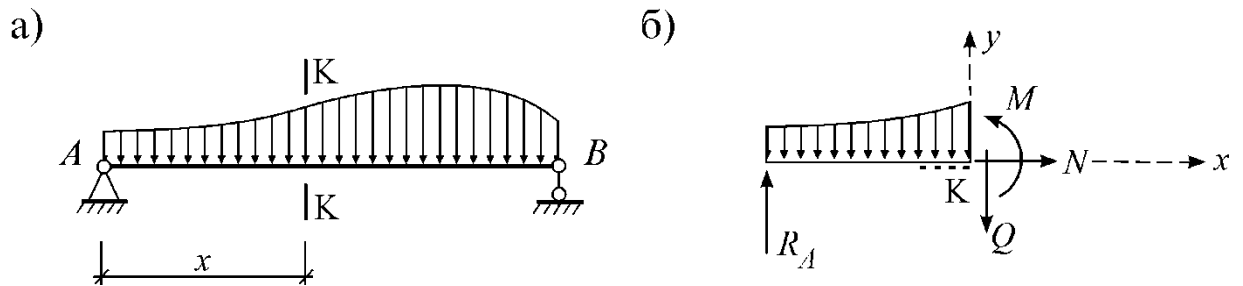


Рис. 3.2

Алгоритм метода сечений:

- поделить систему на участки;
- выбрать участок и провести сечение;
- выбрать одну (наиболее простую) из отсеченных частей;
- составить три уравнения равновесия;
- из них определить внутренние усилия в заданном сечении M , Q , N ;
- для данного участка построить эпюры M , Q , N ;
- повторить пункты 2-6 для остальных участков.

3.3. Метод совместных сечений

Этот метод используется при расчете многодисковых систем.

Например, для расчета трехдисковой рамы (рис. 3.3 а) проводятся три совместных сечения I , II , III . В результате выявляются девять неизвестных реакций (рис. 3.3 б): опорные реакции R_1 , R_2 , H и междисковые реакции X_1 , X_2 , X_3 , Y_1 , Y_2 , Y_3 . Составив для каждого диска по три уравнения равновесия, т.е. $3 \times 3 = 9$ уравнений, из их решения определяются все 9 реакций.

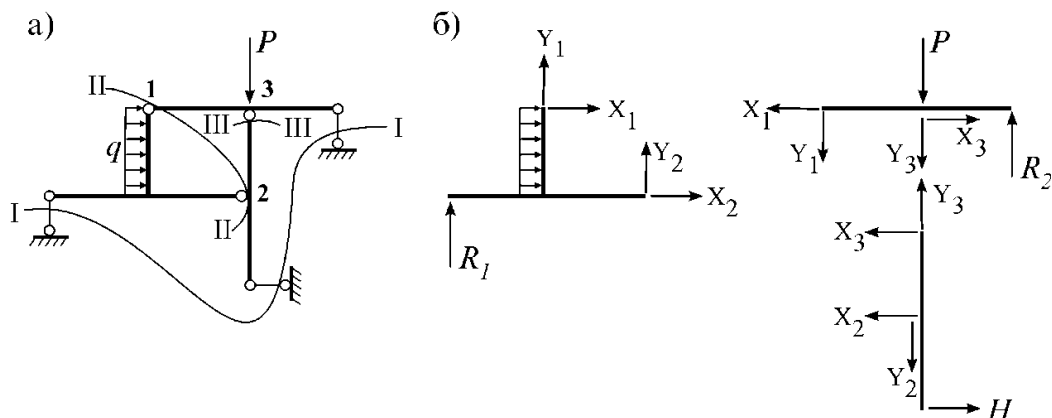


Рис. 3.3

Алгоритм метода совместных сечений:

- совместными сечениями разделить систему на части (диски);
- обозначить опорные и междисковые реакции;
- для каждого диска записать уравнения равновесия;

- решить систему полученных уравнений;
- каждый диск рассчитать отдельно и построить эпюры;
- объединить все эпюры по участкам в общие эпюры M , Q , N .

3.4.1. Метод замкнутого сечения (вырезания) узла.

Используется для определения усилий в простых случаях и, в литературе называется методом вырезания узла.

Сущность метода: Путем проведения замкнутого сечения вокруг узла или какого-то отсека вырезается узел с не более чем двумя неизвестными усилиями; силы, действующие в узле, проецируются на две оси; из этих уравнений определяются искомые усилия.

Например, при расчете балочно-ферменной системы (рис. 3.4 а), после того как определены опорные реакции (рис. 3.4 б), вырезается узел A (рис. 3.4 в) и составляются уравнения равновесия:

$$\sum X = N_2 \cos 45^\circ - N_1 \cos 45^\circ = 0,$$

$$\sum Y = N_1 \sin 45^\circ + N_2 \sin 45^\circ + P/2 = 0.$$

Из них определяются искомые продольные силы: $N_1 = N_2 = -\frac{P}{4 \sin 45^\circ}$.

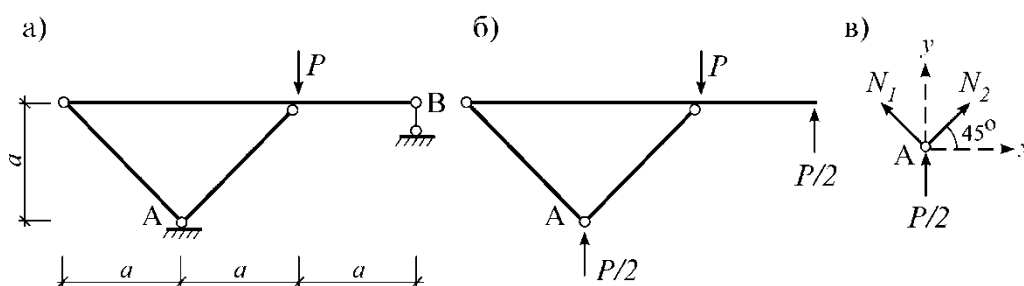


Рис. 3.4

3.4.2. Метод сквозных сечений (для ферм)

Метод более эффективен, когда нужно найти усилия не во всех, а только в некоторых стержнях фермы. Проводится сечение, которое *рассекает не более трех стержней*, усилия в которых нужно найти, и разрезает ферму на две части.

Порядок расчета следующий: Рассматривается равновесие одной из отсеченных частей. Составляется три уравнения равновесия так, чтобы в каждом уравнении была *только одна* неизвестная сила. Для этого составляется уравнение моментов относительно *точки пересечения двух других рассеченных стержней* (моментной точки, или точки Риттера). Если

два стержня параллельны, то для нахождения усилия в третьем составляется уравнение проекций на ось, перпендикулярную этим двум стержням.

3.5. Метод замены связей.

Используется при расчете сложных статически определимых систем, которые трудно рассчитать другими способами.

Смысл заключается в том, что мысленно убирается одна связь (опора или стержень), превращая систему в механизм. Затем прикладывается

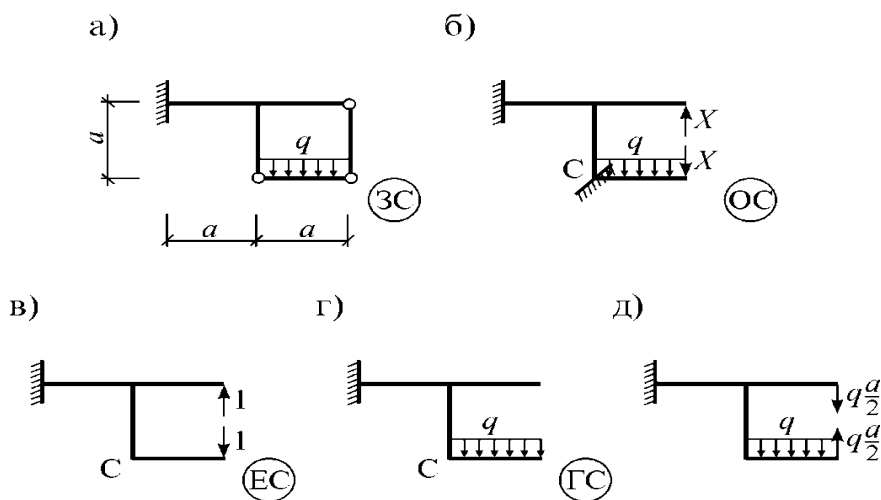


Рис. 3.5

вместо нее неизвестное усилие (X) и записывается условие, что перемещение по направлению удаленной связи от всех сил (включая X) должно быть равно нулю. Это дает уравнение для нахождения X . Или сложная система превращается в более простую путем перестановки связи (или нескольких связей) в другое удобное место; из условия эквивалентности заданной и заменяющей систем определяется усилие в переставленной связи; затем система рассчитывается известными способами.

Например, для расчета рамы (рис. 3.5 а) удалим правый вертикальный стержень заданной системы (ЗС) и введем одну связь в левый шарнир. Тогда шарнир станет припайкой C , а примыкающие к нему стержни будут жестко связаны. Обозначив усилие в удаленной связи через X , получим так называемую **основную систему** (ОС) для расчета рамы (рис. 3.5 б).

Условием эквивалентности ОС по отношению к ЗС будет условие равенства нулю момента в точке C : $M_C = 0$. По принципу суперпозиции этот момент равняется сумме моментов от силы X и внешней нагрузки:

$$M_C = M_{C,X} + M_{C,p} = 0.$$

Теперь рассмотрим два состояния ОС:

- 1) единичное состояние (ЕС), где прикладываются силы $X=1$ (рис. 3.5 в);
- 2) грузовое состояние (ГС), где прикладывается нагрузка (рис. 3.5 г).

Тогда предыдущее уравнение примет вид

$$\overline{M}_C \cdot X + M_{C,P} = 0, \text{ где } \overline{M}_C = 1 \cdot a = a - \text{момент в точке } C \text{ в}$$

единичном состоянии;

$$M_{C,P} = qa^2 / 2 - \text{момент в точке } C \text{ в грузовом состоянии.}$$

Теперь неизвестное усилие легко вычисляется:

$$X = -\frac{M_{C,P}}{\overline{M}_C} = -\frac{qa}{2}.$$

После этого можно перейти к расчету более простой системы (рис. 3.5 д).

В более сложных случаях переставляются несколько связей и записываются столько же условий эквивалентности:

$$s_{11}X_1 + s_{12}X_2 + \dots + s_{1n}X_n + S_{1P} = 0,$$

$$s_{21}X_1 + s_{22}X_2 + \dots + s_{2n}X_n + S_{2P} = 0,$$

.....

$$s_{n1}X_1 + s_{n2}X_2 + \dots + s_{nn}X_n + S_{nP} = 0.$$

Здесь $1, 2, \dots, n$ – заменяемые связи; $X_1, X_2, \dots, X_n$ – неизвестные внутренние усилия в этих связях; s_{ij} – усилие в связи i в j -ом единичном состоянии; S_{iP} – усилие в i -ой связи в грузовом состоянии.

Из этой системы уравнений определяются неизвестные $X_1, X_2, \dots, X_n$.

ВЫВОД. Расчет любой статически определимой системы приводит к решению системы n линейных уравнений с n неизвестными. Если определитель полученной системы уравнений отличен от нуля ($\det \neq 0$), внутренние усилия будут конечными величинами. Если же определитель равняется нулю ($\det = 0$), то внутренние усилия определить нельзя. В этом случае система является мгновенно изменяемой.

3.6. Последовательность расчета в общем виде.

- Проверка статической определимости: убедиться, что $W = 3Д - 2Ш - С_0 = 0$ (для плоской системы), где $Д$ — число дисков, $Ш$ — число простых шарниров, $С_0$ — число опорных стержней.
- Определение опорных реакций: используем три уравнения статического равновесия для всей системы.
- Определение внутренних усилий: используем соответствующий типу конструкций метод расчета.

- Построение эпюр: Строим графики распределения N , Q , M по длине элементов системы.
- Проверка правильности расчета:
 - Статическая проверка: равновесие любого отсеченного узла или части конструкции под действием внешних и внутренних сил.
 - Соблюдение дифференциальных зависимостей между Q и M : $dM/dx = Q$. В сечении, где $Q = 0$, момент M должен иметь экстремум.

Расчет статически определимых систем – это основа, на которой строится понимание работы более сложных статически неопределимых конструкций. Ключевая идея – *достаточность уравнений статики* для полного решения задачи.

3.7. Определение опорных реакций

Сооружение, воспринимая внешнюю нагрузку, через свои элементы передает ее опорам, вызывая в них опорные реакции.

При определении опорных реакций используется **принцип освобождения от связей**: всякое тело можно освободить от связей, заменив их реакциями. После этого из уравнений равновесия можно определять величины опорных реакций.

Уравнения равновесия плоской системы записываются в трех формах:

$$1) \sum X = 0, \quad \sum Y = 0, \quad \sum M_A = 0$$

($\sum X$ и $\sum Y$ – суммы проекций на взаимно-пересекающиеся оси x и y , $\sum M_A$ – сумма моментов всех сил относительно любой точки A на плоскости);

$$2) \sum X = 0, \quad \sum M_A = 0, \quad \sum M_B = 0$$

(точки A и B не должны лежать на одном перпендикуляре к оси x);

$$3) \sum M_A = 0, \quad \sum M_B = 0, \quad \sum M_C = 0$$

(точки A , B , C не должны лежать на одной прямой).

3.8. Эпюры внутренних усилий в простейших балках

Известно, что геометрические образы, применяемые для изображения изменения в элементе какого-либо силового или другого фактора, называется **ЭПЮРОЙ**. С эпюрами внутренних усилий для простейших систем знакомы из курса "Сопротивление материалов". Напомним некоторые из них (рис.3.2).

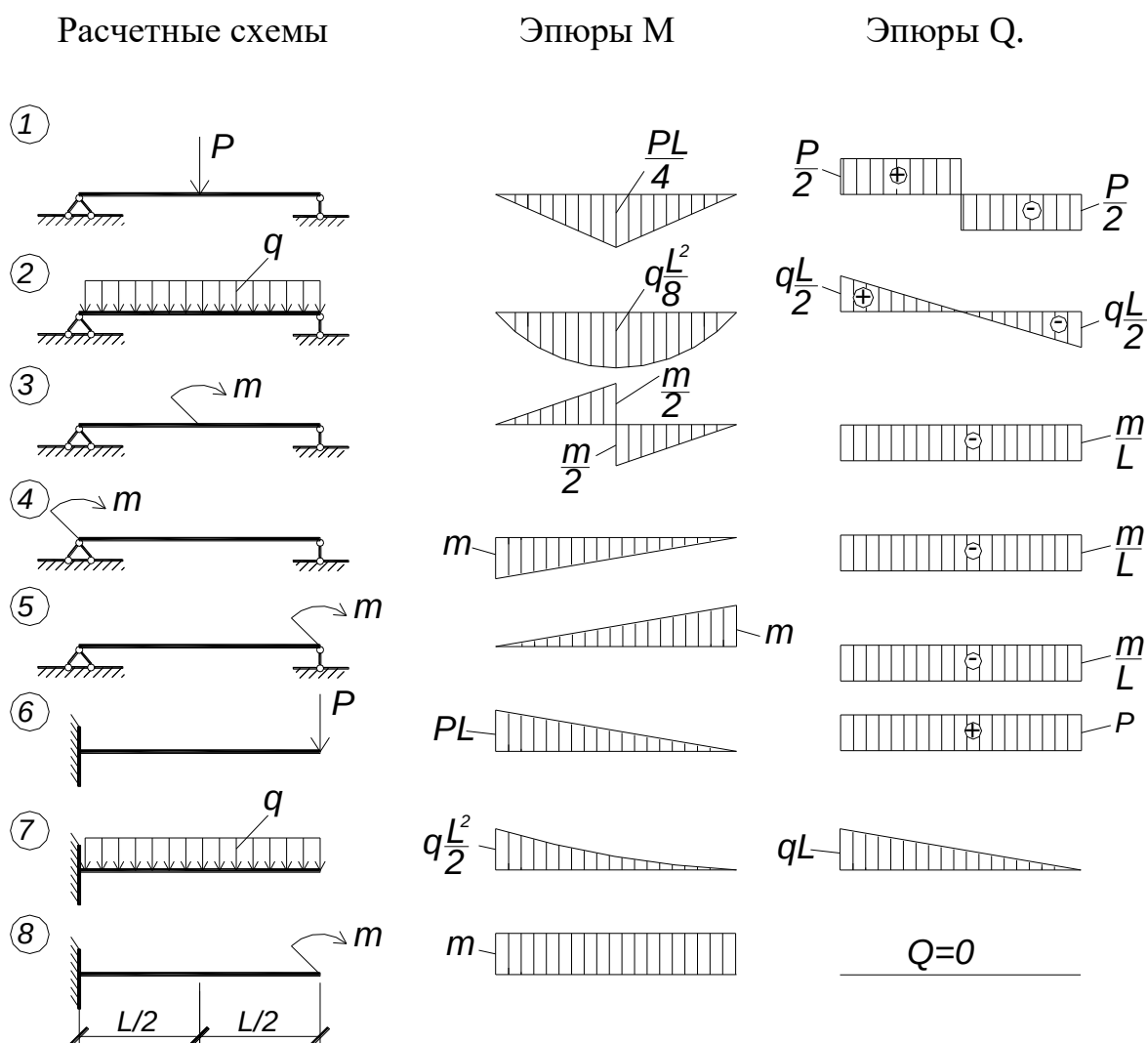


Рис. 3.2

Отметим, что на эпюре изгибающих моментов знак, как правило, не ставится, она строится на растянутых волокнах.

При расчете рам и балок после нахождения опорных реакций определяют изгибающие моменты по концам стержней, сходящихся в узлах рамы, в точках приложения сосредоточенных внешних сил (точки перелома эпюры M) и моментов (скачки на эпюре M); на участках действия равномерно распределенной нагрузки интенсивностью q для получения криволинейной эпюры к эпюре концевых моментов "подвешивается" балочная параболическая эпюра M с ординатой посередине, равной $ql^2/8$.

Знаки на эпюре M для рам не ставят, а саму эпюру изгибающих моментов строят со стороны *растянутых* волокон. В балках изгибающий момент считается положительным, если он растягивает нижние волокна.

Чтобы при построении эпюры M автоматически попадать на растянутые волокна, можно каждый элемент рамы предполагать горизонтальным или же

мысленно представить себе наблюдателя, последовательно поворачивающегося внутри рамы лицом к каждому элементу.

В том и другом случаях, получая положительные значения изгибающих моментов, откладываем их вниз (к наблюдателю) от оси стержня, отрицательные - вверх (от наблюдателя). Различные положения наблюдателя будем обозначать цифрами в кружках, а направление его взгляда - стрелкой. Можно поступить и по-другому. Если удастся с помощью сечений, проведенных через характерные точки, разбить заданную раму на ряд консольных балок и консольных балок с ломаной осью, то растянутые волокна в интересующих нас сечениях можно просто установить от одной нагрузки, которая вносит наибольший вклад в момент M в данном сечении (остальные, если они есть, - мысленно удаляем).

Эпюру Q строят по эпюре M с учетом зависимости $Q=dM/dx=tg\alpha$, т.е. поперечная сила численно равна тангенсу угла наклона касательной к эпюре моментов в данном сечении. Если эпюра M прямолинейная, то α - угол между очертанием эпюры и осью стержня. Для определения знака Q надо повернуть ось стержня до совмещения с линией эпюры M . Если вращение происходит по ходу часовой стрелки - знак "плюс", против - "минус". Другое правило: поперечная сила считается положительной, если она вращает отсеченную часть стержня относительно противоположного конца по ходу часовой стрелки.

На рис. 3.6, а...,г приведены типовые прямолинейные эпюры моментов и соответствующие им эпюры поперечных сил.

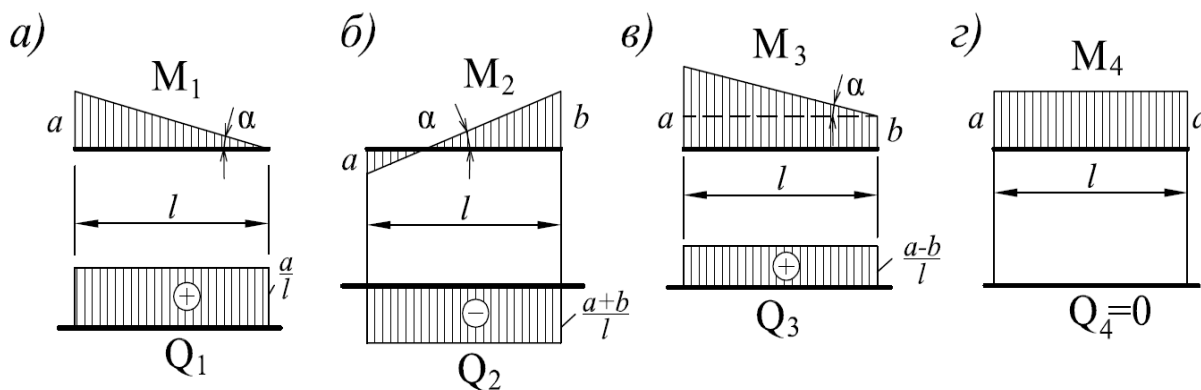


Рис. 3.6

На участках с равномерно распределенной нагрузкой изгибающий момент изменяется по закону квадратной параболы, обращенной выпуклостью в сторону действия нагрузки q , а поперечная сила по - линейному закону (наклонная прямая к оси стержня). Для удобства построения эпюры поперечных сил для такого случая рекомендуется разбить эпюру M на две составляющие, предварительно проведя

прямую линию, соединяющую концы эпюры моментов: квадратную параболу и трапецию или треугольник. Для каждой из составляющих строится своя эпюра Q , сумма их и будет окончательной эпюрой для данного участка (рис. 3.7).

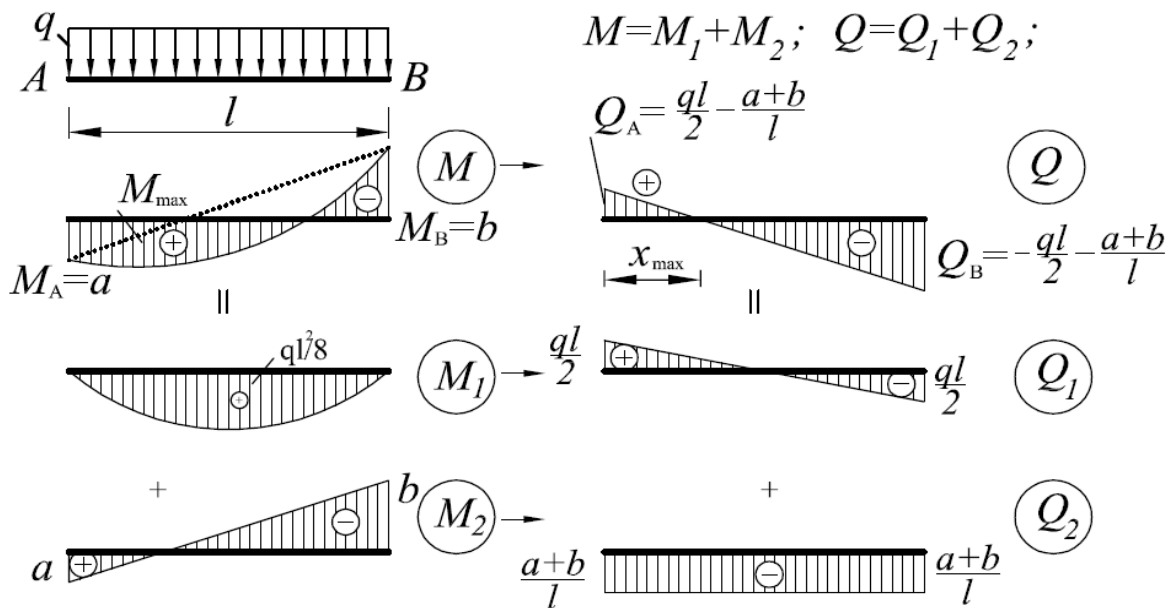


Рис.3.7

В тех сечениях, где эпюра Q , пересекает ось стержня ($Q = 0$), изгибающий момент имеет экстремум. Из курса сопротивления материалов известно, что $x_{\max} = Q_A/q$, а $M_{\max} = M_A + \Omega_Q$, где $\Omega_Q = Q_A x_{\max} / 2$ - площадь эпюры Q на участке от A до $x_{\max}$; M_A берется со своим знаком.

Продольная сила N считается положительной, если она растягивает стержень, т.е. направлена от узла.

Эпюра продольных сил строится по эпюре поперечных сил способом вырезания узлов, начиная с двухстержневого узла. К каждому стержню вырезанного узла прикладываются поперечные силы, взятые из эпюры Q . Поперечная сила со знаком "плюс" вращает узел по ходу часовой стрелки, а со знаком "минус" - против. После этого вдоль стержней от узла прикладываются положительные продольные силы N и составляются два уравнения равновесия в виде суммы проекций всех сил на оси x и y . Если к узлу приложена внешняя сосредоточенная сила, то она обязательно учитывается при составлении уравнений $\sum X = 0$ и $\sum Y = 0$.

Трехстержневые (четырехстержневые и т.д.) узлы рассматриваются только тогда, когда одна (две и т.д.) из продольных сил была предварительно найдена.

Очень часто искомые продольные силы можно определять в уме (путем логических рассуждений), не записывая уравнений равновесия

для узла. Для каждого стержня между двумя соседними узлами эпюра N имеет вид прямоугольника (при отсутствии продольной нагрузки).

При построении эпюр M , Q , N и для проверки их правильности применяют приведенные ниже правила:

1. На незагруженном участке стержня эпюра M будет прямолинейной, а эпюра Q постоянной (т.е. имеет вид прямоугольника).

2. На участке стержня, в точке приложения сосредоточенной силы F , на эпюре M должен быть перелом (излом), направленный в сторону действия силы, а на эпюре Q - скачок, равный по величине приложенной силе F . На эпюре N это не сказывается.

3. На участке стержня, в точке приложения сосредоточенного момента m , на эпюре M должен быть скачок, равный по величине приложенному моменту m , а ветви эпюры M слева и справа от этой точки должны быть параллельны. На эпюры Q и N это не влияет (рис. 3.8, б).

4. Поведение эпюр M и Q на участке, загруженном равномерно распределенной нагрузкой описано выше.

5. Из условия равновесия двухстержневого узла, не загруженного сосредоточенным моментом, эпюра моментов переносится с наружных волокон на наружные, с внутренних - на внутренние (рис. 3.8, в).

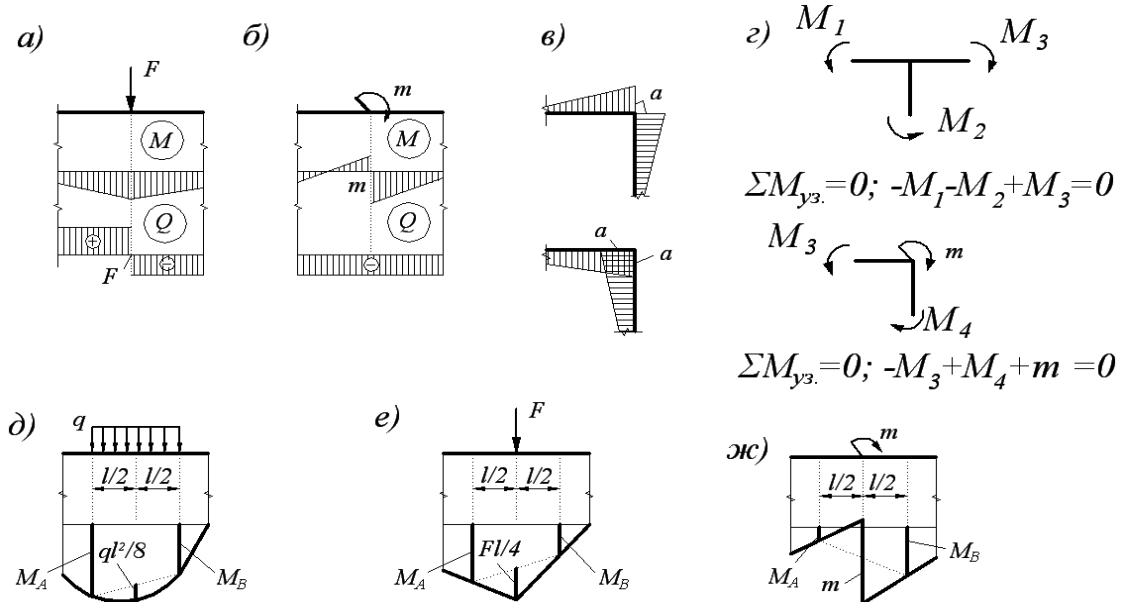


Рис. 3.8

Момент в шарнире равен нулю, если к сечению, бесконечно близко от него, не приложен внешний сосредоточенный момент.

Если на конце стержня приложен внешний сосредоточенный момент m , то внутренний изгибающий момент равен этому моменту m , а при его отсутствии внутренний момент равен нулю.

таблица

№ n/n	Схемы нагружения. Эпюры M, Q	№ n/n	Схемы нагружения. Эпюры M, Q	№ n/n	Схемы нагружения. Эпюры M, Q
1		2		3	
4		5		6	

4. Расчет многопролетных статически определимых балок

Кинематический анализ структуры многопролетной статически определимой балки показывает, что в ее составе всегда можно выявить основные балки, имеющие достаточное количество опор для обеспечения собственной геометрии, второстепенные, геометрическая неизменяемость которых обеспечивается за счет их опирания на основные балки. Графическое изображение схемы взаимодействия основных и второстепенных частей конструкции носит название *поэтажной* схемы, примеры построения которой для двух типов балок приведены на Рис. 3.10 (а, б).

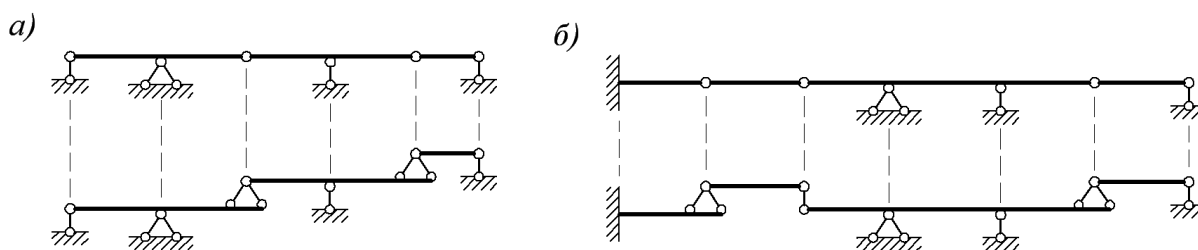


Рис.3.10

Естественно, что нагрузка, приложенная к балкам нижнего яруса поэтажной схемы, не вызывает усилий в вышележащих балках. Это обстоятельство обуславливает последовательность расчета многопролетной балки: расчет начинается с рассмотрения самых верхних балок поэтажной схемы, после которых рассматриваются нижележащие балки.

В плоских балочных и рамных системах отдельные стержни могут быть соединены между собой жестко, с помощью шарниров, либо подвижными связями. Для определения внутренних усилий в стержнях можно составить условия равновесия каждого стержня, получив, таким образом, систему уравнений с неизвестными внутренними усилиями: концевыми значениями продольных сил, поперечных сил и изгибающих моментов для каждого стержня. В *статически определимых системах* число составленных таким образом уравнений будет равно числу неизвестных, так что можно решить полученную систему уравнений относительно всех внутренних сил. Однако такой способ расчета является слишком громоздким. Анализ структуры системы и

выявление подвесных к основной части системы элементов позволяют вести расчет без решения полной системы уравнений со многими неизвестными. Поэтому строится поэтажная схема для всей системы, путем удаления междисковых шарниров и замены их эквивалентными им стержневыми связями (см. рис.3.11) .

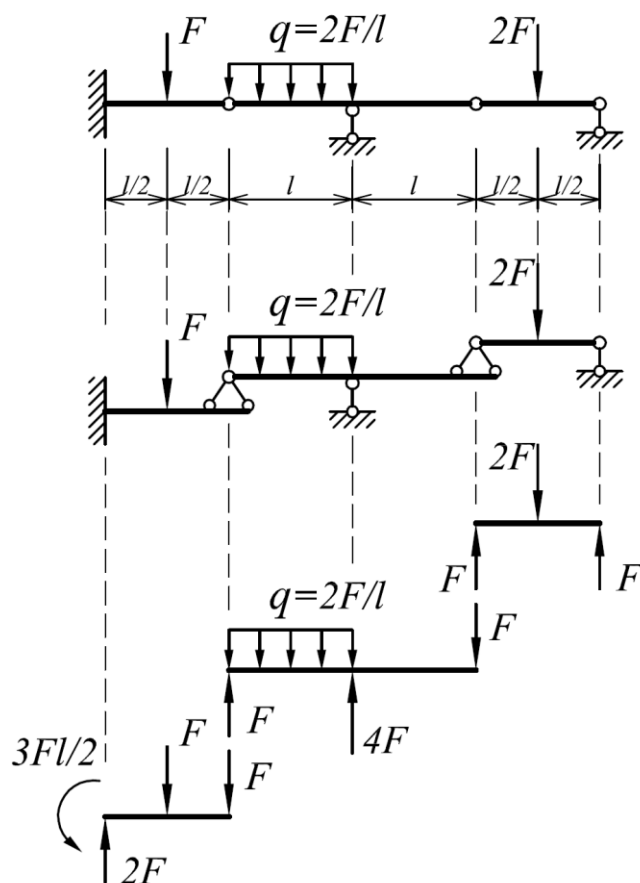


Рис.3.11

На рис. 3.11 показаны статически определимая многопролетная балка и этапы ее расчета.

Балка I (которая ниже всех) называется основной балкой, балка III (которая выше всех) является подвесной или второстепенной, балка II (средняя) второстепенная по отношению к балке I и является основной по отношению к балке III (Рис.3.11,б). Расчет ведется сверху вниз по этажной схеме и начинается с самой выше лежащей балки, причем опорные реакции подвесной балки будут служить внешними силами для нижележащей.

Степень изменяемости системы, согласно (2.4):

$$И = 3Д - С = 3 \cdot 3 - 9 = 0 ,$$

Число степеней свободы системы определяется из (2.1):

$$W = 3D - 2III - C_o = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 - 5 = 0,$$

Так как в данном случае выполняются необходимое и достаточное условие, т.е. $n=0$ и $W=0$, то данная система геометрически неизменяема и статически определима. Рассчитав последовательно второстепенную балку *III*, получим реакции, передающиеся от балки *III* к основной балке *II*. Далее рассчитываем балку *II*, как второстепенную и получим реакцию, передающуюся балке *I*. Определение внутренних усилий в каждой балке рассматривается самостоятельно, считая их статически определимыми системами.

4.1. Примеры расчета простых и многопролетных балок на неподвижную нагрузку

Пример 4.1.1 Для заданной балки (рис.3.12) построить эпюру изгибающих моментов M и эпюру поперечных сил Q от заданной нагрузки. Указать ординаты внутренних усилий в сечении 1 на эпюрах.

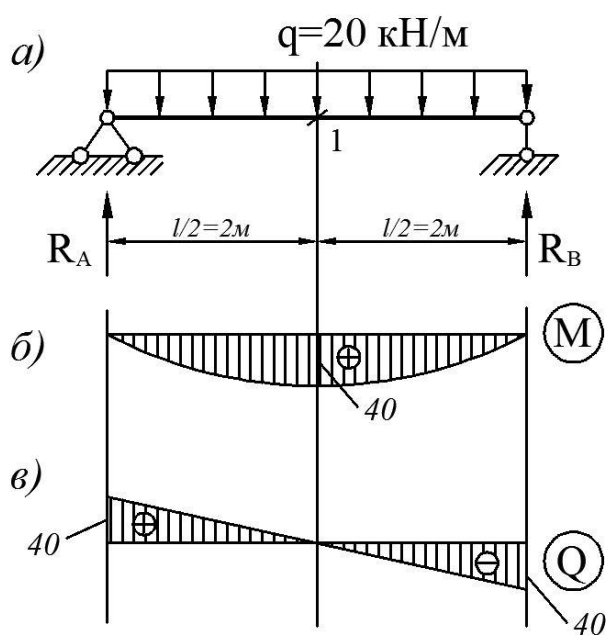


Рис.3.12

Пример 4.1.2. Для заданной балки (Рис.3.13) построить эпюру изгибающих моментов M и эпюру поперечных сил Q от заданной нагрузки. Указать ординаты внутренних усилий в сечении 1 на эпюрах.

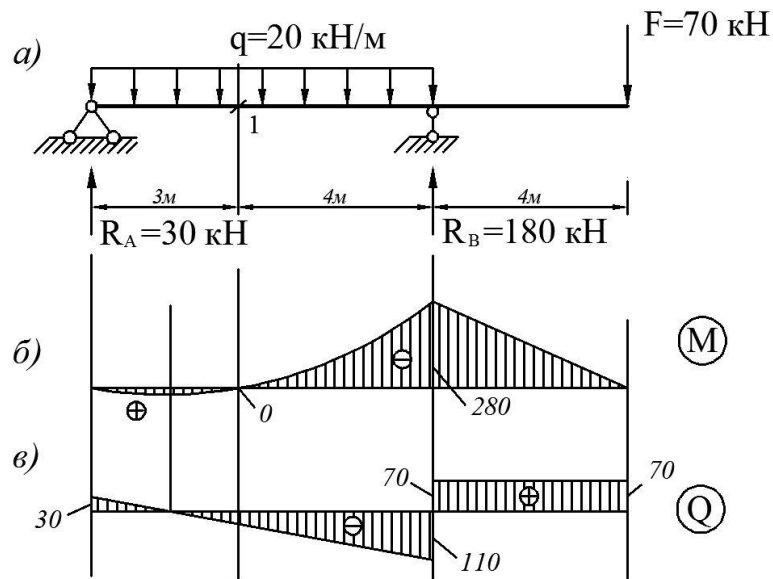


Рис. 3.13

Пример 4.1.3. К расчету многопролетной статически определимой балки

Рис. 3.14 а, где требуется:

1. Проверить геометрическую неизменяемость системы.
2. Построить эпюры изгибающих моментов M и поперечных сил Q от заданной нагрузки.

Решение.

1. Проверка геометрической неизменяемости системы.

Многопролетная статически определимая балка (рис.3.14а) состоит из трех балок (дисков), соединенных между собой шарнирами 2 и 5, и имеет 5 опорных стержней. Число степеней свободы рассматриваемой системы подсчитываем по формуле: $W = 3D - 2Ш - C_{оп} = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 - 5 = 0$.

Степень изменяемости системы: $I = 3D - C = 3 \cdot 3 - 9 = 0$.

Следовательно, рассматриваемая многопролетная балка имеет необходимое количество связей и является геометрически неизменяемой системой. С методической целью проведем анализ геометрической структуры балки и другим способом.

Для проверки неизменяемости данной многопролетной балки начнем геометрический анализ с рассмотрения балки 2-3-4-5. Она соединена с землей тремя непараллельными и не пересекающимися в одной точке опорными стержнями и, следовательно, геометрически неизменяема, и может быть названа основной (главной) балкой

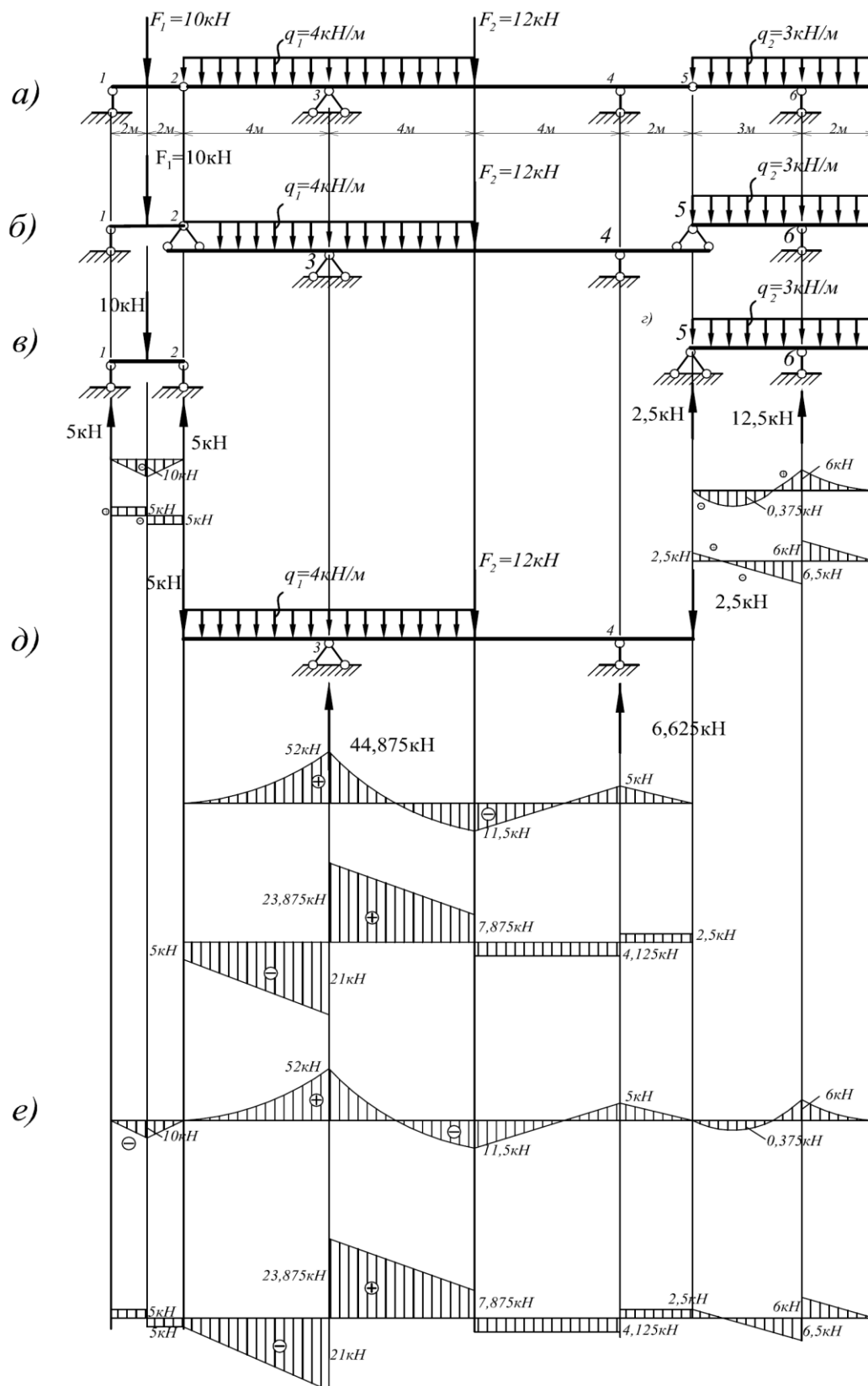


Рис. 3.14

Балка 1-2, являясь второстепенной по отношению к балке 2-3-4-5, прикреплена к ней с помощью шарнира 2, эквивалентного двум линейным стержневым связям, и к земле – с помощью одного опорного

стержня 1. Так как направление указанного опорного стержня не проходит через шарнир 2, балка 1-2 неподвижна и геометрически неизменяема.

Балка 5-6 является второстепенной (подвесной) и прикреплена к неподвижной системе шарниром 5, эквивалентным двум связям, и к земле - опорным стержнем 6, направление которого не проходит через шарнир 5, а поэтому она также геометрически неизменяема. Поэтажная схема приведена на рис. 3.14б.

Таким образом, данная многопролетная балка неизменяема и статически определима.

2. Построение эпюр изгибающих моментов M и поперечных сил Q от заданной нагрузки.

- Для построения эпюр изгибающих моментов M и поперечных сил Q в многопролетной статически определимой балке необходимо отдельно построить эпюры для каждой балки (основной и второстепенной), а затем их совместить. При этом, определение ординат изгибающих моментов и поперечных сил следует вначале проводить для таких второстепенных балок, опорные реакции которых не зависят от нагрузок на других балках.
- По расчетной поэтажной схеме (рис.3.14б) видно, что такими балками являются балки 1-2 и 5-6. Их и рассчитаем сначала, а затем – нижележащую основную балку 2-5, причем в качестве дополнительной нагрузки на нее принимаются опорные реакции вышележащих балок, являющиеся усилиями взаимодействия.
- Окончательные эпюры изгибающих моментов и поперечных сил строятся путем совмещения эпюр, полученных на отдельных участках (рис.3.14 е).

5.1 Трехшарнирные системы. Основные понятия

Трехшарнирная система – это система, образованная путем соединения трех дисков с помощью трех шарниров, не лежащих на одной прямой. При этом третьим диском может служить земля (рис.5.1). С другой стороны, трехшарнирную систему можно считать состоящим из двух дисков I и II , соединенных с помощью одного шарнира друг с другом (шарнир C на рис. 5.1) и двумя шарнирами с землей. Такое соединение, как известно, является геометрически неизменяемым.

Если диски I и II (рис. 5.2) представляют собой стержни с криволинейной осью (a), то такая

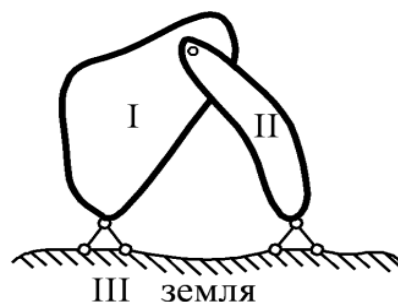
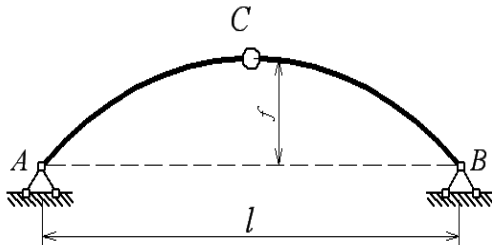


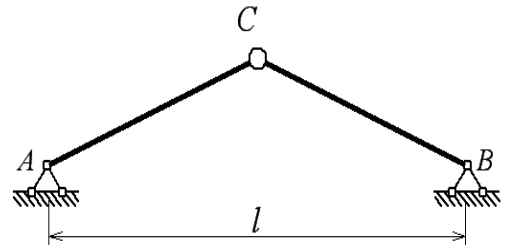
Рис.5.1

система называется *трехшарнирной аркой*; если дисками *I* и *II* являются прямолинейные (б) или ломаные (в) стержни, то система называется *трехшарнирной рамой*; наконец, в случае, когда диски являются сквозными конструкциями (фермами), система называется *трехшарнирной арочной фермой* (г).

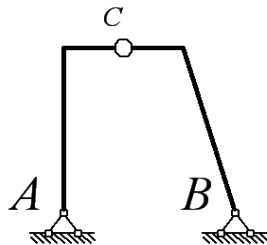
а)



б)



в)



г)

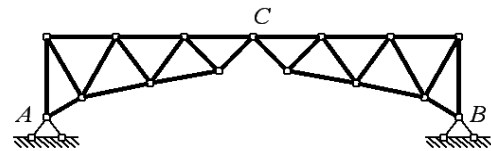


Рис.5.2

Опорные шарниры *A* и *B*, связывающие арку с основанием, представляют собой шарнирно-неподвижные опоры и называются *пятовыми*. Шарнир *C*, соединяющий полуарки, называется *ключевым* и он может быть расположен не всегда в середине пролета. Расстояние *l* между центрами опорных шарниров трехшарнирной арки называется *пролетом*, а расстояние *f* от среднего шарнира до прямой, соединяющей опорные шарниры – *стрелой подъема* арки (см. рис. 5.5).

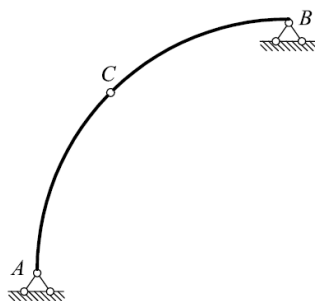


Рис.5.3

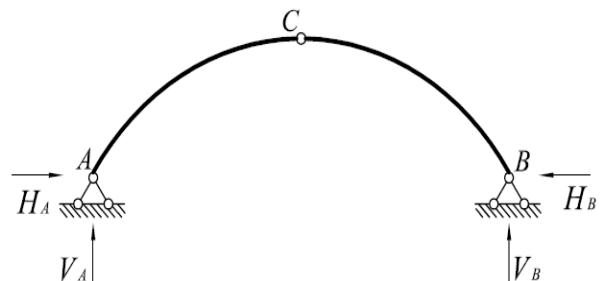


Рис.5.4

Трехшарнирная система может быть симметричной и несимметричной относительно вертикальной оси. В симметричной

системе средний шарнир C расположен на оси симметрии, а опорные шарниры A и B – на одном уровне. Эти опоры могут быть расположены и на разных уровнях (рис. 5.3).

Опорные реакции трехшарнирной системы характеризуются четырьмя параметрами, например, величинами сил H_A , H_B , V_A и V_B (рис. 5.4). Они могут быть определены из трех уравнений равновесия всех сил, действующих на систему (активных и реактивных), и четвертого дополнительного уравнения, выражающего равенство нулю момента всех сил, действующих на левую или правую часть системы, относительно шарнира C . Следовательно, трехшарнирная система является *статически определимой*.

При действии на трехшарнирную систему вертикальной нагрузки горизонтальные составляющие H_A и H_B реакций опор, называемые распором, не равны нулю; в связи с этим трехшарнирные системы относят к *распорным*.

Изгибающие моменты и поперечные силы, возникающие в поперечных сечениях трехшарнирной арки, и напряжения в ней, как будет далее показано, значительно меньше усилий и напряжений, возникающих от той же нагрузки в балке такого же пролета что и арка. В связи с этим трехшарнирные арки при перекрытии больших пролетов более экономичны, чем балки. Возможна схема трехшарнирной арки, у которой одна из опор является шарнирно подвижной (рис. 5.5б), при этом полуарки соединяются дополнительным стержнем DE , называемым затяжкой.

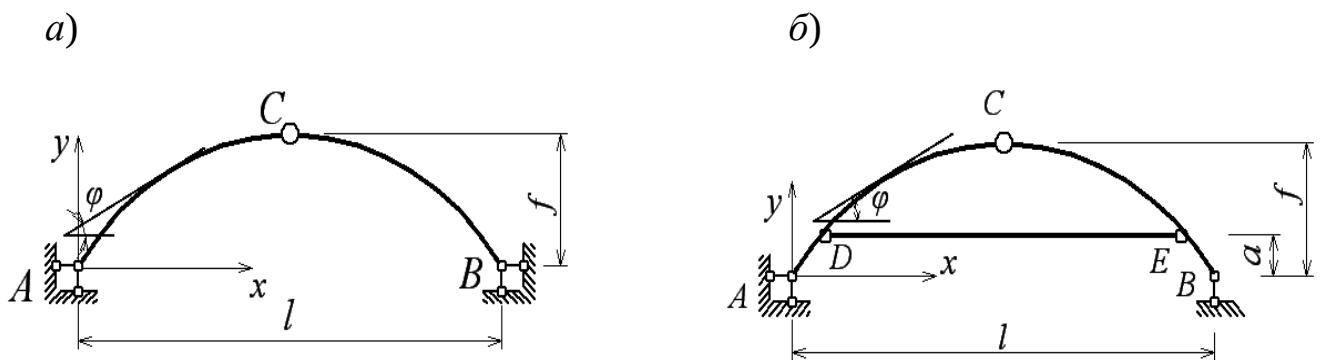


Рис.5.5

С точки зрения кинематического анализа трехшарнирная арка без затяжки состоит из трех дисков (две полуарки – AC и BC – и основание, рис.5.5 а), которые связаны между собой при помощи трех шарниров, не лежащих на одной прямой. Арка с затяжкой состоит из двух дисков AC и BC , которые соединяются шарниром C и стержнем DE , не лежащим на одной прямой, и, следовательно, представляют собой геометрически неизменяемую систему. Поскольку для

обеспечения геометрической неизменяемости использован минимально допустимое число связей, рассмотренные системы являются статически определимыми. На рис.5.6 и рис.5.5 б показаны трехшарнирные арки с затяжками на уровне опор и с повышенной затяжкой, а на рисунке 5.7 а, б рамы с затяжками на разных уровнях.

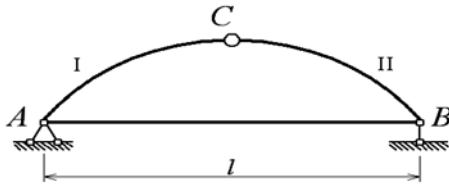


Рис.5.6

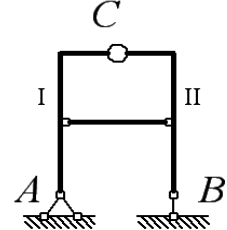
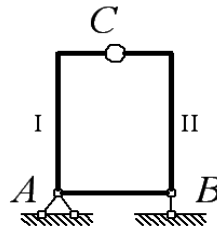


Рис.5.7

Очертание оси арки может быть принято по квадратной параболе, окружности, синусоиде или какой-либо другой кривой. Их уравнения, как правило, задаются в декартовой системе координат с началом на опоре A. (Рис.5.5 а, б).

Уравнение оси арки, очерченной по квадратной параболе

$$y = \frac{4f}{l^2} x(l - x) \quad (5.1)$$

Углы φ между касательной к оси арки и горизонтом определяются из (5.1):

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{4f}{l^2} (l - 2x) \quad (5.2)$$

Для синусоидальной арки

$$y = f \sin \frac{\pi x}{l};$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{dy}{dx} = \frac{f\pi}{l} \cos \frac{\pi x}{l} \quad (5.3)$$

Уравнение окружности в параметрической форме

$$x = R(\sin \alpha - \sin \varphi);$$

$$y = R(\cos \varphi - \cos \alpha), \quad (5.4)$$

Где

$$R = \frac{l^2}{8f} + \frac{l}{2}; \quad \sin \alpha = \frac{l}{2R}; \quad \cos \alpha = l - \frac{l}{R} \quad (5.5)$$

5.2 Определение усилий в сечениях арки

При действии внешних нагрузок в сечениях трехшарнирной арки возникают усилия трех видов: изгибающие моменты M , поперечные силы Q и продольные силы N . Цель статического расчета арки состоит в определении значений этих усилий в ее сечениях.

Изгибающий момент в сечении арки вычисляется как алгебраическая сумма моментов всех сил, расположенных по одну сторону от сечения, относительно центра этого сечения. Следовательно, изгибающий момент представляет собой главный момент всех односторонних сил при приведении их к центру рассматриваемого сечения. Изгибающий момент положителен, если он вызывает растяжение нижних волокон сечения арки.

При нагрузке общего вида изгибающий момент в сечении с координатами x , может быть вычислен по одной из формул:

$$M_x = \sum M_x^{\text{лев}} = \sum_{i=1}^r Y_i(x - x_i) - \sum_{i=1}^r X_i(y - y_i) + \sum_{i=1}^s \bar{M}_i;$$

$$M_x = -\sum M_x^{\text{прав}} = -\sum_{i=r+1}^m Y_i(x - x_i) + \sum_{i=r+1}^m X_i(y - y_i) - \sum_{i=r+1}^n \bar{M}_i; \quad (5.6)$$

где X_i , Y_i - проекции внешних сил, включая опорные реакции и равнодействующие распределенных нагрузок, на координатные оси ox и oy ; x_i , y_i - координаты точек приложения внешних сил; m - общее количество действующих на арку сил; r - количество сил, приложенные к арке слева от сечения; M_j - сосредоточенные моменты (показанные действующими по ходу часовой стрелки); n - общее количество действующих на арку сосредоточенных моментов; s - количество сосредоточенных моментов, приложенных слева от сечения.

При нагрузке общего вида поперечная сила в сечении может быть вычислена по одной из формул:

$$Q_x = \sum n_x^{\text{лев}} = \sum_{i=1}^r Y_i \cos \varphi_x - \sum_{i=1}^r X_i \sin \varphi_x;$$

$$Q_x = -\sum n_x^{\text{прав}} = -\sum_{i=r+1}^m Y_i \cos \varphi_x + \sum_{i=r+1}^m X_i \sin \varphi_x; \quad (5.7)$$

где φ_x - угол между касательной к оси арки в сечении с абсциссой x и осью ox ; остальные обозначения те же, что и в (5.6).

продольная сила в сечении арки находится как сумма проекций всех сил, расположенных по одну сторону от сечения, на касательную к оси арки в этом сечении. Продольная сила положительна, если вызывает растяжение сечения.

При нагрузке общего вида продольная сила имеет вид

$$N_x = \sum k_x^{\text{лев}} = -\sum_{i=1}^r Y_i \sin \varphi_x - \sum_{i=1}^r X_i \cos \varphi_x;$$

или

$$N_x = -\sum k_x^{\text{прав}} = \sum_{i=r+1}^m Y_i \sin \varphi_x + \sum_{i=r+1}^m X_i \cos \varphi_x; \quad (5.8)$$

5.3 Порядок (алгоритм) расчета трехшарнирных систем

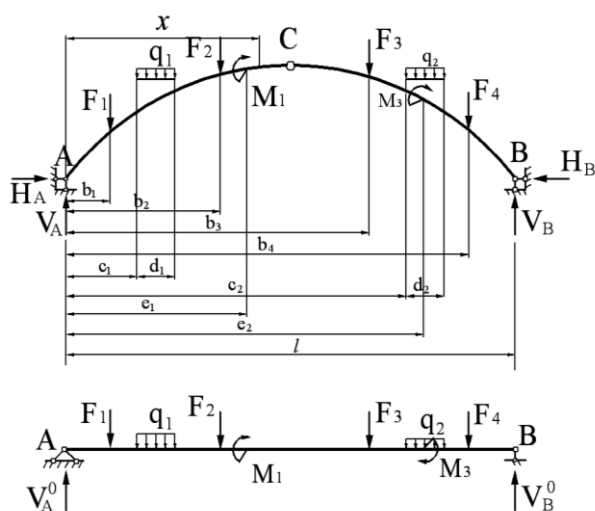


Рис. 5.8

производится составлением уравнений моментов относительно опор B , A и среднего шарнира C .

$$\begin{aligned} \sum m_B = 0; \quad V_A &= \frac{1}{l} \left\{ \sum_i F_i (l - b_i) + \sum_{k=1}^t q_k d_k (l - c_k \frac{d_k}{2}) - \sum_{i=1}^n M_i \right\}; \\ \sum m_A = 0; \quad V_B &= \frac{1}{l} \left\{ \sum_{i=1}^m F_i b_i + \sum q_k d_k (c_k + \frac{d_k}{2}) + \sum_{i=1}^n M_i \right\}; \\ \sum m_C^{лев} = 0; \quad H_A &= \frac{1}{f} \left\{ V_A \cdot l_1 - \sum F_i (l_1 - b_i) - \sum_{k=1}^t q_k d_k (l_1 - c_k - \frac{d_k}{2}) + \sum_{i=1}^{n_1} M_i \right\}; \\ \sum m_C^{np} = 0; \quad H_B &= \frac{1}{f} \left\{ V_B \cdot l_2 - \sum F_i (l - b_i - l_1) - \sum q_k d_k (c_k - l_1 + \frac{d_k}{2}) - \sum_{i=1}^{n_2} M_i \right\}; \end{aligned} \quad (5.9)$$

Арка считается находящейся под действием m вертикальных сосредоточенных сил P_i , приложенных на расстоянии b_i от левой опоры, t — равномерно распределенных нагрузок q_k , протяженностью d_k и абсциссами левых границ участков c_i и n сосредоточенных моментов M_i с абсциссами точек приложения e_i (рис. 5.8.).

При этом удобно использовать так называемую эквивалентную балку, которая представляет собой простую статически определимую балку на двух опорах с такими же, как в арке, пролетом и нагрузками (рис. 5.8 б). В этом случае вертикальные составляющие опорных реакций в арке совпадают с реакциями опор эквивалентной балки.

Положительные сосредоточенные силы F_i и равномерно распределенные нагрузки q_k направлены сверху вниз, положительные сосредоточенные моменты M_i действуют по ходу часовой стрелки.

Рассматривается алгоритм расчета на действие вертикальной нагрузки трехшарнирной арки без затяжки или с горизонтальной прямолинейной затяжкой, установленной на уровне опор или выше них.

Общая схема арки показана на рис.5.8 а. Определение реакций, при действии строго вертикальной нагрузки,

Из уравнения равновесия в виде суммы проекций всех сил на ось ох следует, что горизонтальные составляющие реакций левой и правой опор равны между собой ($H_A = H_B$). Они называются распором арки и обозначаются буквой H . Соответственно сооружения, в которых под действием вертикальной нагрузки возникают как вертикальные, так и горизонтальные составляющие опорных реакций, относятся к классу распорных сооружений.

Распор также может быть определен через изгибающий момент M_C^0 в сечении C эквивалентной балки, соответствующем расположению ключевого шарнира C арки, по формуле

$$H = M_C^0 / f \quad (5.10)$$

Из этой формулы следует, что значение распора в арке при данной нагрузке не зависит от очертания ее оси, а зависит только от взаимного расположения трех ее шарниров. Кроме того, распор обратно пропорционален стреле подъема арки f .

Усилия в любом сечении трехшарнирной арки (см. рис.5.9 б) могут быть определены по формулам:

$$\begin{aligned} M_x &= M_x^0 - H y_x; \\ Q_x &= Q_x^0 \cos \varphi_x - H \sin \varphi_x; \\ N_x &= -(Q_x^0 \sin \varphi_x + H \cos \varphi_x) \end{aligned} \quad (5.11)$$

где y_x - ордината сечения с абсциссой x ; φ_x - угол между касательной к оси арки в этом сечении и координатной осью ox ; $M_x^0; Q_x^0$ - изгибающий момент и поперечная сила в соответствующем сечении эквивалентной балки, которые выражаются формулами:

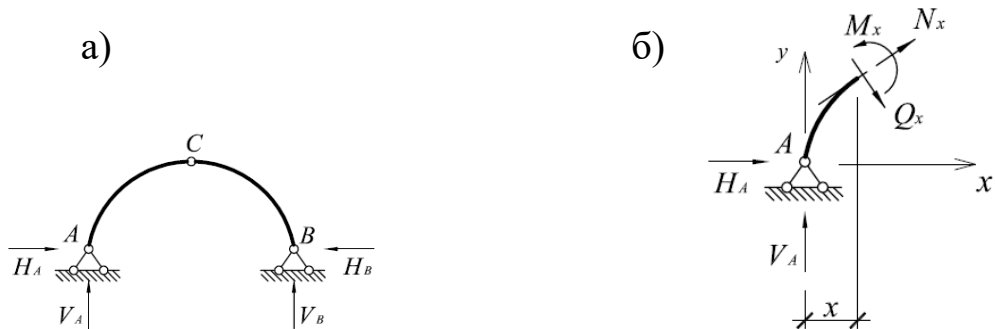


Рис.5.9

$$\begin{aligned} M_x^0 &= V_A x - \sum_{i=1}^i F_i (x - b_i) - \sum_{k=1}^g q_k d_k (x - c_k - \frac{d_k}{2}) + \sum_{j=1}^s \overline{M}_j; \\ Q_x^0 &= V_A - \sum_{i=1}^r F_i - \sum_{k=1}^g q_k d_k, \end{aligned} \quad (5.12)$$

где r – количество сосредоточенных сил, g – количество равномерно распределенных нагрузок, s – количество сосредоточенных моментов, расположенных слева от рассматриваемого сечения балки.

Если сечение расположено между границами приложения $(g+1)$ -й равномерно распределенной нагрузки, формулы для определения M_x^0 и Q_x^0 видоизменяются:

$$M_x^0 = V_A x - \sum_{i=1}^i F_i (x - b_i) - \sum_{k=1}^g q_k d_k \left(x - c_k - \frac{d_k}{2} \right) + \sum_{j=1}^s \overline{M}_j - q_{g+1} \frac{(x - c_{g+1})^2}{2};$$

$$Q_x^0 = V_A - \sum_{i=1}^r F_i - \sum_{k=1}^g q_k d_k - q_{g+1} (x - c_{g+1}). \quad (5.13)$$

Расчет трехшарнирной арки с горизонтальной прямолинейной затяжкой отличается некоторыми особенностями. При действии вертикальной нагрузки в такой арке возникают только вертикальные опорные реакции, которые аналогичны опорным реакциям эквивалентной балки. Усилие в горизонтальной затяжке определяется формулой:

$$H = \frac{M_C^0}{f - a'} \quad (5.14)$$

где M_C^0 – так же, как и в (5.10), изгибающий момент в сечении эквивалентной балки, соответствующем расположению ключевого шарнира С арки; f – стрела подъема арки; a – расстояние по вертикали от уровня опор арки до затяжки (см. рис. 5.5, б).

Усилия в сечениях арки с повышенной затяжкой вычисляются через усилия в эквивалентной балке в зависимости от местоположения сечения.

Для сечений, расположенных ниже затяжки y меньше a

$$M_x = M_x^0$$

$$Q_x = Q_x^0$$

Для сечений, расположенных выше затяжки $y > a$

$$M_x = M_x^0 - H(y - a);$$

$$Q_x = Q_x^0 \cos \varphi_x - H \sin \varphi_x;$$

$$N_x = -(Q_x^0 \sin \varphi_x + H \cos \varphi_x). \quad (5.16)$$

Здесь все обозначения те же, что и в (5.11).

Расчеты удобнее вести в табличной форме, которые имеют вид:

Табл.5.1

№	$x, м$	$y, м$	$tg\varphi$	$\sin\varphi$	$\cos\varphi$	$Q^0, кН$	$M^0, кНм$	$H_y, кНм$
1	2	3	4	5	6	7	8	9

Табл.5.2

№	$Q^0 \cos\varphi$	$Q^0 \sin\varphi$	$H \cos\varphi$	$H \sin\varphi$	$M, кНм$	$Q, кН$	$N, кН$
1	2	3	4	5	6	7	8

По значениям M, Q и N из таблиц 5.1 и 5.2 строим эпюры изгибающих моментов, поперечных и продольных сил, как для балки, так и для арки.

Пример 2.3.1. Расчет трехшарнирной арки

1. Определение реакций опор (см. рис.2.3 а, б;) где геометрические параметры:

пролет - $l=24м$,

длина занимаемая распределенной нагрузкой: $d=16м$,

расстояние от левой опоры до силы P_1 : $b_1=8м$,

расстояние от левой опоры до силы P_2 : $b_2=20м$,

стрела подъема арки : $f = 5м$.

$$\sum m_B = 0: V_A \cdot l - q \cdot d[(l-d) + \frac{d}{2}] - P_1(l-b_1) - P_2(l-b_2) = 0;$$

$$V_A = \frac{q \cdot 16[24-16+8] - P_1(24-8) - P_2(24-20)}{24} = \frac{2 \cdot 16 \cdot 16 + 4 \cdot 16 + 6 \cdot 4}{24} =$$

$$= \frac{512 + 64 + 24}{24} = 25 \text{ кН}$$

$$\sum m_A = 0: -V_B \cdot l + P_2 \cdot b_2 + P_1 \cdot b_1 + q \cdot d \frac{d}{2} = 0;$$

$$V_B = \frac{6 \cdot 20 + 4 \cdot 8 + 2 \cdot 16 \cdot 8}{24} = \frac{120 + 32 + 256}{24} = 17 \text{ кН}.$$

$$\sum_{лев} m_C = 0: V_A \cdot \frac{l}{2} - H_A \cdot f - q \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{l}{4} - \left(\frac{l}{2} - b_1 \right) = 0;$$

$$H_A = \frac{25 \cdot 12 - 2 \cdot 12 \cdot 6 - 4 \cdot 4}{5} = \frac{300 - 144 - 16}{5} = \frac{140}{5} = 28 \text{ кН}.$$

$$\sum_{пр} m_C = 0: -V_B \cdot \frac{l}{2} + H_B \cdot f + P_2 \left(b_C - \frac{l}{2} \right) + q \cdot \left(d - \frac{l}{2} \right)^2 / 2 + 0 = 0;$$

$$H_B = \frac{17 \cdot 12 - 6 \cdot 8 - 2 \cdot (16-12)^2 / 2}{5} = \frac{204 - 48 - 16}{5} = \frac{140}{5} = 28 \text{ кН},$$

как и должно быть, $H_A = H_B = H = 28 \text{ кН}.$

Все вычисленные значения реакций показаны на рис. 2.3 а, б;

2. Вычисление внутренних усилий.

Усилия в любом сечении трехшарнирной арки могут быть определены по формулам

$$\begin{aligned} M_x &= M_x^\sigma - H y_x; \\ Q_x &= Q_x^\sigma \cos \varphi_x - H \sin \varphi_x; \\ N_x &= -(Q_x^\sigma \sin \varphi_x + H \cos \varphi_x), \end{aligned} \quad (2.1)$$

где y_x - ордината сечения с абсциссой x ; φ_x - угол между касательной к оси арки в этом сечении и координатной осью O_x ; M_x^σ , Q_x^σ - изгибающий момент и поперечная сила в соответствующем сечении эквивалентной балки.

Разбивая арку на ряд характерных участков, и пользуясь формулами (2.1), внутренние усилия в сечениях арки определяются

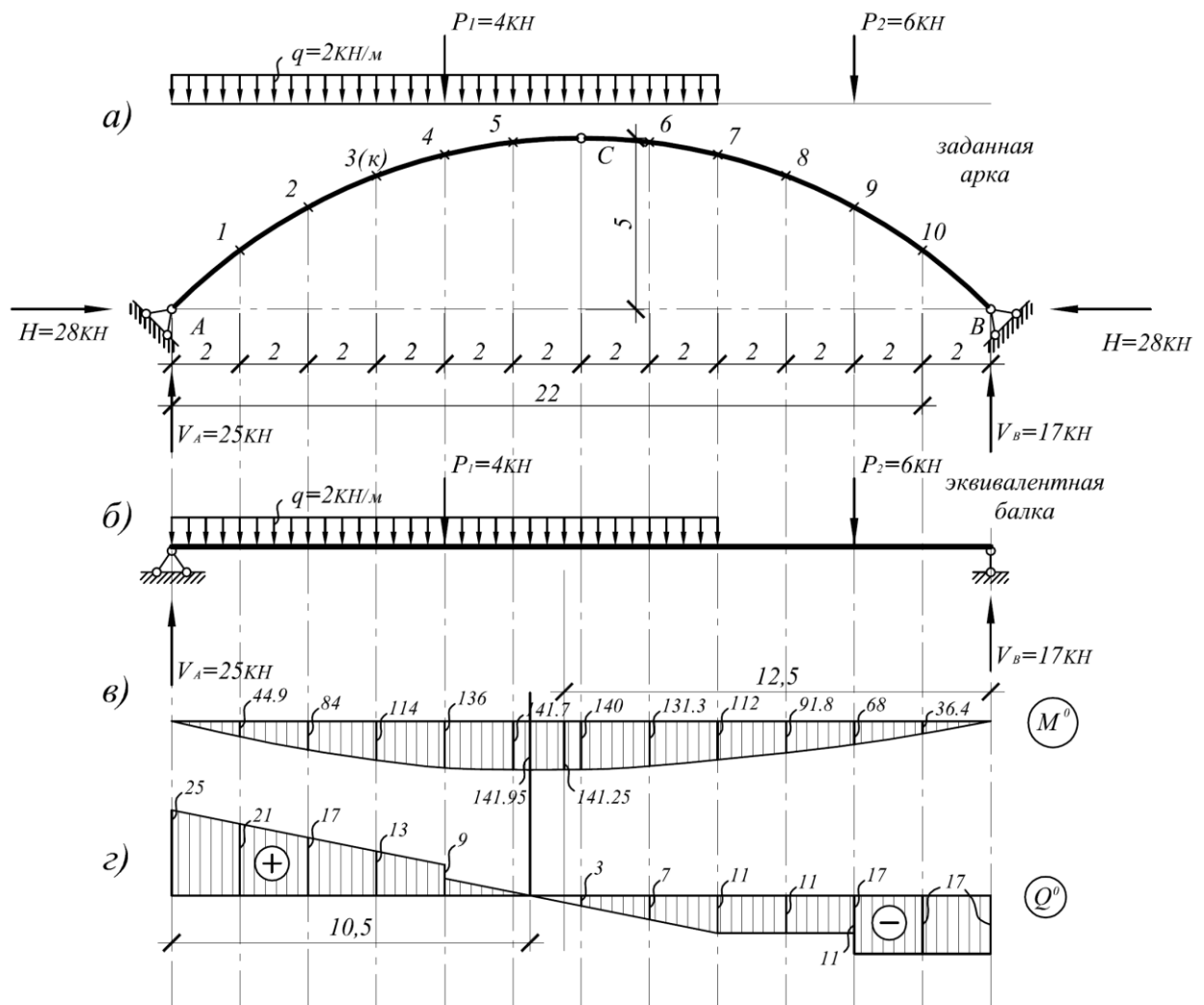


Рис.2.3

через усилия эквивалентной балки, а балочные моменты и поперечные силы вычисляются следующим образом:

$$M_{Ix}^0 = V_A \cdot x - q \frac{x^2}{2}; \quad Q_{Ix}^0 = V_A - qx; \quad x \in (0 \div 8)$$

$$M_{IIx}^0 = V_A \cdot x - q \frac{x^2}{2} - P(x - b_1); \quad Q_{IIx}^0 = V_A - qx - P_1; \quad x \in (8 \div 12)$$

$$M_{IIIx}^0 = V_B \cdot x; \quad Q_{IIIx}^0 = -V_B; \quad x \in (0 \div 4)$$

$$M_{IVx}^0 = V_B \cdot x - P_2(x - b'_2); \quad Q_{IVx}^0 = -V_B + P_2; \quad x \in (4 \div 8)$$

$$M_{Vx}^0 = V_B \cdot x - P_2(x - b'_2) - q \cdot b \left(\frac{x - c'}{2} \right)^2; \quad Q_{Vx}^0 = -V_B + P_2 + q(x - c'); \quad x \in (8 \div 12)$$

Вычисления удобнее вести в табличной форме, вид которых для балочных значений представлен таблицей 2.3, а для значений вспомогательных параметров и усилий в сечениях арки представлен таблицей 2.4.

Для построения эпюр разбиваем арку на участки и выбираем характерные сечения на границах участков, а так же посередине каждого участка (сечения А, 1-10, В, см.рис.2.3)

Ординаты y_i сечений вычисляем по заданному уравнению оси арки, а дифференцируя это уравнение, получим $tg \varphi$ - тангенс угла наклона касательной к оси арки в точке i , что позволяет последовательно вычислить значения $\sin \varphi_i$, $\cos \varphi_i$ ($i = 1, 2, \dots, 9$), например:

$$y_A = 0; \quad y_1 = \frac{4 \cdot 5}{2y^2} \cdot 2 \cdot (24 - 2) = \frac{40}{576} \cdot 22 = 1,5277(\text{м});$$

$$y_2 = 0,03472 \cdot (24 - 4) = 2,7776(\text{м}) \text{ и т.д.}$$

$$tg \varphi_A = \frac{4 \cdot 5}{24^2} \cdot (24 - 2 \cdot 0) = 0,8333;$$

$$tg \varphi_1 = \frac{20}{24^2} \cdot (24 - 2 \cdot 2) = 0,6944;$$

$$tg \varphi_2 = 0,03472 \cdot (24 - 2 \cdot 4) = 0,5555;$$

Аналогичные вычисления продельываем для оставшихся сечений. Полученные результаты заносим в табл. 2.3.

Табл. 2.3

№	$x, \text{ м}$	$y, \text{ м}$	$tg \varphi$	$\sin \varphi$	$\cos \varphi$	$Q^\circ, \text{ кН}$	$M^\circ, \text{ кНм}$	$H_y, \text{ кНм}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9
А	0	0	0,8333	0,6410	0,7692	25,00	0,00	0,00
1	2	1,53	0,6944	0,5703	0,8214	21,00	44,90	42,84
2	4	2,78	0,5555	0,4856	0,8742	17,00	84,00	77,84
3(к)	6	3,75	0,4166	0,3845	0,9231	13,00	114,00	105,0
4	8	4,44	0,2777	0,2675	0,9635	$\frac{9,00}{5,00}$	136,00	124,32
5	10	4,86	0,1388	0,1375	0,9905	1,00	141,70	136,08

C	12	5,00	0,00	0	1,00	-3,00	140,00	140,0
6	14	4,86	-0,1388	-0,1375	0,9905	-7,00	133,30	136,08
7	16	4,44	-0,2777	-0,2675	0,9635	-11,00	112,0	124,32
8	18	3,75	-0,4166	-0,3845	0,9231	-11,00	91,80	105,00
9	20	2,78	-0,5555	-0,4856	0,8742	$\frac{-11,00}{-17,00}$	68,00	77,84
10	22	1,53	-0,6944	-0,5703	0,8214	-17,00	36,40	42,84
B	24	0	-0,8333	-0,6410	0,7692	-17,00	0,00	0,00

Для заполнения столбцов M^o и Q^o строим эпюры этих факторов для простой балки (см. рис.2.3б,в,г) и выписываем их ординаты для всех сечений балки в таблицу 2.3. Для сечений 4 и 9, в которых приложены сосредоточенные силы, определим два значения Q^o - слева и справа от каждой из сил.

Используя формулы (2.1) вычислим сначала составляющие этих формул, а затем - величины M , Q , N в сечениях. Эта процедура сводится к арифметическим действиям над числами из таб.2.3. Результаты вычислений сведены в таб. 2.4, а полученные эпюры M , Q , N представлены на рис.2.4 а,б,в,г.

Табл. 2.4

№	$Q^o \cos \varphi$	$Q^o \sin \varphi$	$H \cos \varphi$	$H \sin \varphi$	$M, \kappa Hm$	$Q, \kappa H$	$N \kappa H$
1	2	3	4	5	6	7	8
A	19,23	16,025	21,54	17,95	0,00	1,28	-37,57
1	17,25	11,97	23,00	15,97	2,06	1,28	-34,97
2	14,86	8,25	24,47	13,59	6,16	1,27	-32,72
3(к)	12,00	4,99	25,85	19,76	9,00	1,24	-30,84
4	$\frac{8,67}{4,82}$	$\frac{2,40}{1,34}$	26,98	7,49	11,68	$\frac{1,18}{-2,67}$	$\frac{-29}{38}$
5	0,99	0,14	27,73	3,85	5,62	-2,85	-27,87
C	-3,00	0	28,00	0	0,00	-3,00	-28,00
6	-6,93	0,96	27,73	-3,85	-4,78	-3,08	-28,69
7	-10,6	2,94	26,98	-7,49	-10,32	-3,11	29,92
8	-10,15	4,23	25,85	-10,76	-13,2	0,61	-30,08
9	$\frac{-9,62}{-14,86}$	$\frac{5,34}{8,25}$	24,47	-13,59	-9,84	$\frac{3,97}{-1,27}$	$\frac{-29,81}{32,72}$
10	-13,96	9,69	23,00	-15,97	-6,44	2,01	-32,69
B	-13,10	10,89	21,54	-17,95	0,00	4,85	-32,43

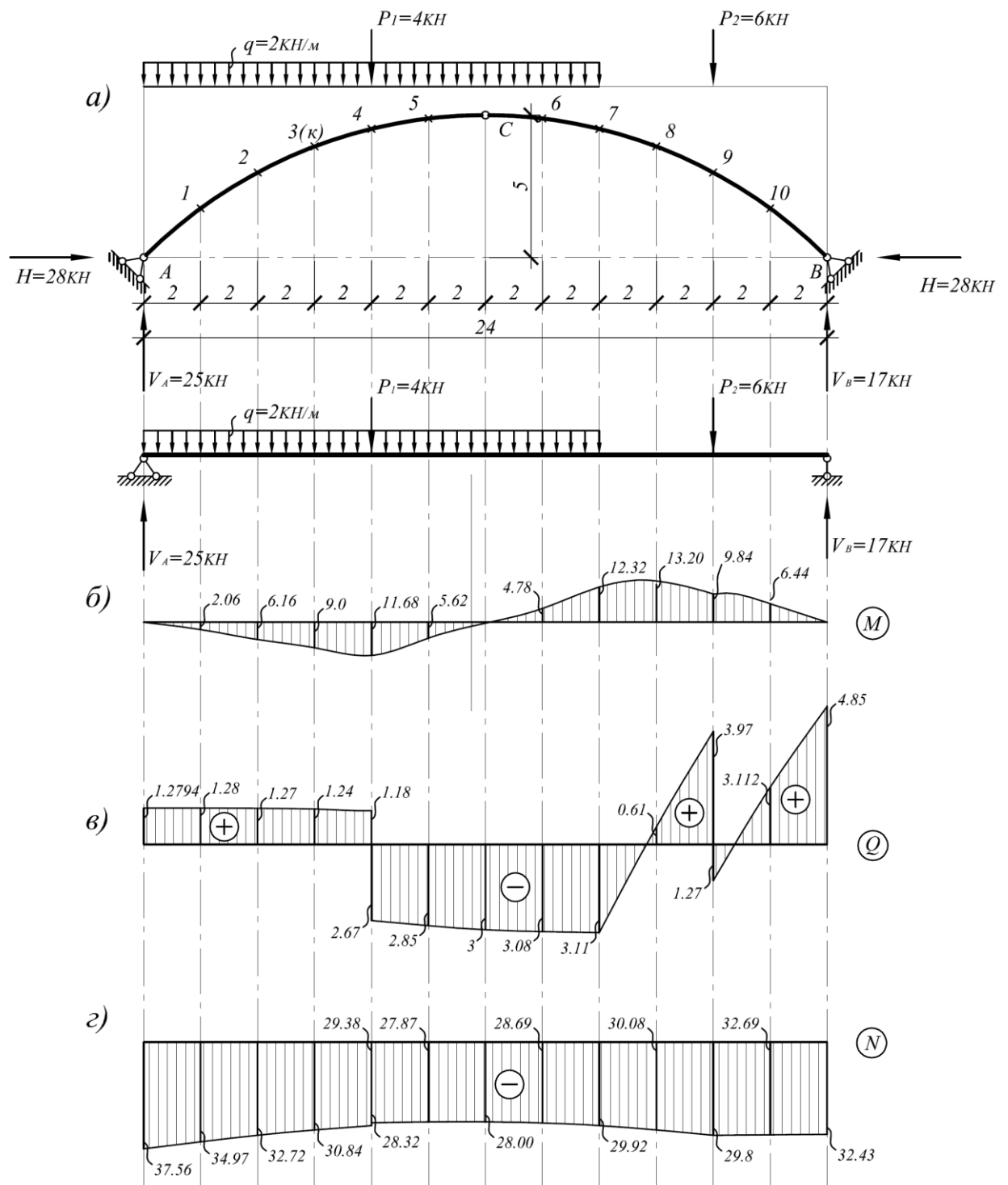


Рис.2.4

Пример 3.3.1. Расчет статически определимой плоской фермы

Схема фермы представлена на рис. 3.3: d - длина панели равна 6 м, h - высота фермы составляет 4 м, узловая нагрузка $P = 6$ кН.

Требуется определить аналитически усилия в стержнях фермы заданной панели.

Построить графически линии влияния для заданных стержней и определить усилия, оба результата сверить.

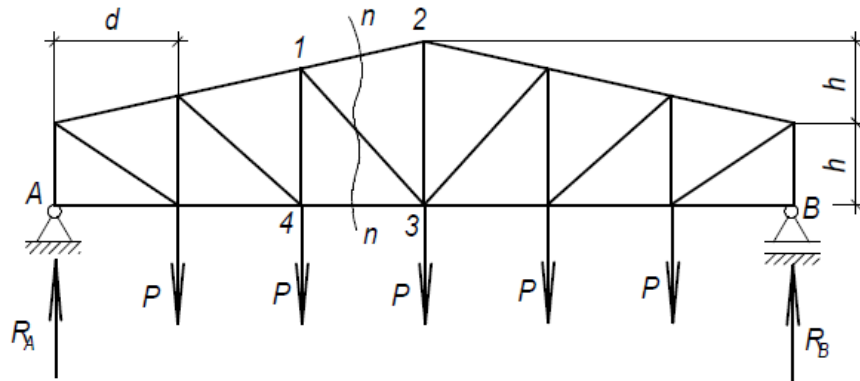


Рис. 3.3. Схема фермы

Решение. Определяем опорные реакции R_A и R_B , т. к. ферма и нагрузка симметричны, то они будут равны:

$$R_A = R_B = \frac{\sum P}{2} = \frac{5 \cdot 6}{2} = 15 \text{ кН.}$$

Усилия в стержнях заданной панели будем определять способом вырезания узлов (рис. 3.4).

Проводим сечение n-n и рассматриваем левую часть фермы.

Определяем усилие в стержне 1-2 (N_{1-2}). Моментной точкой будет узел 3:

$$\sum M_3 = 0; \quad R_A \cdot 3d - P \cdot 2d - P \cdot d + N_{1-2} \cdot r = 0.$$

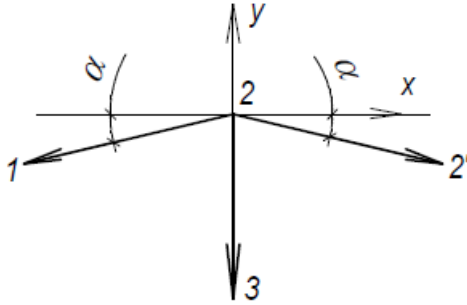
$$N_{1-2} = \frac{15 \cdot 3d - 3 \cdot Pd}{r} = \frac{15 \cdot 3 \cdot 6 - 3 \cdot 6 \cdot 6}{7,808} = \frac{162}{7,808} = 20,7 \text{ кН,}$$

где r - плечо, опущенное на линию действия силы N_{1-2} .

Для определения усилия в стержне 1-4 требуется провести сечение n_1-n_1 . Моментная точка 0:

$$\sum M_0 = 0; -R_A \cdot \alpha_0 + P(d + \alpha_0) + P(2d + \alpha_0) + N_{1-4} \cdot (2d + \alpha_0) = 0$$

$$N_{1-4} = \frac{-R_A \cdot \alpha_0 + P(d + \alpha_0) + P(2d + \alpha_0)}{2d + \alpha_0} = \frac{-270 + 144 + 180}{30} = 1,8 \text{ кН.}$$



Для определения усилия в стержне 2-3 требуется вырезать узел 2.

Так как ферма симметрична, то используем уравнения равновесия проекции всех сил на ось Y и ось X (рис. 3.5):

$$\sum X = 0 \quad -N_{1-2} \cos \alpha + N_{2-2'} \cos \alpha = 0.$$

$$N_{1-2} = N_{2-2'} = 20,748 \text{ кН.}$$

Рис. 3.5. Узел 2

$$\sum Y = 0 \quad -N_{1-2} \sin \alpha - N_{2-2'} \sin \alpha - N_{2-3} = 0.$$

Построение линий влияния для определения усилий в стержнях заданной фермы (рис. 13).

Вычерчиваем схему фермы, убираем узловую нагрузку и загружаем нижний пояс подвижной силой $P = 1$.

Для построения линии влияния применяем закон изменения реакции от единичной силы как в простой балке, используя закон передачи узловой нагрузки. Проводим сечение $n-n$.

Определяем ординаты линии влияния стержня 1-2.

$P = 1$ справа от сечения, рассматриваем левую отсеченную часть фермы:

$$\sum M_3 = 0; R_A \cdot 3d + S_{1-2} \cdot r = 0.$$

$$S_{1-2} = \frac{R_A \cdot 3d}{r} = \frac{-3d}{r} = \frac{18}{7,8} = 2,305 \text{ кН.}$$

$$\sum M_3 = 0; R_A \cdot 3d + S_{1-2} \cdot r = 0.$$

$$S_{1-2} = \frac{R_A \cdot 3d}{r} = \frac{-3d}{r} = \frac{18}{7,8} = 2,305 \text{ кН.}$$

Ордината под узлом 3 при $l = 6d$:

$$S_{1-2} = \frac{-\frac{\lambda - x}{\lambda} \cdot 3d}{r} = \frac{6d - x}{2r}, \quad \text{где } 3d \leq x \leq 6d$$

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА:

ОСНОВНАЯ

1. Дарков А.В., Клейн Г.К. и др. Строительная механика. Под ред. Даркова А.В., - М.: Высшая школа, 1976- 600с.
2. Киселев В.А. Строительная механика.- М.: Стройиздат, 1986-520 с.
3. Руководство к практическим занятиям по курсу строительной механики / Под ред. Г.К. Клейна. - М.: Высш. шк., 1980. - 384 с.
4. Анохин Н.Н. Строительная механика в примерах и задачах. - Ч. 2: Статически неопределимые системы: Учеб. пос. - М.: Изд-во АСВ, 2007 -464 с.
5. Айдемиров К.Р. Введение в строительную механику стержневых систем (статически определимые системы). Учебное пособие для студентов, обучающихся по направлению «строительство». Махачкала: 2011, 101 с.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ

6. Дарков А.В., Шапошников Н.Н. Строительная механика. - М.: Высшая школа, 1986, 607 с.
7. Леонтьев Н.Н., Соболев Д.Н., Амосов А.А. Основы строительной механики стержневых систем.— М.: Изд-во АСВ, 1996, 541 с.
8. Смирнов А.Ф., Александров А. В, Лашенников Б.Я, Шапошников Н.Н. Строительная механика. Стержневые системы.- М.: Стройиздат, 1981, 512 с.
9. Ржаницын А.Р. Строительная механика. - М.: Высшая школа, 1982, 400 с.
10. Кривошапко С.Н. Строительная механика: лекции, семинары, расчетно-графические работы. – М.: Высшая школа, 2008, 392 с.
- 11.Саргсян А.Е. Строительная механика. Механика инженерных конструкций - М.: Высшая школа, 2008, 464 с.
- 12.Александров А.В., Потапов В.Д., Зылев В.Б. Строительная механика. Книга 2. Динамика и устойчивость упругих систем. М.: Высшая школа, 2008, 384 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	3
Общие методические указания.....	4
4. Расчет статически неопределимых систем методом сил.....	7
Методические указания к выполнению РПР 4 (контрольного задания 4)	7
4.1. Задача 1. Расчет статически неопределимой рамы.....	18
4.1.1. Задание к задаче 1 контрольного задания 4	18
4.1.2. Примеры выполнения задачи 1 (РПР 4)	20
4.2. Задача 2. Расчет статически неопределимой фермы.....	28
4.2.1. Задание к задаче 2 контрольной работы 4.....	28
4.2.2. Примеры выполнения задачи 2 (РПР 4)	30
4.3. Задача 3. Расчет неразрезной балки.....	37
4.3.1. Задание к задаче 3 контрольного задания 4.....	37
4.3.2. Примеры выполнения задачи 3 (РПР 4)	39
5. Расчет статически неопределимой рамы методом перемещений.....	43
Методические указания к выполнению РПР 5 (контрольного задания 5)	46
5.1. Задание 5 контрольного задания 5.....	46
5.2. Примеры выполнения контрольного задания 5 (РПР 5).....	48
Приложения.....	74
Рекомендуемая литература.....	80
Содержание.....	81